Geometría diferencial en el espacio de operadores positivos

Lázaro Recht

Abstract

En el artículo [3] con Horacio Porta y Gustavo Corach, iniciamos en 1991 (pues este trabajo data aproximadamente de julio del 91) el estudio del espacio de los operadores simétricos inversibles y, en particular el de los positivos inversibles, desde el punto de vista de la *geometría de espacios homogéneos*, estudio que continúa en el presente y que ha producido en los 7 años que han transcurrido algunos interesantes resultados que espero describir en estas líneas. La referencia general para los conceptos de álgebras C^* es el libro de Kadison y Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I, Academic Press, New York, 1983.

1 El contexto afín

Fijamos un álgebra[1] C^*A

Indicaremos con G el grupo de los elementos inversibles de A y con G^+ al conjunto formado por los elementos positivos de G. Es decir, que $a \in G^+$ si y sólo si $a \in G$, a es autoadjunto ($a = a^*$) y el espectro de a consiste de números (reales) positivos[2]. Consideramos a G^+ como un espacio homogéneo,

[1] Un álgebra C^*A es un álgebra normada (un álgebra con una norma $\|\ \|$ de espacio de Banach) sobre $\mathbb{C}$ con una involución $a \mapsto a^*$ tales que:

1. $a \mapsto a^*$ es sesquilineal.
2. $(ab)^* = b^*a^*$.
3. $\|ab\| \leq \|a\|\ \|b\|$.
4. $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Supondremos que A tiene identidad 1. Según el famoso teorema de Gelfand-Naimark-Segal (GNS), siempre se puede suponer que A es una subálgebra cerrada en norma del álgebra de los operadores acotados de un espacio de Hilbert H, que es cerrada para la operación habitual $a \mapsto a^*$ de tomar el adjunto a^* del operador a.
El lector que así lo prefiera, puede pensar que A es una subálgebra del álgebra de matrices $M_n(\mathbb{C})$ cerrada bajo la operación $a \mapsto a^* = (\bar{a})^t$, y pienso que todavía puede encontrar interesantes los resultados que siguen (véase también [8]).

[2] Recordemos que el espectro de a, $\mathrm{Sp}(a)$, consiste de los números complejos λ tales que

con G como grupo de operadores[3] según la siguiente regla: Si $g \in G$ y $a \in G^+$ ponemos

$$L_g\ a = (g^{-1})^* a g^{-1}.$$

La motivación detrás de la definición de esta acción de G sobre G^+ es la siguiente: Si pensamos que A está representada en un espacio de Hilbert $(\mathfrak{H}, \langle\ \rangle)$, cada elemento $a \in G^+$ produce un producto interno en $\mathfrak{H}$ por la fórmula

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \text{ para } x, y \in \mathfrak{H}.$$

De esta manera tenemos para cada $a \in G^+$ un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}_a$ que es el espacio $\mathfrak{H}$ munido del producto interno $\langle\ ,\ \rangle_a$. Entonces, dado $g \in G$, si consideramos a g como operador

$$g : \mathfrak{H}_a \longrightarrow \mathfrak{H}_{L_g a}$$

resulta que g es una isometría y que esta condición sirve como definición de $L_g\ a$. En otras palabras, el punto de vista adoptado, sirve para considerar a los elementos de G^+ como productos internos en $\mathfrak{H}$ y a los $g \in G$ como isometrías entre estos productos internos.

Consideramos ahora la aplicación habitual siguiente: Fijado $a_0 \in G^+$, ponemos

$$\pi_{a_0} : G \longrightarrow G^+$$

$$\pi_{a_0}(g) = L_g\ a_0$$

que a los geómetras nos gusta ver en la forma de un esquema como se muestra en la figura 1

La fibra de π_{a_0} sobre a_0, es decir el conjunto

$$I_{a_0} = \{g \in G : \pi_{a_0}(g) = a_0\}$$

es un subgrupo de G que llamamos el grupo de isotropía de a_0: consiste de los $g \in G$ tales que $g : \mathfrak{H}_{a_0} \longrightarrow \mathfrak{H}_{a_0}$ es unitario.

$a - \lambda \cdot 1$ no tiene inversa. Quien esté pensando que A es una subálgebra de $M_n(\mathbb{C})$, podrá identificar $\mathrm{Sp}(a)$ con el conjunto de los autovalores de la matriz a.

[3] Un espacio homogéneo E sobre el grupo G significa aquí, que se da una acción de G sobre E, es decir una función $(g, e) \longrightarrow L_g\ e$ de $G \times E$ en E, tal que:

$$L_1 e = e \text{ para todo } e \in E,$$
$$L_{gh} e = L_g(L_h e).$$

Ver [7] y [9].

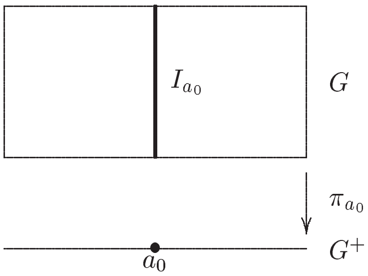

Figura 1

En relación con estos datos, tenemos la situación del esquema anterior en su versión "infinitesimal" que describimos a continuación.

El espacio tangente a G en 1, TG_1

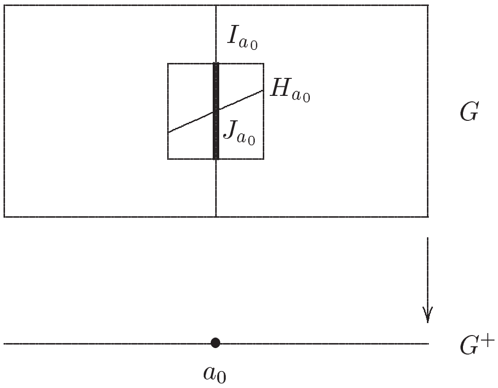

Figura 2

se puede identificar con el álgebra A ya que G es un conjunto abierto en A. Este espacio contiene al subespacio $\mathfrak{I}_{a_0}$ de los vectores tangentes a I_{a_0} en 1 que son los elementos de A antisimétricos para el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_a$, es decir

$$X \in \mathfrak{I}_{a_0} \iff a_0^{-1} X^* a_0 = -X$$

(ya que I_{a_0} consiste de los unitarios para $\langle\ ,\ \rangle_{a_0}$). Por el lenguaje de los grupos de Lie, se dice que A es el álgebra de Lie de G y que $\mathfrak{I}_{a_0}$ es la subálgebra del subgrupo de Lie I_{a_0}. Desde este punto de vista, el producto que se debe considerar en estas álgebras de Lie es:

$$(X, Y) \longrightarrow [X, Y] = XY - YX.$$

También conviene observar que la función π_{a_0} tiene su derivada en $1 \in G$, $(T\pi_{a_0})_1$ que es una función lineal

$$(T\pi_{a_0})_1 : (TG)_1 = A \longrightarrow (TG^+)_{a_0} = A^{Sim}$$

donde, dado que el conjunto G^+ es un abierto (convexo) en la parte simétrica A^{Sim} del álgebra A (diríamos la "parte real" de A).

$$A^{Sim} = \{X \in A : X^* = X\},$$

se tiene la identificación $(TG^+)_{a_0} = A^{Sim}$.

Esta derivada tiene la siguiente expresión explícita:

$$(T\pi_0)_1 X = -(a_0 X + X^* a_0).$$

Esto muestra que si definimos H_{a_0} (el "espacio horizontal en a_0")$H_{a_0} \subset (TG)_1 = A$ como

$$H_{a_0} = \{X \in A : a_0^{-1} X^* a_0 = X\}$$

es decir, el espacio de los $X \in A$ que son simétricos para el producto escalar $\langle\ ,\ \rangle_a$, entonces H_{a_0} es un suplemento de $\mathfrak{I}_{a_o}$ y la derivada $(T\pi_{a_0})_1$, tiene una inversa a derecha

$$K : TG^+_{a_0} = A \longrightarrow TG_1 = A^{Sim}$$

dada por

$$K(Z) = -\frac{1}{2} a_o^{-1} Z$$

cuya imagen es H_{a_0}. Terminamos esta descripción de la descomposición infinitesimal de π_{a_0}

$$(TG)_1 = A = \mathfrak{I}_{a_0} \oplus H_{a_0} = (TI_{a_0})_1 \oplus H_{a_0}$$

con su propiedad más importante de invariancia:

$$\text{Si } X \in \mathfrak{I}_{a_0} \text{ y } Y \in H_{a_0}, \text{ entonces } [XY] \in H_{a_0}$$

o en su forma finita,

$$\text{si } g \in I_{a_0} \text{ y } Y \in H_{a_0}, \text{ entonces } gYg^1 \in H_{a_0}$$

(En términos del producto escalar $\langle\ ,\ \rangle a_0$, esto dice que un automorfismo interior por un unitario transforma simétricos en simétricos). En geometría un espacio homogéneo como G^+ con la estructura adicional que produce la descomposición $(TG)_1 = (TI_{a_0}) \oplus H_a$ con su propiedad de invariancia, se llama un **espacio homogéneo reductivo**. En este contexto, la función K definida más arriba que habría que rebautizar K_{a_0} pues podemos definir una para cada $a_0 \in G^+$ que fijemos y que para cada a_s es:

$$K_{a_0}(Z) = -\frac{1}{2}a_0^{-1}Z$$

$$K_{a_0} : (TG^+)_{a_0} \longrightarrow A = (TG)_1$$

se considera como una 1-forma en G^+ con valores en el álgebra de Lie del grupo $G(= A)$. La llamaremos la **1-forma de estructura del espacio homogéneo** G^+. Con la ayuda de la 1-forma K podemos "levantar" curvas en G^+ a curvas en G, en el sentido que dada la función $a(t)$, $0 \leq t \leq 1$ de clase C^∞ con valores en G^+, podemos encontrar una función $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, con valores en G y de clase C^∞ tal que

$$L_{g(t)}a_o = a(t) \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

donde $a_0 = a(0)$.

En relación con la fibración $\pi_{a_0} : G \longrightarrow G^+$ comentada más arriba, es claro que $g(t)$ "levanta" a $a(t)$ ya que $\pi_{a_0} \circ g(t) = a(t)$. Concretamente, consideramos la ecuación diferencial

$$\dot{g}(t) = K_{a_(t)}(\dot{a}(t))g(t) \tag{1}$$

donde el dato es $a(t)$, la incógnita es $g(t)$ y la condición inicial es $g(0) = 1$. Como es una ecuación lineal en el álgebra A, tiene solución para todo $t \in [0, 1]$. Se comprueba que tiene la propiedad requerida de levantamiento. Llamaremos a la ecuación diferencial (1) la **ecuación de transporte del espacio homogéneo reductivo** G^+. La función g obtenida resolviendo (1) con la condición inicial indicada se llama el **transporte paralelo** a lo largo de la curva $a(t)$. El nombre viene de la geometría diferencial donde la 1-forma K produce una **conexión** en el fibrado principal π_{a_0}. La idea es que por medio de la solución $g(t)$ de (1) se "transportan paralelamente" diversos entes geométricos punto inicial al punto final de la curva $a(t)$. Los entes geométricos más importantes que queremos transportar de $a(0)$ a $a(1)$ son los vectores tangentes. Así definimos una función

$$\tau(a(t)) : (TG^+)_{a_0} \longrightarrow (TG^+)_{a_1}$$

por la fórmula

$$\tau(a(t))(X) = (g(1)^*)^{-1}X(g(1))^{-1} = L_{g(1)}X$$

fórmula que se obtuvo considerando la acción

$$L_{g(1)} : G^+ \longrightarrow G^+$$

y derivando en a_0. Este transporte paralelo tiene varias propiedades que enunciamos a continuación:

1. Es un isomorfismo lineal.
2. Es invariante por reparametrización de $a(t)$ que conserve el sentido de recorrido.
3. Si recorremos la curva al revés, obtenemos el isomorfismo inverso.
4. Si una curva es la yuxtaposición de 2 el transporte paralelo a lo largo de la misma es el compuesto de los transportes parciales, según ilustra el dibujo que sigue:

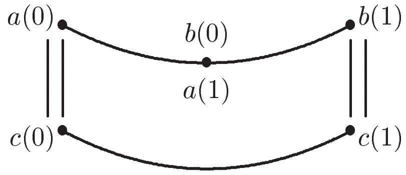

Figura 3

$$\tau(b(t))\tau(a(t)) = \tau(c(t)).$$

Las demostraciones de estas afirmaciones son fáciles. Conviene observar que el transporte paralelo a lo largo de la curva $a(t)$ que lleva el vector $X \in (TG^+)_{a_0}$ al vector $Y \in (TG^+)_{a_1}$, depende de todo el recorrido $a(t)$. Diferentes curvas que unen los mismos puntos, producen diferentes transportes, en general. Estas diferencias tienen que ver con un invariante geométrico de G^+ llamado la **curvatura**. Lamentablemente no podemos detenernos en el estudio de estas ideas aquí. El lector interesado encontrará en las primeras páginas de [3] una construcción del transporte paralelo $g(t)$ inspirada en la idea de integral multiplicativa, que quizás le ayude a entender la idea y sobre todo la **propiedad de compatibilidad con la acción de G:**

5. Dada la curva $a(t)$ y $h \in G$, da lo mismo actuar con h sobre $g(t)$ y obtener $\tilde{g}(t)$:
$$\tilde{g}(t) = hg(t)h^{-1}$$

por automorfismo interior, que actuar con h sobre $a(t)$ y obtener $\tilde{a}(t)$:

$$\tilde{a}(t) = L_h a(t)$$

y luego fabricar el transporte paralelo asociado con $\tilde{a}(t)$. Formalmente

$$\tilde{g}(t) = \tilde{\tilde{g}}(t)$$

donde $\tilde{\tilde{g}}(t)$
es la solución de

$$\dot{\tilde{\tilde{g}}}(t) = K_{\tilde{a}(t)}\tilde{\tilde{g}}(t), \quad \tilde{\tilde{g}}(0) = 1.$$

En geometría se piensa que el transporte paralelo es un concepto "afín" que sirve para definir la noción de línea recta de la geometría que se estudia. Y así como la recta afín habitual se puede definir como la trayectoria que describe un punto en movimiento donde su velocidad es siempre paralela (el transporte paralelo lleva el vector velocidad en un instante al vector velocidad en cualquier otro instante), así también definimos el concepto "afín" de recta en G^+, que aquí se llama **geodésica**.

Concretamente: la curva $a(t)$ es una **geodésica** si para cada par t_0, t_1, $0 \le t_0 \le t_1 \le 1$, el transporte paralelo $\tau(a_{t_0}^{t_1}(t))$ aplicado al vector velocidad $\dot{a}(t_0)$ produce el vector velocidad $\dot{a}(t_1)$, donde $a_{t_0}^{t_1}(t)$ es la curva $a(t)$ restringida al intervalo $[t_0, t_1]$ y reparametrizada afinmente sobre $[0,1]$. Brevemente: $a(t)$ es una geodésica si su vector velocidad $\dot{a}(t)$ es paralelo.

Por la observación acerca de la compatibilidad del transporte paralelo con la acción del grupo G, sigue que si $a(t)$ es una geodésica y si $h \in G$, entonces $b(t) = L_h a(t)$ es también una geodésica.

Entonces, si pensamos que las geodésicas son las rectas de una geometría en G^+ y que G es el grupo de las congruencias de esta geometría, lo que acabamos de decir es que una congruencia transforma rectas en rectas.

Por razones generales, se ve que para cada punto $a_0 \in G^+$ y cada vector $X \in (TG^+)_{a_0}$, existe una única geodésica $a(t)$ tal que $a(0) = a_0$ y tal que $\dot{a}(0) = X$. Se dice que $a(t)$ es la "geodésica por a_0 con velocidad inicial X".

Podemos dar una descripción explícita de todas las geodésicas en G^+. Primero observamos que dado $X \in (TG^+)_1$, (es decir, dado un elemento asimétrico de A), la curva $a(t)$ dada por:

$$a(t) = e^{tK_1(X)} = e^{-\frac{tX}{2}}$$

es la geodésica por 1 con velocidad inicial X (Aquí la ecuación de transporte se resuelve fácilmente y prueba lo que decimos). Y luego, gracias a la observación acerca de la invariancia de la geometría por la acción del grupo, si queremos todas las geodésicas por $a_0 \in G^+$, basta con encontrar $g \in G$ tal que $L_g 1 = a_0$ (lo que de paso sirve para ver que la acción de G sobre G^+ es transitiva, como se suele decir cuando dados $a_0, a_1 \in G^+$, existe $h \in G$ tal que $L_h a_0 = a_1$).

Pero es claro que $a_0^{-1/2}$ cumple con este requerimiento: $L_{a_0^{-1/2}} 1 = a_0$. Así que las geodésicas por a_0 son de la forma

$$b(t) = L_{a_0^{-1/2}} a(t)$$

donde $a(t)$ es de la forma $a(t) = e^{-\frac{tX}{2}}$. Explícitamente

$$b(t) = a_0^{1/2} e^{-\frac{tX}{2}} a_0^{1/2}, \quad X \in A^{Sim}.$$

La existencia de logaritmo para los elementos positivos inversibles de A (ver p.e. [8]) muestra entonces que: Dados a_o, a_1 en A existe una única geodésica (salvo cambio afín de parametrización) que une a_0 con a_1.

Pasamos ahora al otro ingrediente básico de la geometría natural de G^+.

2 Geometría métrica

La geometría desarrollada hasta ahora tiene puntos, paralelismo y rectas. Ahora pasamos a hablar de distancias. La idea aquí es que para medir distancias, primero lo hacemos "infinitesimalmente". Definimos en $(TG^+)_{a_0}$ una norma $\| \|_{a_0}$ de espacio de Banach, para cada $a_0 \in G^+$. Luego medimos longitudes de curvas $a(t)$ en G^+ por la fórmula habitual:

$$L(a(t)) = \int_0^1 \|\dot{a}(t)\|_{a(t)} dt.$$

Finalmente, la distancia $d(a_0, a_1)$ entre dos puntos a_0, a_1 de G^+ se mide, como es natural por:

$$d(a_0, a_1) = \inf\{L(a(t))/a(t) \text{ es } \mathbb{C}^\infty \text{ y une } a_0 \text{ con } a_1\}.$$

El dato de una norma de espacio de Banach en cada espacio tangente $(TG^+)_{a_0}$, con alguna propiedad adicional acerca de cómo varía esta norma cuando el punto cambia, se llama una **estructura de Finsler en** G^+. Así, la métrica $d(a_0, a_1)$ en G^+ se introduce mediante una estructura de Finsler.

Y ahora la pregunta es: ¿cuál es "la estructura de Finsler natural de G^+"?. Cualquier respuesta a esta pregunta debe cumplir con la exigencia siguiente: "La estructura de Finsler escogida debe ser invariante bajo la acción de G". Si esto es así, entonces, una vez escogida la métrica en un punto fijo $a_0 \in G^+$, ella estará determinada ya que el grupo G opera transitivamente sobre G^+ y así, si

$a \in G^+$ y $g \in G$ es tal que $L_g a_0 = a$, entonces, si $x \in (TG^+)_a$, su norma en a no puede sino ser:

$$\|X\|_a = \|L_{g^{-1}} X\|_{a_0} = \|g^* X g\|_{a_0} \tag{2}$$

El problema que aquí enfrentamos es que podría suceder que ninguna norma en a_0 produjera una métrica de Finsler invariante, pues existen muchos $g \in G$ tales que $L_g a_0 = a$ y la exigencia (2) podría ser imposible para todos estos g.

Sin embargo, consideremos las siguientes observaciones:

i) Pongamos, para $X \in (TG^+)_1$, la norma de X como su norma en el álgebra A (cuando X se piensa como un elemento simétrico de A)

$$\|X\|_1 = \|X\|, \quad X \in (TG^+)_1$$

ii) Pongamos, para $X \in (TG^+)_{a_0}$

$$\|X\|_{a_0} = \left\| a_0^{-\frac{1}{2}} X a_0^{-\frac{1}{2}} \right\|$$

(Pensando nuevamente a X como un elemento de A).

iii) Notemos que $L_{a_0^{-\frac{1}{2}}} a_0 = 1$, lo que inspira la definición ii) y notemos que si $L_g a_0 = 1$ para algún $g \in G$, entonces, dado que $a_0 g^{-1} = u$ está en la isotropía de 1, es un elemento unitario del álgebra A y entonces

$$\left\| a_0^{-\frac{1}{2}} X a_0^{-\frac{1}{2}} \right\| = \left\| u^* a_0^{-\frac{1}{2}} X a_0^{-\frac{1}{2}} u \right\| = \left\| (g^{-1})^* X g^{-1} \right\|$$

de modo que nuestra definición no depende de cuál $g \in G$ se elige para que $L_g a_0 = 1$ y así resulta que la norma $\|X\|_{a_0}$ definida más arriba, produce en G^+ una métrica de Finsler, que es invariante bajo la acción de G.

Podemos ahora decir que el propósito de este trabajo es describir algunos resultados relativos a la geometría afín y la geometría métrica de G^+ y de las relaciones entre ambos.

3 Algunos resultados

3.1

Mencionaré primero la propiedad de minimalidad de las geodésicas. Hemos visto antes que dados dos puntos a_0 y a_1 de G^+ existe una única geodésica, salvo parametrización, que los une. El resultado de minimalidad afirma que la longitud de esta geodésica realiza el ínfimo.

$$\inf\{L(a(t))/a(t) \text{ es } \mathbb{C}^\infty \text{ y une } a_0 \text{ con } a_1\}$$

es decir que la longitud de esta geodésica calcula la distancia $d(a_0, a_1)$. Este resultado se prueba en [3]. Observamos que la longitud del vector velocidad de una geodésica es constante (ya que se obtiene por transporte paralelo y el transporte paralelo es isométrico). Luego, si $a(t)$ es la geodésica que une a_0 con a_1, $0 \leq t \leq 1$, su longitud es $\|\dot{a}(0)\|_{a_0}$ y así $d(a_0, a_1) = \|\dot{a}(0)\|_{a_0}$. Pero entonces podemos obtener una fórmula explícita para $d(a_0, a_1)$ con el siguiente argumento. Como la acción de G es isométrica

$$d(a_0, a_1) = d(L_g a_0, L_g a_1)$$

para cualquier $g \in G$. En particular, tomemos $g = a_0^{-\frac{1}{2}}$. Tenemos $L_g a_0 = 1$, $L_g a_1 = a_0^{-\frac{1}{2}} a_1 a_0^{-\frac{1}{2}}$, pero el vector velocidad de la geodésica que une 1 con $a_0^{-\frac{1}{2}} a_1 a_0^{-\frac{1}{2}}$ en tiempo 1 es $\log a_0^{-\frac{1}{2}} a_1 a_0^{-\frac{1}{2}}$ Luego

$$d(a_0, a_1) = \left\| \log a_0^{-\frac{1}{2}} a_1 a_0^{-\frac{1}{2}} \right\|$$

3.2

El siguiente resultado que menciono, expresa una propiedad de la geometría métrica de G^+ que expresa en nuestro contexto infinito–dimensional de Finsler, una propiedad análoga a la que tienen las variedades riemannianas (de dimensión finita), de curvatura negativa. Concretamente, el resultado es el siguiente:

Sean $a(t)$ y $b(t)$, geodésicas de G^+ y sea $f(t)$ la función numérica

$$f(t) = d(a(t), b(t)).$$

Entonces $f(t)$ es una función convexa. Observemos que $f(t)$ es continua pero no necesariamente diferenciable. Este es el principal resultado de [5]. Mencionemos como una de sus múltiples aplicaciones, la siguiente:

Pongamos $a(t) = e^{tX}$, $b(t) = e^{tY}$, para $X, Y \in (TG^+)_1$, dos geodésicas por 1. Observemos que

$$d(a(t), b(t)) = \left\| \log e^{-\frac{tX}{2}} e^{tY} e^{-\frac{tX}{2}} \right\|.$$

No es difícil ver que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{d(a(t), b(t))}{t} = \|Y - X\|.$$

Pero entonces, por la convexidad de $d(a(t), b(t))$ sigue que

$$d(a(t), b(t)) \geq t\|Y - X\|.$$

En $t = 1$, tenemos

$$\left\|\log e^{-\frac{X}{2}} e^{Y} e^{-\frac{X}{2}}\right\| \geq \|Y - X\|.$$

Esta desigualdad está íntimamente relacionada con la conocida desigualdad de Segal

$$\left\|e^{X+Y}\right\| \leq \left\|e^{\frac{X}{2}} e^{Y} e^{\frac{X}{2}}\right\| \text{ (ver [2]).}$$

3.3

Finalmente, describimos el resultado que considero más interesante de la teoría que hemos desarrollado. Para ello introducimos el concepto de **esperanza condicional** en un álgebra C^*. Se trata de lo siguiente: Una **esperanza condicional** es una proyección lineal $\phi : A \longrightarrow A$, cuya imagen es una subálgebra C^*B de A. Es decir $\phi^2 = \phi$, $Im\ \phi = B$. Se pide además que la norma de ϕ, como operador lineal del espacio de Banach A en si mismo, sea 1, es decir, se exige que

$$\|\phi(a)\| \leq \|a\|$$

De esta exigencia, siguen, sorprendentemente, varias propiedades algebraicas. Citemos algunas:

i) Pongamos H para el núcleo de ϕ. Entonces $ba \in H$, $ab \in H$ si $b \in b$ y $a \in H$.

ii) ϕ conmuta con la estrella del álgebra: $\phi(a^*) = (\phi(a))^*$.

iii) ϕ transforma positivos de A en positivos de B.

Mencionamos dos ejemplos: Sea X un espacio compacto, C un álgebra C^* y A el álgebra de las funciones continuas $f : X \longrightarrow C$ con la norma uniforme deducida de la norma de A y la estrella definida puntualmente. Supongamos que X se fibra sobre el espacio compacto Y, o sea que nos dan una función continua $\pi : X \longrightarrow Y$ y una medida μ_y en cada fibra $X_y = \pi^{-1}(y)$ tal que, μ_y es una medida de probabilidad en X_y y tal que si $f : X \longrightarrow C$ es continua, la integral

$$(\pi_* f)(y) = \int_{X_y} f(x) d\mu_y(x)$$

es continua como función de y. No es difícil imaginar interesantes situaciones de este tipo.

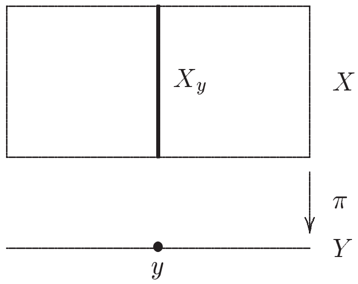

Figura 4

Entonces, poniendo $B \subset A$ para la subálgebra de las funciones $f \in A$ que son constantes en las fibras X_y, tenemos la proyección $\phi : A \longrightarrow A$ con imagen B dada por

$$\phi(f) = \pi^*(\pi_* f)$$

donde $\pi^*(g)(x) = g\pi(x)$ para $g : Y \to A$.

Este ejemplo de esperanza condicional en A seguramente explica para los probabilistas la razón del nombre “esperanza condicional” para esta ϕ.

El segundo ejemplo que presentamos es el siguiente:

Dada el álgebra C^*A, consideramos proyecciones $p_1, \dots, p_n \in A$ tales que

$$p_i + \cdots + p_n = 1, \quad p_k^* = p_k, \; p_k^2 = p_k$$

$$p_i p_k = 0 \text{ si } i \neq K.$$

Entonces, si ponemos

$$\phi(a) = \sum_{k=1}^{n} p_k a p_k,$$

ϕ resulta una esperanza condicional en A con imagen la subálgebra B que es el conmutante de $\{p_1, \dots, p_n\}$ (la subálgebra de los $b \in A$ tales que $b_{p_h} = \rho_k b$, $k = 1, \dots, n$). Observemos que si representamos los elementos de A como matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en la manera habitual poniendo $a_{ij} = p_i a p_j$, entonces $\phi(a)$ es la matriz que tiene los elementos de a en la diagonal principal y 0 fuera de ella. Hay generalizaciones de esta idea que tienen interés y que se exponen en [4].

Habiendo presentado ejemplos de esperanzas condicionales, pasamos a describir el resultado anunciado. Digamos al comienzo que se trata de un teorema de representación de elementos de G^+ en relación con una subálgebra B de A. Concretamente: Fijamos el álgebra A y una esperanza condicional $\phi : A \longrightarrow A$ con imagen $B \subset A$. Como antes, llamamos H al núcleo de ϕ. Tenemos la representación $A = B \oplus H$ en suma directa y, como ϕ conmuta con la estrella, esta descomposición produce la correspondiente descomposición

$$A^{sim} = B^{sim} \oplus H^{sim} \tag{3}$$

de los elementos simétricos A, B, H respectivamente. Si tomamos exponenciales de estas distintas clases de elementos simétricos, obtenemos respectivamente:

A^{sim}	$\longrightarrow$	G^+	los elementos positivos inversibles de A.
B^{sim}	$\longrightarrow$	G^+_B	los elementos positivos inversibles de B.
H	$\longrightarrow$	E	un interesante conjunto de positivos inversibles de A.

Lo que buscamos es una "versión multiplicativa" de la descomposición aditiva (3) en términos de G^+, G^+_B, E y naturalmente, la dificultad esencial de esta empresa, es la falta de conmutatividad del álgebra. Si quisiéramos una biyección natural

$$G^+_B \times E \xrightarrow{m} G^+$$

$$B^{sim} \times H^{sim} \longrightarrow A^{sim}$$

$$(b, h) \longrightarrow b + h$$

que "corresponda a la suma" debemos considerar el hecho que si $b \in G^+_B$, $e \in E$, entonces el producto be no es siquiera simétrico, aunque es inversible. El sustituto "más natural" de be como imagen de (b, e) por m se obtiene usando la llamada descomposición polar de los elementos inversibles de A. Precisamente, pasamos a definir

$$m : G^+_B \times E \longrightarrow G^+.$$

Ponemos $m(b, e) = p$ donde el producto be se escribe $be = up$ con u unitario y p positivo en A. La **descomposición polar** de be consiste en la afirmación que existan en A un único elemento unitario u y un único elemento positivo p, tales que be se puede escribir como $be = up$.

Finalmente llegamos al resultado que queremos presentar aquí. Dice simplemente que la función m es una biyección (en realidad, es un difeomorfismo de la variedad producto $G^+_B \times E$ sobre G^+).

Considero sorprendente y admirable que la única prueba que conocemos de este hecho (que se encuentra en [6] y una versión preliminar en [1]) esté basada en argumentos geométricos. En efecto, observemos que es equivalente a la afirmación que m es biyectiva, la afirmación alternativa que λ lo es, donde

$$\lambda : G_B^+ \times E \longrightarrow G^+$$

$$\lambda(b,e) = beb.$$

Ahora bien, esta forma del resultado tiene un aspecto "algebraico" que podría despertar en algunos espíritus el deseo de obtener una prueba del mismo basada en argumentos algebraicos o en todo caso "analíticos". Sin embargo, la demostración de esta afirmación, en cuyos detalles no podemos (lamentablemente) detenernos aquí, utiliza algunos de los resultados más profundos de la geometría (afín y métrica) del espacio homogéneo G^+, la parte central de la prueba consiste en un análisis detallado del comportamiento métrico de cierto tipo de geodésicas de G^+ que parten de puntos de G_B^+, quien quiera obtener una idea de la complejidad de esta afirmación aun en casos "sencillos", puede considerar el siguiente problema:

Ponga $A = M_3(\mathbb{C})$ el álgebra de matrices 3×3 con coeficientes complejos y $B \subset A$ la subálgebra de matrices diagonales. Ponga $\phi : A \longrightarrow A$ la esperanza condicional siguiente:

$$\phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, G_B^+ consiste de las matrices diagonales con elementos positivos en la diagonal principal y E consiste en las exponenciales de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ \bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

El problema consiste en lo siguiente: dada la matriz positiva inversible p, encontrar una matriz diagonal positiva d tal que $d^{-1}pd^{-1}$ sea la exponencial de una matriz como en (4). Por ejemplo, dar una fórmula que calcule la d pedida.

References

[1] Gustavo Corach, Horacio Porta y Lázaro Recht, *Splitting of the Positive Set of a C^*-Algebra*, **Indag. Math., NS, V. 2, No. 4**, 1991, pp.461-468.

[2] Gustavo Corach, Horacio Porta y Lázaro Recht, *A Geometric Interpretation of Segal's Inequality* $\|e^{X+Y}\| \leq \|e^{X/2}e^Y e^{X/2}\|$, **Proc. of the AMS., V. 115, No. 1,** 1992, pp. 229-231.

[3] Gustavo Corach, Horacio Porta y Lázaro Recht, *The Geometry of the space of Selfadjoint Invertible Elements of a C^*-Algebra*, **Int. Eq. and Op. Th., V. 16, No.3**, 1993, pp. 333-359.

[4] E. Andruchow, Lázaro Recht y D. Stojanoff, *The Space of Spectral Measures is a Homogeneous Reductive Space*, **Int. Eq. and Op. Th., V. 16, No.1**, 1993, pp. 1-14.

[5] Gustavo Corach, Horacio Porta y Lázaro Recht, *Convexity of the Geodesic Distance on Spaces of Positive Operators*, **Ill. J. of Math., V. 38, No.1**, 1994, pp. 87-94.

[6] Horacio Porta y Lázaro Recht, *Conditional Expectations and Operator Decompositions*, **Annals of Global Anal. and Geom., V. 12**, 1994, pp. 335-339.

[7] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, **Academic Press**, 1962.

[8] Richard V. Kadison y John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, **Academic Press**, 1983.

[9] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, **J. Wiley and sons**, 1963.