Zéros des Fonctions L de Courbes Elliptiques

Stéfane Fermigier

Abstract

A toute courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, on sait associer une fonction L_E, qui, conjecturalement, est holomorphe et vérifie une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction zêta de Riemann. On peut se demander, comme pour la fonction zêta, si les fonctions L_E vérifient des conditions analogues à la "conjecture de Riemann", qui affirme que les zéros non-triviaux de ζ se trouvent sur la "droite critique" de l'équation fonctionnelle.

C'est pour tenter de donner un peu de crédit à cette hypothèse de Riemann généralisée que l'on a effectué des recherches numériques de zéros sur plusieurs centaines de courbes différentes. Ainsi, sur les 7000 zéros calculés, tous sont situés sur la droite critique.

To every elliptic curve over $\mathbb{Q}$ one can associate a function L_E, which is conjectured to be holomorphic and to satisfy a functional equation similar to the one satisfied by Riemann's zeta function. One can ask whether these functions satisfy an appropriate version of the Riemann Hypothesis (the traditional Riemann Hypothesis states that the nontrivial zeros of the zeta function lie on the "critical line" of the functional equation).

In order to gather experimental evidence in support of this generalized Riemann hypothesis, I computed numerically a set of zeros for several hundred elliptic curves. All of the 7000 zeros computed for the various curves lie on the critical line.