Homology, Homotopy and Applications, vol.5(1), 2003, pp.101–120

SUR LE TYPE D'HOMOTOPIE D'UN CW-COMPLEXE

MAHMOUD BENKHALIFA

(*communicated by Lionel Schwartz*)

Abstract

Il est bien connu que la seule donnée des groupes d'homologie et des groupes d'homotopie ne permet pas en général de déterminer le type d'homotopie d'un CW-complexe. J.H.C. Whitehead a introduit un invariant plus fin: la "certaine" suite exacte associée à un CW-complexe et en tire la classification des CW-complexes simplement connexes de dimension 4. Dans ce travail, en exploitant les propriétés de la suite exacte de Whitehead, nous montrons comment cette suite peut-être utiliser afin de classifier le type d'homotopie d'un CW-complexe simplement connexe de dimension quelconque.

1. Introduction

Une grande partie de la topologie algébrique tient peut-être dans les tentatives de réponse à la question: comment caractériser algébriquement les espaces topologiques (à homotopie près)? Autrement dit, sait-on construire des invariants algébriques (de préférence calculables et maniables) tels qu'à une collection donnée d'invariants corresponde un seul type d'homotopie.

Des réponses partielles, en général limitées aux CW-complexes, sont apportées depuis lentemps, dans la littérature [**4**], [**5**], [**6**], [**7**], [**10**],[**12**], [**9**], [**8**], [**13**], [**15**], [**20**] et [**21**].

Si l'on se restreint aux CW-complexes simplement connexes de type fini dont l'homotopie est rationnelle, Quillen [**18**] puis Sullivan [**19**] ont construit respectivement des théories (à chaque espace est associé un "modèle algébrique") identifiant une catégorie topologique à une catégorie algébrique. Bien sûr la partie de torsion des groupes d'homotopie est en général trés riche (que l'on songe au cas de la sphère!). Dans une certaine mesure les théories à modèle peuvent se généraliser et tenir partiellement compte de la torsion (théorie modérée de Dwyer [**14**], théorie d'Anick [**2**] et [**3**]).

Une approche du cas général radicalement différente remonte à J.H.C Whitehead. Dans [**21**] il a introduit une "certaine" suite exacte:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{b_{n+1}} \Gamma_n \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} H_n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Received September 20, 2002, revised April 30, 2003; published on May 29, 2003.
2000 Mathematics Subject Classification: 55Q10, 55U40.
Key words and phrases: CW-complexes, homotopy types, Whitehead exact sequence, detecting functor.

pour tout CW-complexe X associant ainsi les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie singulière de celui-ci et en tire une classification des CW-complexes simplement connexes de dimension 4.

Dans ce travail et afin de continuer le programme dejâ commencer par J.H.C Whitehead dans [**21**] et bien repris essentiellement par H.J. Baues [**4**], [**5**] et [**6**], nous nous proposons d'exploiter les propriétés de la suite exacte de Whitehead associée à un CW-complexe simplement connexe X en montrant comment cette suite peut servir, sous une certaine condition, dans le but de classifier le type d'homotopie de celui-ci.

A cet effet on introduit la catégorie Γ-**Système** dont les objets sont les Γ-*systèmes* (grossièrement parlant un $\Gamma-$*système* détermine les suites exactes longues qui sont condidates a être les suites de Whitehead associées à des CW-complexes) et dont les morphismes sont des homorphismes gradués $f_* : H_* \longrightarrow H_*^{'}$ vérifiant certaines conditions (un tel homorphisme gradué est appelé un Γ-*morphism*). En outre nous définissons un fonteur $\Gamma : \Gamma\mathbf{CW}_1/_{\simeq} \rightarrow \Gamma$-**Système,** où $\mathbf{\Gamma CW}_1$ désigne la sous-catégorie de $\mathbf{CW}_1$(la catégorie des CW-complexes simplement connexes) dont les morphismes sont les applications cellulaires vérifiant la condition (4.1) et nous montrons que celui-ci vérifie les propriétés qui définissent un "detecting functor". Une notion introduite par H.J.Baues dans [**5**] et qui induit les résultats suivants:

Théorème 1. *Soient X et Y deux CW-complexes simplement connexes, si leurs $\Gamma -$ systèmes respectivement associés sont isomorphes dans* Γ-**Système** *alors X et Y ont le même type d'homotopie.*

Théorème 2. *Les types d'homotopie dans la catégorie* $\Gamma\mathbf{CW}_1$ *sont en bijection avec les classes d'isomorphisme dans la catégorie* Γ-**Système**.

En outre on montre également le résultat suivant:

Théorème 3. *Deux objets dans* $\Gamma\mathbf{CW}_1$ *ont le même type d'homotopie si et seulement si leurs suites exactes de Whitehead sont isomorphes.*

Enfin on introduit la condition (4.2) qui nous permet d'identifier la catégory $\mathbf{CW}_1$ à sa sous-catégorie $\Gamma\mathbf{CW}_1$ et par suite nous concluons que, sous la condition (4.2), les théorèmes précédents demeurent aussi vrais dans $\mathbf{CW}_1$.

2. Suite de Whitehead associée a un CW-complexe

Soit X un CW-complexe simplement connexe et soit $\{X^n\}_{n\geqslant 2}$ une filtration de X par ses squelettes (puisque X est simplement connexe on peut supposer donc que $X_1 \simeq *$).

Considérons la suite suivante associée a cette filtration :

$$\cdots \rightarrow \pi_n(X^n) \xrightarrow{j_n} \pi_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\beta_n} \pi_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

On sait que $\pi_n(X^n, X^{n-1})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre qui admet pour base l'ensemble Z_n des cellules de dimension n :

$$\pi_n(X^n, X^{n-1}) = \underset{e_\alpha^n \in Z_n}{\oplus} \mathbb{Z}\left[e_\alpha^n\right]$$

en posant:

$$C_n = \pi_n(X^n, X^{n-1}), \qquad d_n = j_{n-1} \circ \beta_n \tag{2.1}$$

(C_*, d) est donc le complexe de chaîne cellulaire de X vérifiant:

$$H_*(C_*, d) = H_*(X, \mathbb{Z}).$$

Pour tout $n \geqslant 2$ posons:

$$\Gamma_n = \mathrm{Im}(\pi_n(X^{n-1}) \to \pi_n(X^n)) \tag{2.2}$$

alors la suite exacte de Whitehead associée à X est par définition:

$$\cdots \to H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{b_{n+1}} \Gamma_n \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} H_n(X, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

où l'homomorphisme gradué b_* est donné par la formule:

$$b_{n+1}(\bar{z}) = \beta_n(z)$$

h_n étant l'homomorphisme d'Hurewitz.

Remarque 1. *1- Le groupe Γ_3 a été calculé par J.H.C.Whitehead dans [**21**], il est donné par la relation :*

$$\Gamma_3 = \Gamma(H_2(X, \mathbb{Z}))$$

où le R-module $\Gamma(H_2(X, \mathbb{Z}))$ est défini par la propriété universelle suivante :

un homomorphisme de groupes abéliens $f : H_2(X, \mathbb{Z}) \to A$ est dit quadratique si $f(h) = f(-h)$ et si l'application:

$$[h, a]_f = f(h + a) - f(h) - f(a)$$

est bilinéaire en h et a.

Il existe un homomorphisme quadratique $\gamma : H_2(X, \mathbb{Z}) \to \Gamma(H_2(X, \mathbb{Z}))$ tel que pour tout homomorphisme quadratique $f : H_2(X, \mathbb{Z}) \to A$, on peut trouver un homomorphisme de groupes abéliens $\bar{f} : \Gamma(H_2(X, \mathbb{Z})) \to A$ vérifiant $\bar{f} \circ \gamma = f$.

Notons, par exemple, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \qquad (2.3) \\ \Gamma(\mathbb{Z}_n) &= \mathbb{Z}_{2n}, \ \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \Gamma(\mathbb{Z}_n) &= \mathbb{Z}_n, \ \textit{si } n \textit{ est impair} \end{aligned}$$

*2- Le groupe Γ_4 été calculé par H.J.Baues dans [**4**].*

Remarque 2. *Puisque C_n est libre, alors de la suite exacte courte :*

$$\Gamma_n \rightarrowtail \pi_n(X^n) \twoheadrightarrow \ker \beta_n \subset C_n$$

on tire que:

$$\pi_n(X^n) \cong \Gamma_n \oplus \ker \beta_n, \ \ \forall n \geqslant 2 \tag{2.4}$$

et de la différentielle $d_n : C_n \to C_{n-1}$ on tire la décomposition en somme directe suivante :

$$C_n = (\mathrm{Im d_n})' \oplus \ker \mathrm{d_n} \tag{2.5}$$

où $(\mathrm{Imd_n})' \subset \mathrm{C_n}$ *est une copie de* $Imd_n \subset C_{n-1}$. *De ce fait les deux suites exactes courtes suivantes:*

$$(\mathrm{Imd_{n+1}})' \overset{\mathrm{d_{n+1}}}{\rightarrowtail} \ker \mathrm{d_n} \twoheadrightarrow H_n$$

$$(\mathrm{Imd_{n+1}})' \overset{\mathrm{d_{n+1}}}{\rightarrowtail} \ker \beta_\mathrm{n} \twoheadrightarrow \ker b_n$$

peuvent-être choisi comme des résolutions libres respectivement pour les groupes abéliens H_n *et* $\ker b_n$.

Remarque 3. *En vertu des relations (2.5) et (2.4), si* $(z_{n+1,\sigma})_{\sigma\in\sum}$ *et* $(l_{n+1,\sigma'})_{\sigma'\in\sum'}$ *désignent respectivement des bases des groupes abéliens libres* $(\ker d_{n+1})$ *et* $(\mathrm{Imd_{n+1}})'$, *l'homomorphisme* β_{n+1} *s'écrit donc:*

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}(z_{n+1,\sigma} + l_{n+1,\sigma'}) = b_{n+1}(\overline{z_{n+1,\sigma}}) + \varphi_n(l_{n+1,\sigma'}) \\ \oplus d_{n+1}(l_{n+1,\sigma'})\end{aligned} \tag{2.6}$$

où φ_n *est un homomorphisme tel que* $\varphi_n : (\mathrm{Imd_{n+1}})' \to \Gamma_\mathrm{n}$.

Désignons par $\mathbf{CW}_1$ la catégorie des CW-complexes simplement connexes. Notons qu'une application $f : X \to Y$ dans $\mathbf{CW}_1$ induit le diagramme commutatif suivant, reliant les deux suites de Whitehead associées respectivement à X et Y :

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_{n+1}(X,\mathbf{Z}) \arrow[r, "b_{n+1}"] \arrow[d, "H_{n+1}(f)"] & \Gamma_n \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n^f"] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n(f)"] & H_n(X,\mathbf{Z}) \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_{n+1}(Y,\mathbf{Z}) \arrow[r, "b'_{n+1}"] & \Gamma'_n \arrow[r] & \pi_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,\mathbf{Z}) \arrow[r, "b'_n"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Ainsi la commutativité de ce diagramme induit la formule suivante:

$$(H_n(f))^*([\pi_n(Y)]) = (\overline{\gamma_n^f})_*([\pi_n(X)]) \tag{2.7}$$

où $[\pi_n(X)] \in \mathrm{Ext}(\ker b_n, \mathrm{Coker}\, b_{n+1})$, $[\pi_n(Y)] \in \mathrm{Ext}(\ker b'_n, \mathrm{Coker}\, b'_{n+1})$ et où:

$$(H_n(f))^* : \mathrm{Ext}(\ker b'_n, \mathrm{Co}\ker b'_{n+1}) \to \mathrm{Ext}(\ker b_n, \mathrm{Coker} b'_{n+1})$$

$$(\overline{\gamma_n^f})_* : \mathrm{Ext}(\ker b_n, \mathrm{Coker} b_{n+1}) \to \mathrm{Ext}(\ker b_n, \mathrm{Coker} b'_{n+1})$$

Remarque 4. *La formule (2.7) peut être expliquer de la manière suivante: choisissons les deux résolutions libres:*

$$(\mathrm{Imd_{n+1}})' \rightarrowtail \ker \beta_n \twoheadrightarrow \ker b_n$$

$$(\mathrm{Imd'_{n+1}})' \rightarrowtail \ker \beta'_n \twoheadrightarrow \ker b'_n$$

respectivement pour les groupes $\ker b_{n+1}$ *et* $\ker b'_{n+1}$. *A la donnée des extensions* $[\pi_n(X)]$, $[\pi_n(Y)]$ *et des homomorphismes* γ_n^f, $(H_n(f))^*$ *correspond les diagrammes suivants:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Imd}_{\mathrm{n+2}})^{'} \arrow[r, tail, "\mathrm{d}_{\mathrm{n+2}}"] \arrow[d, "\overline{\varphi_n}"] & \ker\beta_{\mathrm{n}} \arrow[r, two heads] & \ker \mathrm{b}_{\mathrm{n+1}} \\
\mathrm{Coker} b_{n+1} \arrow[d, "\overline{\gamma_n^f}"] & & \\
\mathrm{Coker} b'_{n+1} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathrm{Imd}_{\mathrm{n+2}})^{'} \arrow[r, tail, "\mathrm{d}_{\mathrm{n+2}}"] \arrow[d, "\xi_{n+1}"] & \ker\beta_{\mathrm{n}} \arrow[r, two heads] & \ker \mathrm{b}_{\mathrm{n+1}} \\
(\mathrm{Imd}^{'}_{\mathrm{n+2}})^{'} \arrow[r, tail, "\mathrm{d}^{'}_{\mathrm{n+2}}"] \arrow[d, "\overline{\varphi^{'}_n}"] & \ker\beta^{'}_{\mathrm{n}} \arrow[r, two heads] & \ker \mathrm{b}^{'}_{\mathrm{n+1}} \\
\mathrm{Coker} \mathrm{b}^{'}_{n+1} & &
\end{tikzcd}$$

où $[\varphi_n] = [H_n(A)]$, $[\varphi^{'}_n] = [H_n(B)]$ *et où* $\overline{\gamma_n^f}$ *(respect.* ξ_{n+1}*) est l'homomorphisme induit par* γ_n^f *(respect. par* $H_{n+1}(f)$*) sur le groupe quotient* $\mathrm{Coker} b_{n+1}$ *(respect. sur le sous-groupe* $(\mathrm{Imd}_{\mathrm{n+1}})^{'}$*).*

Les deux homomorphismes $(\overline{\gamma_n^f})_*$ *et* $(H_n(f))^*$ *sont définis par les formules:*

$$(\overline{\gamma_n^f})_*([H_n(A)]) = [\overline{\gamma_n^f} \circ \varphi_n]$$
$$(H_n(f))^* \left([H_n(B)]\right) = [\varphi^{'}_n \circ \xi_{n+1}].$$

Donc la formule (2.7) est équivalente à la relation:

$$[\overline{\gamma_n^f} \circ \varphi_n] = [\varphi^{'}_n \circ \xi_{n+1}] \text{ dans } \mathrm{Ext}(\ker b_n, \mathrm{Coker} b^{'}_{n+1})$$

où encore l'homomorphisme:

$$\overline{\gamma_n^f} \circ \varphi_n - \varphi^{'}_n \circ \xi_{n+1} : (\mathrm{Imd}_{\mathrm{n+1}})^{'} \longrightarrow \mathrm{Coker}\mathrm{b}^{'}_{\mathrm{n+1}}$$

se prolonge au sous-groupe $\ker \beta_n$.

Proposition 1. *Soit* X *un CW-complexe simplement connexe, alors pour tout* $n \geqslant 2$ *on a :*

$$\pi_n(X) \cong \frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker \beta_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_{\mathrm{n}}} \oplus \mathrm{Imd}_{\mathrm{n+1}}} \tag{2.8}$$

où $\overline{\varphi_n} : (\mathrm{Imd}_{\mathrm{n+1}})^{'} \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{n}}} \Gamma_{\mathrm{n}} \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\mathrm{b}_{\mathrm{n+1}}$.

Preuve. De la suite exacte suivante :

$$\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \overset{\beta_{n+1}}{\to} \pi_n(X^n) \to \pi_n(X^{n+1}) \to 0$$

on tire que:

$$\pi_n(X^{n+1}) \cong \frac{\pi_n(X^n)}{\mathrm{Im}\beta_{\mathrm{n+1}}} \tag{2.9}$$

En substituant les formules (2.5) et (2.6) dans la relation (2.9) il vient que:

$$\pi_n(X^{n+1}) \cong \frac{\Gamma_n \oplus \ker \beta_n}{\mathrm{Imb}_{\mathrm{n+1}} + \mathrm{Im}\varphi_{\mathrm{n}} \oplus \mathrm{Imd}_{\mathrm{n+1}}}$$

où encore :

$$\pi_n(X^{n+1}) \cong \frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker \beta_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_\mathrm{n}} \oplus \mathrm{Imd_{n+1}}}$$

et enfin, puisque $\pi_n(X) = \pi_n(X^{n+1})$, on peut donc écrire:

$$\pi_n(X) \cong \frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker \beta_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_\mathrm{n}} \oplus \mathrm{Imd_{n+1}}}.$$

ce qui achève la démonstration □

3. Systèmes d'homotopie d'ordre n

Dfinition 1. *Un système d'homotopie d'ordre n est la donnée d'un quadruple $(C_*, X^n, b_{n+1}, \pi_n)$ constitué des données suivantes :*

1- X^n est un CW-complexe simplement connexe de dimension n.

2- $C_* = (C_i)_{i\geqslant 2}$ est un complexe de chaîne tel que :

$$C_i \cong \pi_i(X^i, X^{i-1}) \text{ pour } i \leqslant n$$

autrement dit le complexe de chaîne

$$C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_2 \ ,$$

coincide avec le complexe de chaîne cellulaire de X.

3- b_{n+1} est un homomorphisme de groupes abéliens

$$b_{n+1} : H_{n+1}(C_*) \to \Gamma_n \subset \pi_n(X^n).$$

4- π_n est une extension telle que :

$$\pi_n \in \mathrm{Ext}(H_n(C_*), \mathrm{Coker} b_{n+1}).$$

5- L'application composée suivante:

$$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \cong \pi_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\beta_n} \pi_n(X^n) \tag{3.1}$$

est triviale. Autrement dit $\beta_n \circ d_{n+1} = 0$.

Rappellons que le sous-groupe Γ_n est donné par la formule (2.2).

Dfinition 2. *Un morphisme entre deux systèmes d'homotopie d'ordre n, $(C_*, X^n, b_{n+1}, \pi_n)$ et $(C_*, Y^n, b'_{n+1}, \pi'_n)$ est la donnée d'un couple (ξ, η) constitué des données suivantes :*

1- $\eta : X^n \to Y^n$ est une application cellulaire

2- $\xi_* : C_* \to C'_*$ est une transformation de chaîne telle que $\xi_{i\leqslant n}$ coincide avec celle induite par η

$$\xi_i : C_i \to C'_i \ , \ i \geqslant n+1.$$

Ces deux données sont soumises aux deux conditions suivantes:

1- $\pi_n(\eta) \circ b_{n+1} = b'_{n+1} \circ f_{n+1}$

2- $(H_n(\xi_*))^*(\pi_n) = (\overline{\gamma_n^\eta})_*(\pi_n)$

où les deux homomorphismes $(H_n(\xi_*))^*$, $(\overline{\gamma_n^\eta})_*$ *sont ceux induits respectivement par les homomorphismes* $H_{n+1}(\xi_*)$ *et* $\overline{\gamma_n^\eta}$. *Autrement dit:*

$$(H_n(\xi_*))^* : \mathrm{Ext}(H_n(C'_*), \mathrm{Coker}b'_{n+1}) \to \mathrm{Ext}(H_n(C_*), \mathrm{Coker}b'_{n+1})$$
$$(\overline{\gamma_n^\eta})_* : \mathrm{Ext}(H_n(C_*), \mathrm{Coker}b_{n+1}) \to \mathrm{Ext}(H_n(C_*), \mathrm{Coker}b'_{n+1}).$$

Remarque 5. *Exprimons autrement la condition (2). Soient:*

$$0 \to (\mathrm{Imd}_{n+1})' \xrightarrow{\mathrm{d}_{n+1}} \ker \mathrm{d}_n \twoheadrightarrow \mathrm{H}_n$$
$$0 \to (\mathrm{Imd}'_{n+1})' \xrightarrow{\mathrm{d}'_{n+1}} \ker \mathrm{d}'_n \twoheadrightarrow \mathrm{H}'_n$$

deux résolutions libres respectivement de H_n *et* H'_n. *A la donnée des extensions* π_n *et* π'_n *et des homomorphismes* γ_n^η *et* f_{n+1} *correspondent les diagrammes suivants:*

$$\begin{tikzcd} 0 \to (\mathrm{Imd}_{n+1})' \xrightarrow{\mathrm{d}_{n+1}} \ker \mathrm{d}_n \twoheadrightarrow \mathrm{H}_n \arrow[d, "\overline{\varphi_n}"] \\ \mathrm{Coker}b_{n+1} \arrow[d, "\overline{\gamma_n^\eta}"] \\ \mathrm{Coker}b'_{n+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \to (\mathrm{Imd}'_{n+1})' \xrightarrow{\mathrm{d}'_{n+1}} \ker \mathrm{d}'_n \twoheadrightarrow \mathrm{H}'_n \arrow[d, "\xi_{n+1}"] \\ 0 \to (\mathrm{Imd}_{n+1})' \xrightarrow{\mathrm{d}_{n+1}} \ker \mathrm{d}_n \twoheadrightarrow \mathrm{H}_n \arrow[d, "\overline{\varphi'_n}"] \\ \mathrm{Coker}b'_{n+1} \end{tikzcd}$$

où $[\overline{\varphi}_n] = \pi_n$, $[\overline{\varphi}'_n] = \pi'_n$ *et où* $\overline{\gamma_n^\eta}$ *est l'homomorphisme induit par* γ_n^η *sur le sous-groupe quotient* $\mathrm{Coker}b_{n+1}$.

Or les homomorphismes $(\overline{\gamma_n^\eta})_*$ *et* $(H_n(\xi_*))^*$ *dont définis par les deux formules suivantes:*

$$(\overline{\gamma_n^\eta})_*(\pi_n) = [\overline{\gamma_n^\eta} \circ \varphi_n]$$
$$(H_n(\xi_*))^*(\pi'_n) = [\varphi'_n \circ \xi_n]$$

La condition (2) est donc équivalente à la relation:

$$[\overline{\gamma_n^\eta} \circ \varphi_n] = [\varphi'_n \circ \xi_{n+1}] \ \textit{dans}\ \mathrm{Ext}(H_n(C_*), \mathrm{Coker}b'_{n+1})$$

où encore que l'homomorphisme:

$$\overline{\gamma_n^\eta} \circ \varphi_n - \varphi'_n \circ \xi_{n+1} : (\mathrm{Imd_n})' \longrightarrow \mathrm{Cokerb}'_{n+1}$$

se prolonge au sous-groupe $\ker d_n$.

Désignons par $\mathbf{H}_n$ la catégorie dont les objets sont les systèmes d'homotopie d'ordre n et leurs morphismes et par $\mathbf{H}_n^{n+1}$ la sous-catégorie de $\mathbf{H}_n$ constituée des systèmes d'homotopie d'order n $(C_*, X^n, b_{n+1}, \pi_n)$ vérifiant $C_i = 0$ pour tout $i \geqslant n+2$.

Dfinition 3. *Soient* (ξ, η) *et* (ξ', η') *deux morphismes dans la catégorie* $\mathbf{H}_n$. *On dit que* (ξ, η) *et* (ξ', η') *sont homotopes, et on note* $(\xi, \eta) \simeq (\xi', \eta')$, *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- η and $\eta^{'}$ sont homotopes antant qu'applications cellulaires.
- Il existe des homomorphismes de groupes abéliens

$$\alpha_j : C_j \to C^{'}_{j+1} \ , \ j \geqslant n+1$$

vérifiant la relation suivante :

$$d^{'}_{j+2} \circ \alpha_{j+1} = \alpha_j \circ d_{j+1} \ , \ j \geqslant n+1$$

Désignons par $\mathbf{H}_n \diagup_{\simeq}$ (respect. par $\mathbf{H}_n^{n+1} \diagup_{\simeq}$) la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathbf{H}_n$ (respect. de $\mathbf{H}_n^{n+1}$) et dont les morphismes sont les classes d'homotopie $\{(\xi, \eta)\}$ des morphismes (ξ, η) de $\mathbf{H}_n$.(respect. de $\mathbf{H}_n^{n+1}$).

3.1. Foncteur λ_n

La suite exacte de Whitehead introduite dans la section précédente nous permet de définir une fonction

$$\lambda_n : \mathbf{ObCW}_1 \diagup_{\simeq} \longrightarrow \mathbf{ObH}_n \diagup_{\simeq}$$

comme suit :

soit X un CW-complexe simplement connexe. En vertu du chapitre précédent la suite exacte de Whitehead associée à X s'écrit :

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \stackrel{b_{n+1}}{\longrightarrow} \Gamma_n \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

cette suite nous fournie donc l' homomorphisme $b_{n+1} : H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma_n$ et la suite exacte courte $\mathrm{Coker} b_{n+1} \rightarrowtail \pi_n(X^{n+1}) \twoheadrightarrow \ker b_n$. Or d'après la proposition (1) on a:

$$\pi_n(X) \cong \frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker \beta_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_n} \oplus \mathrm{Imd_{n+1}}}.$$

Puisque la relation (2.8) implique que $\ker \beta_n \subset \ker d_n$ alors posons:

$$\pi_n = \left[\frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker d_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_n} \oplus \mathrm{Imd_{n+1}}} \right] \tag{3.2}$$

où $\overline{\varphi_n} : (\mathrm{Imd_{n+1}})^{'} \stackrel{\varphi_n}{\to} \Gamma_n \twoheadrightarrow \mathrm{Coker} b_{n+1}$, de sorte que:

$$\pi_n \in \mathrm{Ext}(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathrm{Coker} b_{n+1}),$$

ce qui nous permet de définir la fonction λ_n par la formule:

$$\lambda_n(X) = (C_*(X), X^n, b_{n+1}, \pi_n)$$

où $C_*(X)$ est le complexe de chaîne cellulaire associé à X.

Soit $\{\eta\} : X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{CW}_1 \diagup_{\simeq}$. Nous avons vu que l'application continue η induit un diagramme commutative entre les suites exactes de Whitehead associées respectivement à X et Y. D'où η induit la relation (2.7). Par conséquent on définit $\mathbf{\Gamma CW}_1$ comme étant la sous-catégorie de $\mathbf{CW}_1$ dont les morphismes sont les applications cellulaires η vérifiant la condition suivante:

Pour tout $n \geqslant 2$ on a:

$$[\overline{\gamma_n^{\eta}} \circ \varphi_n] = [\varphi^{'}_n \circ \xi_n] \text{ dans } \mathrm{Ext}(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathrm{Coker} b^{'}_{n+1}). \tag{3.3}$$

Rappellons que cette condition veut dire que l'homomorphisme:

$$\overline{\gamma_n^{\eta}} \circ \varphi_n - \varphi_n^{'} \circ \xi_n : (\mathrm{Imd_{n+1}})^{'} \longrightarrow \mathrm{Cokerb}_{\mathrm{n+1}}^{'}$$

qui se prolonge à $\ker \beta_n$ par la remarque (4), peut-être aussi prolonger à $\ker d_n$. Par conséquent on définit le foncteur $\mathbf{\Gamma}_n : \mathbf{\Gamma CW_1}/_{\simeq} \to \mathbf{H}_n/_{\simeq}$ en posant:

$$\lambda_n(X) = (C_*(X), X^n, b_{n+1}, \pi_n)$$
$$\lambda_n(\{\eta\}) = \{(\xi_*, \eta_{/X^n})\}$$

où $\eta_{/X^n}$ désigne la restriction de l'application η au n-squelette X^n et où ξ désigne la transformation de chaîne induite par l'application η sur les complexes de chaîne cellulaires associées respectivement à X et Y.

Notons que la condition (3.3) implique que le morphisme $(\xi_*, \eta_{/X^n})$ satisfie les deux conditions qui définissent les morphismes dans $\mathbf{H}_n$.

Si on désigne par $\Gamma\mathbf{CW}_1^{n+1}$ la sous-catégorie de $\Gamma\mathbf{CW_1}$ dont les objets sont les CW-complexes X^{n+1} de dimension $n+1$, alors on peut aussi consider le foncteur $\lambda_n^{n+1} : \Gamma\mathbf{CW}_1^{n+1}/_{\simeq} \to \mathbf{H}_n^{n+1}/_{\simeq}$ donné par la formule:

$$\lambda_n^{n+1}(T(V_{\leqslant n+2}, \partial)) = (C_{\leqslant n+1}(X), X^n, b_{n+1}, \pi_n)$$
$$\lambda_n^{n+1}(\{\eta\}) = \{(\xi_{\leqslant n+1}, \eta_{/X^n})\}.$$

Remarquons que λ_n^{n+1} n'est autre que la restriction du foncteur λ_n à la sous-catégorie $\Gamma\mathbf{CW}_1^{n+1}/_{\simeq}$.

Nous abordons maintenant l'étude des foncteurs λ_n et λ_n^{n+1}.

Théorème 4. *Une application cellulaire est une équivalence d'homotopie dans* $\mathbf{CW}_1^{n+1}$ *(autrement dit un isomorphisme dans la catégorie* $\Gamma\mathbf{CW}_1^{n+1}/_{\simeq}$*) si et seulement si son image par le foncteur* λ_n *est un isomorphisme dans* $\mathbf{H}_n/_{\simeq}$*.*

Preuve. Soit $\{\eta\} : X^{n+1} \to Y^{n+1}$ un morphisme dans la catégorie $\mathbf{CW}_1^{n+1}/_{\simeq}$. Si $\{\eta\}$ est un isomorphisme alors il vient que $\eta : X^{n+1} \to Y^{n+1}$ est une équivalence d'homotopie, d'où $\eta_{/X^n}$ et la transformation de chaîne ξ_* sont aussi respectivement une équivalence d'homotopie est un isomorphisme de groupes abéliens. Par conséquent on déduit que $\lambda_n(\{(\xi, \eta)\})$ est un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{H}_n/_{\simeq}$.

Inversement si $\lambda_n(\{(\xi, \eta)\})$ est un isomorphisme dans $\mathbf{H}_n/_{\simeq}$ alors il vient que $\eta_{/X^n} : X^n \to Y^n$ est une équivalence d'homotopie.

En outre, puisque X^{n+1} est un CW-complexe de dimension $n+1$, son complexe de chaîne cellulaire s'écrit :

$$0 \to \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \overset{d_{n+1}}{\to} \pi_n(X^n, X^{n-1}) \overset{d_n}{\to} \pi_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \to \cdots$$

Par hypothèse $\lambda_n(\{(\xi, \eta)\})$ est un isomorphisme dans $\mathbf{H}_n/_{\simeq}$ ceci implique que la transformation de chaîne $(\xi_i)_{i \leqslant n+1}$, où $\xi_i = \pi_i(\eta) : \pi_i(X^i, X^{i-1}) \to \pi_i(Y^i, Y^{i-1})$ induit un isomorphisme en homologie:

$$H_*(\eta) : H_*(X^{n+1}, \mathbb{Z}) \to H_*(Y^{n+1}, \mathbb{Z}).$$

Enfin le théorème de Whitehead assure que η est donc une équivalence d'homotopie □

Théorème 5. *Pour tout système d'homotopie* $(C_{\leqslant n+1}, X^n, b_{n+1}, \pi_n)$ *d'ordre* n *dans* $\mathbf{H}_n^{n+1}$*, il existe un CW-complexe* X^{n+1}*de dimension* $n+1$ *tel que:*

$$\lambda_n^{n+1}(X^{n+1}) = (C_{\leqslant n+1}, X^n, b_{n+1}, \pi_n) \tag{3.4}$$

Preuve. Choisissons $(\mathrm{Imd_{n+1}})^{'} \rightarrowtail \ker \mathrm{d_n} \twoheadrightarrow \mathrm{H_n}$, comme une résolution libre du groupe abélien H_n. L'inclusion $\ker b_n \overset{i}{\hookrightarrow} H_n(C_{\leqslant n+1})$ induit l'homomorphisme:

$$\mathrm{Ext}(H_n(C_{\leqslant n+1}), \mathrm{Coker} b_{n+1}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}(\ker b_n, \mathrm{Coker} b_{n+1}).$$

A la donnée de l'extension $\pi_n \in \mathrm{Ext}(H_n(C_{\leqslant n+1}), \mathrm{Coker}\, b_{n+1})$ correspond le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Imd_{n+1}})^{'} \arrow[r, tail] \arrow[d, "\varphi_n"'] \arrow[dr, "\overline{\varphi_n}"] & \ker \mathrm{d_n} \arrow[r, two heads] & \mathrm{H_n} \\
\Gamma_n \arrow[r, two heads] & \mathrm{Cokerb'_{n+1}} &
\end{tikzcd}$$

où:

$$[\overline{\varphi_n}] = \left[\frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker \beta_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_n} \oplus \mathrm{Imd_{n+1}}} \right] = \pi_n. \tag{3.5}$$

De la relation $\beta_n \circ d_{n+1}$ (voir (3.1)) on déduit l'existence d'un homomorphisme $\widetilde{d}_{n+1}$ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "\widetilde{d}_{n+1}"'] & C_n \cong \pi_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\beta_n"] & \pi_{n-1}(X^{n-1}) \\
& \pi_n(X^n) \arrow[u, "j_n"'] &
\end{tikzcd}$$

A l'aide de la décomposition en somme directe du groupe abélien:

$$C_{n+1} \cong (\mathrm{Imd_{n+1}})^{'} \oplus \ker \mathrm{d_{n+1}}$$

et en choisissant $(z_{n+1}, \sigma)_{\sigma \in \sum}$ (respect. $(l_{n+1}, \sigma^{'})_{\sigma^{'} \in \sum^{'}}$) comme étant une base du groupe abélien libre $\ker d_{n+1}$ (respect. du groupe abélien libre $(\mathrm{Imd_{n+1}})^{'}$), nous allons attacher au CW-complexe X^n des cellules de dimension $n+1$ via l'application d'attachement suivante:

$$\alpha : \bigvee_{\sigma \in \sum} S^n_{z_{n+1}, \sigma} \vee \bigvee_{\sigma^{'} \in \sum^{'}} S^n_{l_{n+1}, \sigma'} \to X^n$$

définie par les deux relations:

$$\left[\alpha\diagup_{S^n_{z_{n+1,\sigma}}}\right] = b_{n+1}(\overline{z_{n+1,\sigma}}) \in \pi_n(X^n)$$

$$\left[\alpha\diagup_{S^n_{l_{n+1,\sigma'}}}\right] = \varphi_n(l_{n+1,\sigma'}) + \widetilde{d}_{n+1}(l_{n+1,\sigma'}) \in \pi_n(X^n)$$

où $\alpha\diagup_{S^n_{z_{n+1,\sigma}}}$ (respect. $\alpha\diagup_{S^n_{l_{n+1,\sigma'}}}$) désigne la restriction de l'application α à la $(n+1)$-sphère $S^n_{z_{n+1,\sigma}}$ (respect. à la $(n+1)$-sphère $S^n_{l_{n+1,\sigma'}}$) de sorte que l'homomorphisme $\beta_{n+1} : C_{n+1} \to \pi_n(X^n)$ satisfait la relation:

$$\beta_{n+1}(z_{n+1,\sigma} + l_{n+1,\sigma'}) = b_{n+1}(\overline{z_{n+1,\sigma}}) + \varphi_n(l_{n+1,\sigma'}) + d_{n+1}(l_{n+1,\sigma'}) \tag{3.6}$$

Posons $X^{n+1} \simeq C_\alpha$ (C_α étant le cône de l'application α). Nous allons montrer maintenant que la formule (3.4) est vérifiée. En effet il est clair que le complexe de chaîne cellulaire associé à X^{n+1} s'identifie au complexe $C_{\leqslant n+1}$ et que le n-squelette du CW-complexe X^{n+1} est X^n d'où:

$$\lambda_{n+1}(X^{n+1}) = (C_{\leqslant n}, X^n, b'_{n+1}, \pi'_n).$$

Reste maintenant a démontrer que $b'_{n+1} = b_{n+1}$ et $\pi_n = \pi'_n$. En effet d'après la définition du foncteur λ^{n+1}_n, d'une part l'homomorphisme b'_{n+1} est défini par :

$$b'_{n+1}(\overline{z_{n+1,\sigma}}) = \beta_{n+1}(z_{n+1,\sigma}) = b_{n+1}(\overline{z_{n+1,\sigma}})$$

d'où $b'_{n+1} = b_{n+1}$. D'autre part d'après la proposition (1), l'extension π'_n vérifie :

$$\pi'_n \cong \left[\frac{\mathrm{Coker} b_{n+1} \oplus \ker\beta_n}{\mathrm{Im}\overline{\varphi_n} + \mathrm{Imd_{n+1}}}\right]$$

d'où d'après la relation (3.5) en déduit que :

$$\pi_n = \pi'_n \in \mathrm{Ext}(\mathrm{H_n}(\mathrm{C_{\leqslant n+1}}), \mathrm{Cokerb_{n+1}})$$

ce qui achève la démontration □

Dfinition 4. *La paire* (b_{n+2}, π_{n+1}) *est appelée un couple adapté au CW-complexe* X^n.

Dfinition 5. *Une application entre deux CW-complexes* X^n *et* Y^n *de dimension* n *est dite n-diagonale si elle applique le* $(n-1)$*-squelette* X^{n-1} *de* X^n *sur le* $(n-1)$*-squelette* Y^{n-1} *de* Y^n *et les cellules de dimension* n *de* X^n *sur les cellules de dimension* n *de* Y^n.

Lemme 1. *Si* $\eta : X^n \to Y^n$ *est une application n-diagonale alors en tenant compte de la décomposition en somme directe de* $\pi_n(X^n) \cong \Gamma_n \oplus \ker b_n$ *(respect.* $\pi_n(Y^n) \cong \Gamma'_n \oplus \ker b'_n$*), l'homomorphisme* $\pi_n(\eta)$ *se décompose en:*

$$\pi_n(\eta) = \gamma^\eta_n \oplus \xi_n \tag{3.7}$$

où γ^η_η *est l'homomorphisme induit par* η *sur le sous-groupe* Γ_n *et où* $\xi_n : \ker\beta_n \to \ker\beta'_n$ *est la transformation de chaîne induite par* η *sur les complexes de chaîne cellulaires.*

Preuve. (triviale)

Théorème 6. *Soit X^{n+1} et Y^{n+1} deux CW-complexes et soit:*

$$(\xi_*, \eta) : \lambda_n^{n+1}(X^{n+1}) \to \lambda_n^{n+1}(Y^{n+1})$$

un morphisme dans la catégorie H_n^{n+1} tel que l'application η soit n-diagonale, alors il existe une application (n+1)-diagonale $\overline{\eta} : X^{n+1} \to Y^{n+1}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} H_i(\overline{\eta}) &= H_i(\eta) \quad \textit{pour tout } i \leqslant n \\ H_{n+1}(\overline{\eta}) &= H_{n+1}(\xi_*)\ . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dans le but de démontrer ce thèorème, considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[rr, "\xi_{n+1}"] \arrow[dl, "\beta_{n+1}"'] \arrow[dd, "d_{n+2}"] & & \pi_{n+1}(Y^{n+1}, Y^n) \arrow[dr, "\beta'_{n+1}"] \arrow[dd, "d'_{n+2}"] & \\
\pi_n(X^n) \arrow[rrrr, "\pi_n(\eta)"] \arrow[dr, "j_n"'] & & & & \pi_n(Y^n) \arrow[dl, "j'_n"] \\
 & \pi_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "\xi_n"] & & \pi_n(Y^n, Y^{n-1}) &
\end{tikzcd}$$

(a)- où les triangles de gauche et de droite commutent par définition des différentielles d_{n+1} et $d^{'}_{n+1}$.

(b)- où le trapèze inférieur commute par la donnée de l'application η.

(c)- où le carré central commute car ξ_* est une transformation de chaîne.

Puisque $j^{'}_n(\pi_n(\eta) \circ \beta_{n+1} - \beta^{'}_{n+1} \circ \xi_{n+1}) = 0$, on déduit que :

$$\mathrm{Im}(\pi_\mathrm{n}(\eta)\beta_{\mathrm{n+1}} - \beta^{'}_{\mathrm{n+1}}\xi_{\mathrm{n+1}}) \subset \Gamma^{'}_{\mathrm{n}}.$$

Commençons par donner le lemme crucial suivant:

Lemme 2. *Il existe un homomorphisme de groupes abéliens $g_n : C_n \to \Gamma^{'}_n$ vérifiant :*

$$\pi_n(\eta) \circ \beta_{n+1} - \beta^{'}_{n+1} \circ \xi_{n+1} = g_n \circ d_{n+1} \ (mod\ \mathrm{Imb}^{'}_{\mathrm{n+1}}) \tag{3.9}$$

Preuve. Puisque η est n-diagonale alors les relations (2.6) et (3.7) nous permettent d'écrire d'une manière explicite l'homomorphisme $H_n(\alpha^n) \circ \beta_{n+2} - \beta^{'}_{n+2} \circ \xi_{n+2}$ et par conséquent il vient que:

$$H_n(\alpha^n) \circ \beta_{n+2} - \beta^{'}_{n+2} \circ \xi_{n+2} = \gamma_n^{\alpha^n} \circ \varphi_n - \varphi^{'}_n \circ \xi_{n+2}$$

En tenant compte de la condition (2), définissant les morphismes dans la catégorie $\mathbf{H}_n$ et la remarque (5), il existe donc un homomorphisme g_n faisant commuter le diagramme commutative suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{Imd}_{n+2})' \arrow[rr, "d_{n+2}"] \arrow[d, "\gamma_k^{\alpha^n}\varphi_n - \varphi_n^{'}\xi_{n+2}"'] & & \ker \mathrm{d}_{n+1} \arrow[dll, "g_n"] \\
& \Gamma_n' \arrow[rr, two heads] & & \mathrm{Cokerb}_{n+2}'
\end{tikzcd}$$

Puisque $\ker d_n$ est un facteur directe du groupe abélien C_n (voir (2.5)) alors on peut prolonger g_n à C_n et le lemme est donc prouvé $\square$

Preuve du théorème (6)

D'après le lemme (2) on a:

$$(H_n(\eta) - g_n j_n) \circ \beta_{n+1} - \beta_{n+1}^{'} \circ \xi_{n+1} = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Imb}_{n+1}^{'}).$$

Par suite, V_{n+1} étant libre, il existe un homomorphisme λ_{n+1} faisant commuter le triangle suivant:

$$\begin{tikzcd}
& \ker d_{n+1}' \arrow[d, "\beta_{n+1}'"] \\
V_{n+1} \arrow[ur, "\lambda_{n+1}"] \arrow[r, "(\pi_k(\eta) - h_n j_n)\beta_{n+1} - \beta_{n+1}^{'}\xi_{k+2}"'] & \mathrm{Im}\ \mathrm{b}_{n+1}' \subset \Gamma_{\mathrm{n}}^{'}
\end{tikzcd}$$

Ainsi la formule (3.9) devient:

$$(\pi_n(\eta) - h_n j_n) \circ \beta_{n+1} - \beta_{n+1}^{'} \circ \xi_{n+1} = \beta_{n+1}^{'} \circ \lambda_{n+1}. \tag{3.10}$$

Remarque 6. *Puisque l'homomorphisme* $(\pi_n(\eta) - g_n j_n) \circ \beta_{n+1} - \beta_{n+1}^{'} \circ \xi_{n+1}$ *est nul sur* $\ker d_n$*, l'homomorphisme* λ_n *peut être choisi nul sur* $\ker d_n^{'}$.

Définissons l'application $\overline{\eta} : X^{n+1} \to Y^{n+1}$ de la façon suivante:

Sur le n-squelette X^n de X^{n+1}, $\overline{\eta}$ est définie en perturbant l'application η de la manière suivante:

représentons X^n comme une union disjointe de son $(n-1)$-squelette et de ses cellules de dimension n, autrement dit:

$$X^n = X^{n-1} \vee \Big(\bigcup_{e \in \sum_n} e^n_{z_{n,\sigma}} \Big) \vee \Big(\bigcup_{\sigma \in \sum_n^{'}} e^n_{l_{n,\sigma'}} \Big)$$

$\overline{\eta}$ est définie donc par ses restrictions suivantes:

$$\overline{\eta}_{/X^{n-1}} = \eta$$

$$\overline{\eta}_{/ \underset{\sigma' \in \sum_n^{'}}{\vee} e^n_{l_{n,\sigma'}}} = \eta$$

$$\overline{\eta}_{/ \underset{\sigma \in \sum_n}{\vee} e^n_{z_{n,\sigma}}} = \eta \vee \alpha_{h_n}$$

où l'application $\eta \vee \alpha_{h_n}$ est définie comme suit:

L'existence de l'homomorphisme h_n nous permet de définir, à homotopie près, une application:

$$\alpha_{h_n} : \bigvee_{\sigma \in \sum_n} e^n_{z_{n,\sigma}} \to Y^{n-1} \subset Y^n$$

en posant $[\alpha_{h_n}(e^n_{z_{n,\sigma}})] = -h_n(z_{n,\sigma})$.

Puisque η est une application n-diagonale donc elle applique les cellules de dimension n de X^n sur les cellules de dimension n de Y^n ce qui nous permet de définir l'application:

$$\eta \vee \alpha_{h_n} : \bigvee_{\sigma \in \sum_n} e^n_{z_{n,\sigma}} \to Y^{n-1} \vee \bigvee_{\sigma' \in \sum'_n} e^n_{z'_{n,\sigma'}}.$$

De sorte que l'homomorphisme $\pi_n(\overline{\eta}) : \pi_n(X^n) \to \pi_n(Y^n)$, induit par η, satisfait la relation:

$$\pi_n(\overline{\eta}) = \pi_n(\eta) - h_n j_n.$$

Reste maintenant a définir $\overline{\eta}$ sur les cellules de dimension $n+1$.

A cet effet, représentons X^{n+1} en fonction de son n-squelette X^n et de ses cellules de dimension $n+1$:

$$X^{n+1} = X^n \vee \bigvee_{\sigma \in \sum_{n+1}} e^{n+1}_{z_{n+1,\sigma}} \vee \bigvee_{\sigma' \in \sum'_{n+1}} e^{n+1}_{l_{n+1,\sigma'}}$$

On définit $\overline{\eta}$ par ses restrictions en posant :

$$\overline{\eta}_{/_{\bigvee_{\sigma \in \sum_{n+1}} e^{n+1}_{z_{n+1,\sigma}}}} = \alpha_{\xi_{n+1}}$$

$$\overline{\eta}_{/_{\bigvee_{\sigma' \in \sum'_{n+1}} e^{n+1}_{l_{n+1,\sigma'}}}} = \alpha_{\lambda_{n+1}}$$

où l'application:

$$\alpha_{\xi_{n+1}} : \bigvee_{\sigma \in \sum_{n+1}} e^{n+1}_{z_{n+1,\sigma}} \to Y^{n+1}$$

est définie, à homotopie près, par la relation:

$$[\alpha_{\xi_{n+1}}(e^{n+1}_{z_{n+1,\sigma}})] = \xi_{n+1}(z_{n+1,\sigma})$$

et où l'application:

$$\alpha_{\lambda_{n+1}} : \bigvee_{\sigma' \in \sum'_{n+1}} e^{n+1}_{l_{n+1,\sigma'}} \to Y^{n+1}$$

est définie à homotopie près et vérifiant la relation:

$$[\alpha_{\lambda_{n+1}}(e^{n+1}_{l_{n+1,\sigma'}})] = \lambda_{n+1}(l_{n+1,\sigma'}).$$

Enfin, d'après la construction de l'application $\overline{\eta}$, il est clair que celle-ci est une application $(n+1)$-diagonale et que l'homomorphisme gradué, induit par $\overline{\eta}$ en homologie, $H_*(\overline{\eta}) : H_*(X^{n+1}, \mathbb{Z}) \to H_*(Y^{n+1}, \mathbb{Z})$ vérifie les relations (3.8) $\square$

4. La catégorie Γ-Système :

4.1. Notion de Γ-système :

En gros, la catégorie Γ-système est la catégorie dont les objets sont les suites exactes longues qui sont condidates a être les suites exactes de Whitehead associées aux CW-complexes.

Soit donné un groupe abélien gradué $(H_n)_{n\geqslant 2}$ et *soit* (C_*, d) *un complexe de chaîne vérifiant* $H_*(C_*, d) = H_*$.

Dfinition 6. *Un* Γ*-système est la donnée d'un triplet* $(H_n, b_{n+2}, \pi_n)_{n\geqslant 2}$ *où, pour tout* $n \geqslant 2$, (b_{n+2}, π_n) *est un couple adapté (voir la définition (4)) au CW-complexe* X^n *qui est construit apartir de* $X^2 = \bigvee_{\alpha\in\wedge} S^2_{C_\alpha}$ *, où* $(C_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ *est une base du groupe abélien libre* C_2 *et les paires* $(b_{k+1}, \pi_k)_{2\leqslant k\leqslant n-1}$ *selon le théorème (5).*

Explicitement on commence par prendre $X^2 = \bigvee_{\alpha\in\wedge} S^2_{C_\alpha}$, selon le théorème (5) le couple adapté (b_4, π_3) nous permet d'attacher des 3-cellules à l'espace X^2 en donnant l'espace X^3 et ainsi de suite...

Supposons maintenant avoir construit un CW-complexe X^n par le procédé inductif précédent, alors (b_{n+2}, π_{n+1}) est un couple adapté à l'espace X^n, permettant donc d'attacher à celui-ci des $(n + 1)$-cellules pour obtenir l'espace X^{n+1} toujours selon le théorème (5).

Ainsi l'itération de ce procédé nous permet de construire un CW-complexe X ayant la propriété suivante:

pour tout $n \geqslant 2$ on a:

$$\Gamma_n(X) = (C_*, X^n, b_{n+1}, \pi_n).$$

Dfinition 7. *Le CW-complexe construit précédement est dit espace associé au* Γ*-système* $(H_n, b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$.

Notons que X n'est pas unique mais nous montrerons ultérieurement qu'il l'est à homotopie près.

4.2. Notion de Γ-morphisme

Soient $(H_n, b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$, $(H'_n, b'_{n+2}, \pi'_{n+1})_{n\geqslant 2}$ deux Γ-systèmes et soit $f_* : H_* \to H'_*$ un homomorphisme de groupes abéliens. On dit que f_* est un Γ-morphisme si f_* satisfie les conditions inductives suivantes:

soient X et Y deux CW-complexes associés respectivement aux deux Γ-systèmes donnés. En vertu du théorème de classification des homotopies [**16**] et [**17**], il existe une transformation de chaîne $\xi_* : (C_*, d) \to (C'_*, d')$ vérifiant $H_*(\xi_*) = f_*$. Commençons par considérer l'application continue:

$$\alpha^2 : X^2 = \bigvee_{\alpha\in\wedge} S^2_{C_\alpha} \to Y^2 = \bigvee_{\alpha\in\wedge'} S^2_{C'_\alpha}$$

définie, à homotopie près, par la relation:

$$H_2(\alpha^2) = \xi_2\ .$$

Si (ξ_*, α^2) est un morphisme dans la catégoie $\mathbf{H}_2^3$, alors α^2 est 2-diagonale (par construction) par suite le théorème (6) nous permet de construire une application continue, 3-diagonale, $\alpha^3 : X^3 \to Y^3$.

Supposons maintenant avoir construit une application continue, n-diagonale, $\alpha^n : X^n \to Y^n$ via le procédé décrit ultérieurement et vérifiant la relation:

$$H_i(\alpha^n) = f_i \text{ for all } i \leqslant n.$$

Si (ξ_*, α^n) est un morphisme dans $\mathbf{H}_n^{n+1}$, alors le théorème (6) nous permet donc de construire une application continue, $(n+1)$-diagonale, $\alpha^{n+1} : X^{n+1} \to Y^{n+1}$ vérifiant:

$$H_i(\alpha^{n+1}) = f_i \text{ for all } i \leqslant n+1.$$

Ainsi en itérant ce procédé pour tout $n \geqslant 2$, on construit une application continue $\alpha : X \to Y$ ayant les propriétés suivantes:

1- $H_i(\alpha^n) = f_*$.

2- Pour tout $n \geqslant 2$, (ξ_*, α^n) est un morphisme dans la catégorie $\mathbf{H}_n$.

3- Pour tout $n \geqslant 2$, α^n est n-diagonale.

Dfinition 8. *Un homomorphisme gradué $f_* : H_* \to H_*^{'}$ vérifiant les conditions inductives précédentes pour tout $n \geqslant 2$, est appelé un Γ-morphisme. L'application cellulaire α construite précédement est dite application associée au Γ-morphisme f_*.*

Remarque 7. *Il est clair que l'application associée au Γ-morphisme f_* est un morphisme dans $\mathbf{\Gamma CW}_1$.*

4.3. La catégorie $\Gamma-$Système

Dfinition 9. *La catégorie Γ-***Système** *est définie comme suit:*

Objets: *se sont les Γ-systèmes de la définition (6)*

Morphisms: *se sont les $\Gamma-$ morphismes de la définition (8).*

4.4. Le foncteur Γ

Rappellons que nous avons défini $\mathbf{\Gamma CW}_1$ comme étant la sous-catégorie de $\mathbf{CW}_1$ dont les morphisms sont les applications cellulaires $\alpha : X \longrightarrow Y$ satisfaisant la condition suivante:

pour tout $n \geqslant 2$:

$$[\overline{\gamma_n^\alpha} \circ \varphi_n] = [\varphi_n^{'} \circ \xi_{n+1}] \text{ in } \mathrm{Ext}(H_{n+1}(X,\mathbb{Z}), \mathrm{Coker} b_{n+2}^{'}). \tag{4.1}$$

On définit le foncteur $\Gamma : \mathbf{\Gamma CW}_1 / \simeq \to \mathbf{\Gamma}$**-Système** en posant:

$$\Gamma(X) = (H_n(X,\mathbb{Z}), b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$$
$$\Gamma(\{\alpha\}) = H_*(\alpha)$$

où le Γ-*système* $(H_n(X,\mathbb{Z}), b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$ est donné par la suite exacte de Whitehead associée au CW-complexe X (voir la définition du foncteur Γ_n dans la section 3). Rappellons que la condition (4.1) implique que l'homomorphisme gradué $H_*(\alpha)$ est un Γ-morphisme.

4.5. Propriétés du foncteur Γ

Nous commençons par la proposition suivante:

Proposition 2. *Soient X et Y deux objets dans $\mathbf{CW}_1$. Si les deux Γ-systèmes $(H_n(X,\mathbb{Z}), b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$ et $(H_n(Y,\mathbb{Z}), b'_{n+2}, \pi'_{n+1})_{n\geqslant 2}$ qui sont associés respectivement à X et Y sont isomorphes dans leur catégorie alors les deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie.*

Preuve. Soit $f_* : (H_n(X,\mathbb{Z}), b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2} \longrightarrow (H_n(Y,\mathbb{Z}), b'_{n+2}, \pi'_{n+1})_{n\geqslant 2}$ un isomorphisme dans **Γ-Système** et soit $\alpha : X \longrightarrow Y$ l'application associée au Γ-*morphisme* f_* (voir la définition (8)). Puisque $H_*(\alpha) = f_*$ alors la preuve découle du théorème de Whitehead □

En suivant H.J. Baues dans [**5**], soient **A** et **B** deux catégories et soit $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur .

On dit que le foncteur F est un “ detecting functor ” si les conditions suivantes sont vérifiées :

1 - Un morphisme $\alpha : A_1 \to A_2$ dans la catégorie **A** est un isomorphisme si et seulement si $F(\alpha) : F(A_1) \to F(A_2)$ l'est dans la catégorie **B.**

2 - Pour tout objet B dans **B** il existe un objet A dans **A** tel que $F(A) = B$.

3 - Soient A_1 et A_2 deux objets dans **A** et soit $\beta : F(A_1) \to F(A_2)$ un morphisme dans **B**, alors il existe un morphisme $\alpha : A_1 \to A_2$ vérifiant $F(\alpha) = \beta$.

Nous abordons maintenant l'étude du foncteur $\Gamma : \Gamma\mathbf{CW}_1/_{\simeq} \to$**Γ-Système** et nous montrons que celui-ci satisfait toutes les propriétés qui définissent un “detecting foncteur ”.

Théorème 7. *Une application cellulaire est une équivalence d'homotopie dans $\Gamma\mathbf{CW}_1$ si et seulement si son image par le foncteur Γ est un isomorphisme dans* **Γ-Système.**

Preuve. Soit $\{\alpha\} : X \to Y$ un morphisme dans la catégorie $\mathbf{CW}_1/_{\simeq}$. Si $\alpha : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie alors il vient que $\Gamma(\{\alpha\}) = H_*(\alpha) : H_*(X,\mathbb{Z}) \to H_*(Y,\mathbb{Z})$ est un isomorphisme dans la catégorie **Γ-Système**.

Inversement si $\Gamma(\{\eta\})$ est un isomorphisme dans **Γ-Système** alors:

$$H_*(\eta) : H_*(X,\mathbb{Z}) \to H_*(Y,\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme de groupes abéliens gradués et le théorème de Whitehead nous permet donc de conclure □

Théorème 8. *A tout Γ-système $(H_n, b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$ peut-être associé un CW-complexe X vérifiant:*

$$\Gamma(X) = (H_n, b_{n+2}, \pi_{n+1})_{n\geqslant 2}$$

Preuve. Il suffit de prendre un CW-complexe associé au Γ-système donné (voir la définition (7)) □

Théorème 9. *A tout Γ-morphisme $f_* : (H_*, b_{n+1}, \pi_n)_{n\geqslant 3} \to (H'_*, b'_{n+1}, \pi'_n)_{n\geqslant 3}$ peut-être associé un morphisme $\alpha : X \to Y$ dans $\Gamma\mathbf{CW}_1$ vérifiant:*

$$\Gamma(\{\alpha\}) = f_* = H_*(\alpha)$$

Preuve. Il suffit de prendre l'application associée au Γ-morphisme (voir la définition (8)) $\square$

En résumant toutes ces propriétés du foncteur Γ on obtient le théorème suivant:

Théorème 10. *Le foncteur Γ est un " detecting functor ".*

Comme corollaire du théorème (10), nous déduisons le résultat suivant:

Théorème 11. *(Théorème de classification dans la catégorie $\Gamma\mathbf{CW}_1/\simeq$)*

Théorème 12. *Les types d'homotopie dans la catégorie $\Gamma\mathbf{CW}_1$ sont en bijection avec les classes d'isomorphisme dans la catégorie Γ-***Système**.

La proposition suivante nous permet d'identifier la sous-catégorie $\mathbf{\Gamma CW}_1$ à la catégorie $\mathbf{CW}_1$.

Proposition 3. *Soient X et Y deux CW-complexes simplement connexes et soient:*

$$\cdots \to H_{n+1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{b_{n+1}} \Gamma_n \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} H_n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \to H_{n+1}(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{b'_{n+1}} \Gamma'_n \longrightarrow \pi_n(Y) \xrightarrow{h'_n} H_n(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

leurs suites exactes de Whitehead respectives. Si:

$$\mathrm{Ext}(\frac{\mathrm{H_n(X,\mathbb{Z})}}{\ker \mathrm{b_n}}, \mathrm{Coker} b'_{\mathrm{n+1}}) = 0 \quad \textit{pour tout } \mathrm{n} \geqslant 2 \tag{4.2}$$

alors la condition (4.1) est vérifiée.

Preuve. De la suite exacte courte suivante et en vertu du second théorème d'isomorphisme des groupes:

$$\ker \beta_n \overset{i}{\rightarrowtail} \ker d_n \twoheadrightarrow \frac{\ker d_n}{\ker \beta_n} \cong \frac{H_n(X,\mathbb{Z})}{\ker b_n}$$

on deduit que:

$$\mathrm{Ext}(\frac{H_n(X,\mathbb{Z})}{\ker b_n}, \mathrm{Coker} b'_{n+1}) = \frac{\mathrm{Hom}(\ker \beta_n, \mathrm{Coker} b'_{n+1})}{i^*(\mathrm{Hom}(\ker d_n, \mathrm{Coker} b'_{n+1}))} = 0. \tag{4.3}$$

En vertu de la remarque (4) on sait que l'homomorphisme $\overline{\gamma_n^\eta} \circ \varphi_n - \varphi'_n \circ \xi_{n+1}$ peut-être prolonger à $\ker \beta_n$, d'où la relation (4.3) implique que l'homomorphisme $\overline{\gamma_n^\eta} \circ \varphi_n - \varphi'_n \circ \xi_{n+1}$ peut-être aussi prolonger à $\ker d_n$. Par conséquent la relation (4.2) implique la condition (4.1) $\square$

Corollaire 1. *Si la relation (4.2) est satisfaite alors nous avons:*

$$\mathbf{CW}_1 = \mathbf{\Gamma CW}_1$$

Ce corollaire nous permet donc d'énoncer le résultat essentiel de ce travail:

Théorème 13. *Si la relation (4.2) est satisfaite alors deux CW -complexes simplement connexes ont le même type d'homotopie si et seulement si leurs suites exactes de Whitehead sont isomorphes.*

Preuve. Il suffit de remarquer que deux Γ-*systèmes* sont isomorphes dans leur catégorie si et seulement si les suites exactes de Whitehead associées aux CW-complexes, qui sont associés aux Γ-*systèmes* donnés, sont isomorphes.

Exemple: Il existe un seul type d'homotopie d'un CW-complexe X simplement connexe dont l'homologie singulière est donnée par les relations:

$$\begin{aligned} &H_2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p \ , \ H_3(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_q, \\ &H_4(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_s, \ H_i(X,\mathbb{Z}) = 0 \quad i \geqslant 5 \end{aligned}$$

où les entiers p, q et s dont premiers entre eux. En effet le calcul montre que:

$$\mathrm{Hom}(H_4(X,\mathbb{Z}), \Gamma(H_2(X,\mathbb{Z}))) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}_p) = 0$$

car d'après les relations (2.3) on a

$$\Gamma(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p = 0.$$

On déduit donc que l'homomorphisme b_4 est nul. D'où $\mathrm{Coker} b_4 = \Gamma(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ et par suite il vient que:

$$\mathrm{Ext}(H_3, \mathrm{Coker} b_4) = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p) = 0$$

ce qui implique que l'extension π_3 est nulle.

En conclusion il existe donc qu'un seul Γ-système $(H_*, 0, 0)$ d'où d'après le théorème (4.6) il existe un seul type d'homotopie de tel espace.

References

[1] J. F. Adams et P. J. Hilton, *On the chain algebra of a loop space,* Comm. Math. Helv. 30. 1955. p 305-330.

[2] D.J. Anick, *Hopf algebras up to homotopy,* J. Amer. Math. soc, 2(3): 417-452, 1989.

[3] D.J. Anick, *An R-local Milnor-Moore Theorem,* Advances in Math, 77: 116-136, 1989.

[4] H.J. Baues, *Homotopy Type and Homology,* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 1996, 496p.

[5] H.J. Baues, *Algebraic homotopy*, Cambridge studies in advanced mathematics 15, 1989.

[6] H.J. Baues, *Combinatorial foundation of homology and homotopy,* Springer Monographs in Math. Springer, Berlin, 1999, 362p.

[7] H.J. Baues, *On the (n-2)-type of an (n-1)-connected complex (n+4),* Pro. of the London Math. Soc. 4 (3) (1994) 1-23.

[8] H.J. Baues and Y. Drozd, *Representation theory of homotopy types with at most two non trivial homology groups,* Preprint Max-Planck-Institut Für Math. 1998.

[9] H.J. Baues and Y. Drozd, *The homotopy classification of (n-1)-connected (n+4)-dimentional polyhedra with torsion free homology,* $n \geqslant 5$, Preprint Max-Planck-Institut Für Math. 1998.

[**10**] H.J. Baues and M. Hennes, *The homotopy classification of (n-1)-connected (n+3)-dimentional polyhedra,* $n \geqslant 4$, Topology 30, 373-408, 1991.

[**11**] H.J. Baues, J.M. Lemaire, *Minimal models in homotopy theory,* Math. Ann. 225 (1977) 219-242.

[**12**] M. Benkhalifa, *Modèles algebriques et suites exactes de Whitehead,* PhD thesis, Université de Nice France. 1995.

[**13**] S.C. Chang, *Homotopy invariants and continuous mappings*, Proc. R. Soc. London. Ser A 202, 253-263, 1950.

[**14**] S.C. Chang, *Homotopy invariants and continuous mappings*, Proc. R. Soc. London. Ser A 202, 253-263, 1950

[**15**] H.W. Henn, *Classification of p-local low dimensional spectra,* Pure and appl. Algebra 45, 45-71, 1987.

[**16**] P.J. Hilton and U. Stammbach, *A course inHomological Algebra,* Springer GTM 4. New York, 1971.

[**17**] S. Mac Lane, *Homology,* Springer, 1967.

[**18**] D. Quillen, *Rational homotopy*, Ann. of Math. 90:205-295,1969.

[**19**] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. I.H.E.S. 47, 269-331, 1977

[**20**] H. M. Unsold, *On the classification of spaces with free homology,* Dissertation Freie Universitat Berlin, 1987.

[**21**] J.H.C. Whitehead, *A certain exact sequence*, Ann. Math, 52:51-110, 1950.

[**22**] J.H.C. Whitehead, *The homotopy type of a special kind of polyhedron*, Ann. Soc. Polon. Math. 21, 176-186, 1948.

This article may be accessed via WWW at http://www.rmi.acnet.ge/hha/
or by anonymous ftp at
ftp://ftp.rmi.acnet.ge/pub/hha/volumes/2003/n1a6/v5n1a6.(dvi,ps,pdf)

Mahmoud Benkhalifa `makhalefah@kku.edu.sa, hasy_dz@yahoo.fr`

Department of Mathematics,
Faculty of sciences,
King Khalid University,
P.O Box 9004, Abha,
SAUDI ARABIA.