Seminar Sophus Lie
1 (1991) 3–21

Eine Einführung in die Theorie der Quantenmatrixgruppen

Konrad Schmüdgen

Quantengruppen - das ist ein neues Gebiet der Mathematik und der mathematischen Physik, das sich erst im letzten Jahrzehnt herausgebildet hat. Pionierarbeiten haben dabei vor allem V. G. Drinfeld, M. Jimbo, S. L. Woronowicz, die Leningrader Schule (L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, N. Reshetikhin, L. Takhtajan) und Yu. I. Manin geleistet. Einen guten Überblick über die rapide wachsende Zahl relevanter Publikationen und über die Vielfalt von Querverbindungen zu anderen Gebieten gibt die Bibliographie von T. Koornwinder [4].

Der folgende Artikel ist die Ausarbeitung von 2 Vorträgen des Autors über Quantenmatrixgruppen im Seminar „Lie-Theorie und Anwendungen". Die Abschnitte 1 und 2 geben eine an typischen Beispielen orientierte elementare Einführung. Abschnitt 2 folgt weitgehend Manin [6]. Die Abschnitte 3 und 4 haben die Woronowiczsche Theorie kompakter Quantenmatrixgruppen zum Inhalt. Bis auf den in 4. angedeuteten Zusammenhang zur Theorie orthogonaler Polynome geht hier alles auf die fundamentale Arbeit von Woronowicz [8] zurück. In Abschnitt 5 skizzieren wir einige Probleme, die bei der Konstruktion von C*–Algebren nichtkompakter Quantenräume auftreten. Grundlage bilden hierbei Untersuchungen von van Daele [2] zur Quantenversion der $ax + b$-Gruppe.

Hopfalgebren

Vom mathematischen Standpunkt sind Quantengruppen (gewisse) Hopfalgebren. Wir führen diesen grundlegenden Begriff anhand eines wichtigen und typischen Beispiels ein.

a.) *Ein Beispiel: Die Koordinatenalgebra $K(G)$*

G sei eine (multiplikative) Halbgruppe mit Einselement I (Einheitsmatrix) in $M_n(\mathbb{C})$.

Für $g = [a_{ij}] \in G$ und $i, j = 1, ..., n$ sei $f_{ij}(g) := a_{ij}$, d.h. f_{ij} ist die (i, j)-te Koordinatenfunktion auf G. $A := K(G)$ sei die von den Funktionen f_{ij} und der Funktion 1 erzeugte Algebra von Funktionen auf G. Die Matrizenmultiplikation ergibt

$f_{ij}(gg') = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(g)f_{ki}(g'), g, g' \in G.$

Wir definieren nun Algebrenhomomorphismen $\Delta: A \to A \otimes A$ und $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ durch

$$(1) \qquad \Delta f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} \otimes f_{ki} \text{ und } \varepsilon f_{ij} = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, n.$$

(Homomorphismen bzw. Antihomomorphismen von Algebren sollen bei uns immer die Einselemente erhalten.)

Aus der Assoziativität der Multiplikation von G ergibt sich auf $A \otimes A \otimes A$ die Identität

$$(2) \qquad (\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta.$$

Ebenso folgt aus $g \cdot I = I \cdot g = g$ für $g \in G$ auf $\mathbb{C} \otimes A \cong A \otimes \mathbb{C} \cong A$ die Identität

$$(3) \qquad (\varepsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \varepsilon)\Delta = id.$$

Nach Definition galt:

(4) Δ und ε sind Algebrenhomomorphismen .

G sei jetzt eine Untergruppe der $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Für $f \in A$ sei $\kappa(f)(g) := f(g^{-1}), g \in G$. Weil $det g = 1$ für $g \equiv [a_{ij}] \in G$, gilt $g^{-1} = [p_{ij}(a_{11}, ..., a_{nn})]$ mit gewissen Polynomen p_{ij} ; somit ist $\kappa(f_{ij}) = p_{ij}(f_{11}, ..., f_{nn}) \in A$. Folglich ist κ eine lineare Abbildung von A in A. m bezeichnet die durch $m(a \otimes b) := ab$ definierte lineare Abbildung von $A \otimes A$ in A. Aus $gg^{-1} = g^{-1}g = I$ für $g \in G$ erhalten wir auf A die Identität

$$(5) \qquad m(\kappa \otimes id)\Delta = m(id \otimes \kappa)\Delta = \varepsilon 1.$$

Wir haben damit die Multiplikation der Halbgruppe bzw. Gruppe G und ihre Eigenschaften (Assoziativität, Eins, Inverses) mit Hilfe der Algebra A, den Abbildungen $\Delta, \varepsilon, \kappa$ und deren Eigenschaften (2) - (5)
ausgedrückt.

b.) *Bialgebren und Hopfalgebren*

Definition 1.1. A sei eine komplexe Algebra mit Eins. Wenn es Abbildungen $\Delta : A \to A \otimes A$ und $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (2) - (4) gibt, dann ist A (genauer: das Tripel (A, Δ, ε)) eine *Bialgebra.* Δ heißt dabei die *Komultiplikation* und ε die *Koeins* der Bialgebra.

Definition 1.2. (A, Δ, ε) sei eine Bialgebra. Wenn es eine lineare Abbildung $\kappa : A \to A$ gibt, so daß (5) gilt, dann ist A (genauer: das Quadrupel $(A, \Delta, \varepsilon, \kappa)$) eine *Hopfalgebra.* κ heißt *Antipode* der Hopfalgebra.

Die obigen Überlegungen zeigen damit: Wenn $G \subseteq M_n(\mathbb{C})$ Halbgruppe mit $I \in G$ ist, dann ist $K(G)$ eine Bialgebra. Für jede Untergruppe von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ist $K(G)$ eine Hopfalgebra.

Bemerkung: Noch etwas allgemeiner ist der Begriff der Koalgebra: Dies ist ein komplexer Vektorraum A mit Abbildungen $\Delta : A \to A \otimes A$ und $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$, für die (2) und (3) gelten.

Wir nennen einige allgemeine Fakten. (A, Δ, ε) sei dazu eine Bialgebra.

(i) Wenn A eine Antipode (d.h. eine lineare Abbildung $\kappa : A \to A$, die (5) erfüllt) besitzt, dann ist diese eindeutig bestimmt.

(ii) Eine Antipode κ von A ist ein Antihomomorphismus der Algebra A, d.h. $\kappa(1) = 1$ und $\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a)$ für $a, b \in A$.

(iii) Wenn die Algebra A kommutativ ist (also im Beispiel $K(G)$), dann ist $\kappa^2 = id$. Die Beispiele im nächsten Abschnitt zeigen, daß dies i.a. nicht der Fall ist.

(iv) Für Funktionale $f_1, f_2 \in A'$ (A' ist der Vektorraum der linearen Funktionale auf A) sei $f_1 * f_2$ das durch (6) definierte Funktional aus A' :

$$(f_1 * f_2)(a) := (f_1 \otimes f_2)\Delta a, a \in A. \tag{6}$$

Mit dem Produkt "$*$" ist A' eine Algebra.

Später benötigen wir auch noch folgende

Definition 1.3. Eine *Hopf-$*$-Algebra* ist eine Hopfalgebra $(A, \Delta, \varepsilon, \kappa)$, die zugleich eine $*$-Algebra ist mit der Involution $a \to a^*$, wobei

$$\Delta(a^*) = \Delta(a)^*, \varepsilon(a^*) = \overline{\varepsilon(a)}$$

und $\kappa(\kappa(a)^*)^* = a$ für alle $a \in A$ gilt.

c.) *Komoduln*

Wie in a.) sei G wieder eine Halbgruppe in $M_n(\mathbb{C})$ mit $I \in G$. Wir wollen nun auch den Begriff der Darstellung mit Hilfe der Algebra $A = K(G)$ formulieren. Dazu sei U eine Darstellung von G auf einem Vektorraum V, d.h. U ist Homomorphismus von G in $L(V)$ mit $U(I) = I$. Wir setzen voraus, daß es eine Basis $\{v_i, i \in I\}$ von V gibt, so daß die Matrixelemente von U bzgl. dieser Basis in $K(G)$ liegen. D.h. es ist $U(g)v = \sum_i \varphi_i(g; v)v_i$ mit komplexen Koeffizienten $\varphi_i(g; v)$, wobei $\varphi_i(\cdot; v) \in K(G)$. Wir definieren eine lineare Abbildung [4] $\varrho: V \to V \otimes A$ durch $\varrho(v) := \sum_i v_i \otimes \varphi_i(\cdot; v), v \in V$. Aus $U(gg') = U(g)U(g')$ für $g, g' \in G$ erhält man auf $V \otimes A \otimes A$ die Identität

$$(\varrho \otimes id)\varrho = (id \otimes \Delta)\varrho. \tag{7}$$

Ebenso rechnet sich $U(I) = I$ um zu

$$(id \otimes \varepsilon)\varrho = id. \tag{8}$$

Diese Eigenschaften legen folgende Definition nahe.

Definition 1.4. Ein *Rechtskomodul* für eine Bialgebra (A, Δ, ε) ist ein Paar (V, ϱ), wobei V ein Vektorraum ist und $\varrho : V \to V \otimes A$ eine lineare Abbildung, die (7) und (8) genügt.

Damit haben wir: Ist ϱ die oben mit Hilfe der Darstellung U definierte Abbildung, dann ist das Paar (V, ϱ) ein Rechtskomodul für $K(G)$.

Beispiele von Quantenmatrixgruppen

q sei im folgenden stets eine von Null verschiedene feste komplexe Zahl. $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_r\rangle$ bezeichne die freie Algebra mit Eins von Erzeugenden $x_1,\dots,x_r$ und $(y_1,\dots,y_s)$ sei das von den Elementen $y_1,\dots,y_s$ erzeugte zweiseitige Ideal.

a.) *Die Quantenmatrixalgebra* $M_q(2)$

Definition 2.1. $M_q(2) := \mathbb{C}\langle a,b,c,d\rangle/(ab-qba, ac-qca, cd-qdc, bd-qdb, bc-cb, ad-da-(q-q^{-1})bc)$.

Wir wollen im folgenden in der Bezeichnung nicht zwischen einem Element und seinem kanonischen Bild im Faktorraum unterscheiden. $M_q(2)$ ist somit die freie Algebra mit Eins, die von Elementen a,b,c,d erzeugt wird, die den Relationen

$$(9)\qquad ab = qba, ac = qca, cd = qdc, bd = qdb, bc = cb, ad - da = (q-q^{-1})bc$$

genügen. Wir sehen $M_q(2)$ als Polynomalgebra in den nichtkommutierenden "Koordinaten" a,b,c,d einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

an. Für $q=1$ ist $M_q(2)$ die kommutative Polynomalgebra $\mathbb{C}[a,b,c,d]$, also die Koordinatenalgebra von $M(2,\mathbb{C})$. Die Komultiplikation Δ wird -wie in (1)- mit Hilfe der üblichen Matrizenmultiplikation definiert:

$$\Delta a = a\otimes a + b\otimes c, \Delta b = a\otimes b + b\otimes d,$$
$$\Delta c = c\otimes a + d\otimes c, \Delta d = c\otimes b + d\otimes d.$$

Einfaches Nachrechnen ergibt: Die Elemente $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta d$ erfüllen die Vertauschungsrelationen (9) wie die Elemente a,b,c,d. Daraus folgt unmittelbar, daß sich Δ eindeutig zu einem korrekt definierten Algebrenhomomorphismus von $M_q(2)$ in $M_q(2)\otimes M_q(2)$ fortsetzen läßt. Analog zu (1) definiert man

$$\varepsilon a = \varepsilon c = 1, \varepsilon b = \varepsilon d = 0,$$

und setzt ε zu einem Algebrenhomomorphismus von $M_q(2)$ in $\mathbb{C}$ fort. Man verifiniert leicht: $M_q(2)$ wird eine Bialgebra, die Quantenmatrixalgebra $M_q(2)$.

Nützlich ist häufig folgende Bezeichnung: Ist R ein Ring, dann sei $M_q(2;R)$ die Menge aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

wobei $a,b,c,d\in R$ sind und die Relationen (9) erfüllen.

b.) *Der Quantenraum* $\mathbb{C}_q^2$ *als Rechtskomodul für* $M_q(2)$

Definition 2.2. Wir setzen $\mathbb{C}_q^2 := \mathbb{C}\langle x,y\rangle/(xy-qyx)$. Also ist $\mathbb{C}_q^2$ die freie Algebra mit Eins, die von Elementen x,y erzeugt wird, für die $xy=qyx$ gilt. Für $q=1$ ist $\mathbb{C}_q^2$ die kommutative Polynomalgebra $\mathbb{C}[x,y]$, also die Koordinatenalgebra des Vektorraumes $\mathbb{C}^2$. Im allgemeinen Fall fassen wir $\mathbb{C}_q^2$ als Quantenraum (genauer als dessen Koordinatenalgebra) auf.

Die auf den ersten Blick merkwürdige Struktur der Relationen (9) wird sofort klarer, wenn man—wie im klassischen Fall $q=1$—fordert, daß $M_q(2)$ auf $\mathbb{C}_q^2$ wirken soll. Um das entsprechende Resultat zu formulieren, einige Voraussetzungen:

B sei eine Algebra, die Unteralgebren A und X enthält mit $ax=xa$ für $a\in A$ und $x\in X$. Es seien $a,b,c,d\in A$ und $x,y\in X$. Aus $a_1x^2+a_2xy+a_2y^2=0$ mit $a_1,a_2,a_3\in A$ folge stets $a_1=a_2=a_3=0$. Es sei $xy=qyx$ und $q^2\neq -1$.

(Diese Voraussetzungen sind z.B. erfüllt, wenn $A=M_q(2)$, $X=\mathbb{C}_q^2$ und $B=A\otimes X$ gesetzt wird.)

Wir definieren

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Satz 2.1. *(*KOBYZEV*) $x'y'=qy'x'$ und $x''y''=qy''x''$ genau dann wenn a,b,c,d (7) erfüllen.*

Beweis. $x'y'=qy'x' \quad\Leftrightarrow\quad (ax+by)(cx+dy)=q(cx+dy)(ax+by) \quad\Leftrightarrow$ $(ac-qca)x^2+(bd-qdb)y^2+(ad+q^{-1}bc-qcb-da)xy=0 \quad\Leftrightarrow$

$$ac=qca, bd=qdb, ad-da=qcb-q^{-1}bc. \tag{10}$$

Analog erhält man

$$x''y''=qy''x'' \text{ gdw. } ab=qba, cd=qdc, ad-da=qbc-q^{-1}cb \tag{11}$$

Aus (9) bekommt man sofort (10) und (11) und damit $x'y'=qy'x', x''y''=qy''x''$. Zur umgekehrten Richtung bemerken wir zunächst, daß aus den 3. Gleichungen in (10) und (11) $(q+q^{-1})(cb-bc)=0$ und wegen $q^2\neq -1$ auch $bc=cb$ folgt. Damit reduzieren sich (10) und (11) auf (9). ■

Wir definieren nun die Komodulabbildung $\varphi:\mathbb{C}_q^2\to M_q(2)\otimes\mathbb{C}_q^2$ (siehe Definition 1.4) wie die Wirkung der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{auf den Vektor} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

durch

$$\varphi(x)=a\otimes x+b\otimes y, \varphi(y)=c\otimes x+d\otimes q.$$

Aus Satz 1 folgt sofort $\varphi(x)\varphi(y)=q\varphi(y)\varphi(x)$, d.h. φ läßt sich eindeutig zu einem Algebrenhomomorphismus von $\mathbb{C}_q^2$ in $M_q(2)\otimes\mathbb{C}_q^2$ fortsetzen. Man verifiziert leicht den

Satz 2.2. *$(\mathbb{C}_q^2, \varphi)$ ist ein Rechtskomodul für die Bialgebra $M_q(2)$.* ∎

c.) $\mathrm{SL}_q(2)$

Definition 2.2. R sei ein Ring und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_q(2; R).$$

Das Element

$$\mathrm{Det}_q \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - q^{-1}bc$$

von R heißt *Quantendeterminante der Matrix*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Die Quantendeterminante hat einige interessante Eigenschaften:

(i) Sie kommutiert stets mit den Elementen a, b, c, d.

(ii) Für 2 Matrizen aus $M_q(2; R)$, deren Elemente paarweise miteinander kommutieren, ist die Quantendeterminante des Produkts (dies liegt auch wieder in $M_q(2; R)$) gleich dem Produkt der Quantendeterminanten.

(iii) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^1 c & a \end{pmatrix} = \mathrm{Det}_q \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Definition 2.3. $\mathrm{SL}_q(2) := M_q(2)/(ad - q^{-1}bc - 1)$

Die in 2,a.) erklärten Abbildungen Δ und ε lassen sich eindeutig zu korrekt definierten Algebrenhomomorphismen von $\mathrm{SL}_q(2)$ in $\mathrm{SL}_q(2) \otimes \mathrm{SL}_q(2)$ bzw. von $\mathrm{SL}_q(2)$ in $\mathbb{C}$ fortsetzen. (Für Δ wird (ii) benutzt.) Durch (12) motiviert, definieren wir

$\kappa(a) = d, \kappa(b) = -qb, \kappa(c) = -q^{-1}c, \kappa(d) = a.$

und setzen κ zu einem Antihomomorphismus der $\mathrm{SL}_q(2)$ fort.

Damit wird $\mathrm{SL}_q(2)$ eine Hopfalgebra.

d.) $\mathbf{SU}_q(2)$

Klassisch ist

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{c} \\ c & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, C) \right\}.$$

Wir denken uns $\mathrm{SU}_q(2)$ als Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -qc^* \\ c & a^* \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad M_q(2).$$

Genauer: Sei $q \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$a^* = d, b^* = -qc, c^* = -q^{-1}b, d^* = a. \tag{13}$$

Man kann zeigen: (13) läßt sich zu einer korrekt definierten Involution auf der Algebra $\mathrm{SL}_q(2)$ erweitern. Versehen mit dieser Involution wird die Hopfalgebra $\mathrm{SL}_q(2)$ zu einer Hopf-$*$-Algebra; diese nennen wir $\mathrm{SU}_q(2)$. Etwas umformuliert ergibt sich: Die $*$-Algebra $SU_q(2)$ wird von Elementen a und c erzeugt, die folgenden Relationen genügen:

$$a^*a + c^*c = 1, aa^* + q^2c^*c = 1, ac^* = qc^*a, ac = qca, cc^* = c^*c. \tag{14}$$

e.) *Zwei weitere $*$-Algebren*

In b.) hatten wir $\mathbb{C}_q^2 := \mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy - qyx)$ definiert. Sei zunächst $|q| = 1$. Dann kann man durch $x^* = x, y^* = y$ eine Involution auf $\mathbb{C}_q^2$ erklären, mit der $\mathbb{C}_q^2$ eine $*$-Algebra wird. Wir bezeichnen diese mit $\mathbb{R}_q^2$ und fassen sie als Quantenanalogon des $\mathbb{R}^2$ auf. Denn für $q = 1$ ist $\mathbb{R}_q^2$ die Polynomalgebra in 2 hermitischen kommutierenden Unbestimmten x und y, also die Koordinatenalgebra des $\mathbb{R}^2$.

Sei jetzt $q \in \mathbb{R}$. Durch $x^* := y, y^* := x$ erhält man eine korrekt definierte Involution auf $\mathbb{C}_q^2$. Die Algebra $\mathbb{C}_q^2$ wird damit eine $*$-Algebra, die wir mit $\mathbb{C}_q$ bezeichnen und als Quantenversion der komplexen Zahlenebene ansehen wollen. Für $q = 1$ ist nämlich $\mathbb{C}_q$ der Polynomalgebra in einer komplexen Variablen $*$-isomorph ($x \mapsto z$ und $x^* = y \mapsto \overline{z}$).

C*-Algebren kompakter Quantenmatrixgruppen

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurden die Quantengruppen bisher lediglich algebraisch behandelt. Beim Aufbau einer Lie-Theorie auf Matrixgruppen sind aber gerade analytische Methoden (Integration, Differentialrechnung auf Liegruppen, Darstellungstheorie) erforderlich. Der von WORONOWICZ entwickelte C*-Zugang scheint dafür am besten geeignet zu sein. Im Falle einer kompakten Matrixgruppe G wäre dabei die (kommutative) Algebra der stetigen Funktionen auf G die zugrundeliegende C*-Algebra. Als typisches Beispiel einer „echten" Quantengruppe können wir uns immer die $SU_q(2)$ vorstellen.

a.) *Die C*-Algebra der* $\mathrm{SU}_q(2)$

Es sei hier $q \in [-1, 1]$. Nach Definition war $A := \mathrm{SU}_q(2)$ die in 2.d.) eingeführte Hopf-$*$-Algebra. Als $*$-Algebra wird A von Elementen erzeugt, die die Relationen (14) erfüllen.

Wir wollen die $*$-Algebra A durch Operatoren im Hilbertraum darstellen. Zunächst seien a und c Operatoren, die auf einem dichten Teilraum $\mathcal{D}$ eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ definiert sind mit $a\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}, c\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}, a^*\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}, c^*\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, und für die (14) gilt. Für $\varphi \in \mathcal{D}$ haben wir $\| a\varphi \|^2 + \| c\varphi \|^2 = \langle (a^*a + c^*c)\varphi, \varphi\rangle = \langle 1\varphi, \varphi\rangle$; also ist $\| a \| \leq 1$ und $\| c \| \leq 1$.

Daraus folgt: Bei jeder $*$-Darstellung Π der $*$-Algebra A ist für $x \in A$ der Operator $\Pi(x)$ beschränkt und $\| \Pi(x) \| \leq C_x$ mit einer nur von x, nicht aber von Π abhängigen Konstanten C_x. Damit definiert $\| x \|_0 := \sup \| \Pi(x) \|$, $x \in A$, eine C*-Halbnorm auf der $*$-Algebra A. Um zu zeigen, daß $\| \,.\, \|_0$ eine Norm ist, reicht es aus, eine treue $*$-Darstellung Π von A zu finden. Eine solche ergibt sich für $| q | < 1$ (für $q = \pm 1$ sind Modifikationen nötig) im Hilbertraum H mit VNOS $\{e_{nk}; n \in \mathbf{N}_o, k \in \mathbf{Z}\}$ durch die Wirkungen $\Pi(a)e_{nk} := \sqrt{1 - q^{2n}}e_{n-1,k}$ und $\Pi(c)e_{nk} = q^n e_{n,k+1}$. Also ist $\| \,.\, \|_0$ eine C*-Norm auf A. Sei $\mathcal{A}$ die C*-Algebra, die man als Vervollständigung von $(A, \| \,.\, \|_0)$ erhält. Wir haben damit eine C*-Algebra $\mathcal{A}$, die universell für die Relationen (14) ist: Sind $\widetilde{a}$ und $\widetilde{c}$ Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, die (14) erfüllen, dann gibt es (genau) eine $*$-Darstellung Π von $\mathcal{A}$ mit $\Pi(a) = \widetilde{a}$ und $\Pi(c) = \widetilde{c}$.

Wir wollen jetzt die Komultiplikation Δ von A auf ganz $\mathcal{A}$ erweitern. Dazu realisieren wir die C*-Algebra $\mathcal{A}$ als Operatorenalgebra in einem Hilbertraum $\mathcal{K}$. Dann sind $\Delta a = a \otimes a + b \otimes c = a \otimes a + (-qc^*) \otimes c$ und $\Delta c = c \otimes a + d \otimes c = c \otimes a + a^* \otimes c$ beschränkte Operatoren auf $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$, die auch (14) erfüllen. Also existiert wegen der universellen Eigenschaft von $\mathcal{A}$ eine $*$-Darstellung $\widetilde{\Delta}$ von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ mit $\widetilde{\Delta}(a) = \Delta a$ und $\widetilde{\Delta}(c) = \Delta c$. Da natürlich $\widetilde{\Delta}(A) = \Delta(A) \subseteq A \otimes A$, folgt aus der Stetigkeit von $\widetilde{\Delta}$, daß $\widetilde{\Delta}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$, wobei "$\widehat{\otimes}$" die Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ in der Operatorennorm von $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ ist. Wir schreiben jetzt wieder Δ statt $\widetilde{\Delta}$. Δ ist dann $*$-Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$.

Bemerkungen: 1. Die C*-Algebra $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ ist in Wirklichkeit nicht von der speziellen Realisierung von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{K}$ abhängig, denn man kann zeigen, daß $\mathcal{A}$ eine nukleare C*-Algebra ist, also nur eine mögliche C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ existiert.

2. Für verschiedene Zahlen $q \in (-1, 1)$ sind die zugehörigen C*-Algebren $\mathcal{A}$ isomorph (als C*-Algebren, nicht aber als Hopfalgebren). In der Theorie klassischer Liegruppen bedeutet dies aber nur, daß die zugrundeliegenden topologischen Räume homöomorph sind; es bedeutet nicht, daß die entsprechenden Liegruppen isomorph sind.

b) *C*-Algebren kompakter Quantenmatrixgruppen*

Wir geben zuerst folgende abstrakte Definition nach WORONOWICZ.

Definition 3.1. $\mathcal{A}$ sei eine C*-Algebra und $u = (u_{rs})_{r,s=1,\dots,n}$ eine $n \times n$-Matrix von Elementen u_{rs} aus $\mathcal{A}$. Das Paar $(\mathcal{A}, a)$ heißt *kompakte Quantenmatrixgruppe*, wenn folgendes gilt:

(i) Die von den Elementen 1 und $u_{rs}, r, s = 1, \dots, n$, erzeugte $*$-Unteralgebra A von $\mathcal{A}$ ist dicht in $\mathcal{A}$.

(ii) Es gibt einen $*$-Homomorphismus $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ ist die

Vervollständigung von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ in einer C*-Norm) mit

$$\Delta u_{rs} = \sum_{j=1}^{n} u_{rj} \otimes u_{js}, r, s = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

(iii) Es gibt einen Antihomomorphismus der Algebra A in A mit

$$\sum_{j=1}^{n} \kappa(u_{rj}) u_{js} = \sum_{j=1}^{n} u_{rj} \kappa(u_{js}) = \delta_{rs} \cdot 1, r, s = 1, \ldots, n \tag{16}$$

und $\kappa(\kappa(x)^*)^* = x$ für alle $x \in A$.

Zunächst einige erläuternde Bemerkungen zu dieser Definition.

1. $(\mathcal{A}, a)$ sei eine kompakte Quantenmatrixgruppe im Sinne von Definition 3.1. Wir definieren einen $*$-Homomorphismus $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ durch $\varepsilon(u_{rs}) = \delta_{rs}, r, s = 1, \ldots, n$; da u_{rs} und 1 die $*$-Algebra A erzeugen, ist dies möglich. Dann verifiziert man leicht, daß -rein algebraisch - $(A, \Delta, \varepsilon, \kappa)$ eine Hopf-$*$-Algebra nach Definition 1.3. ist.

2. Die Eigenschaft (15) von Δ entspricht der Matrixmultiplikation. (16) drückt aus, daß die Matrix $u = (u_{rs})$ in der Matrixalgebra $M_n(A)$ das Inverse $(\kappa(u_{rs}))$ besitzt.

3. In Definition 3.1. wurde die C*-Algebra $\mathcal{A}$ vorgegeben und in ihr die Hopf-$*$-Algebra A gefordert. In konkreten Fällen hat man aber zuerst die Hopfalgebra oder Hopf-$*$-Algebra A vorgegeben (etwa aus dem Abschnitt 2) und man muß die entsprechende C*-Algebra $\mathcal{A}$, in der A nach (i) dicht liegen soll, erst konstruieren und dann Δ auf $\mathcal{A}$ erweitern.

Beispiel 3.1. $\mathrm{SU}_q(2)$

Sei $\mathcal{A}$ die C*-Algebra der $\mathrm{SU}_q(2)$ aus a.) und $u = (u_{rs})$ die 2×2-Matrix mit $u_{11} = a, u_{12} = -qc^*, u_{21} = c, u_{22} = a^*$. Alle Forderungen von Definition 3.1. sind nach a.) erfüllt, also ist $(\mathcal{A}, u)$ eine kompakte Quantenmatrixgruppe. Außer im Fall $q = 1$ (der der klassischen Gruppe SU(2) entspricht) ist sie nicht kommutativ.

Beispiel 3.2. Kompakte Matrixgruppen

G sei eine kompakte Liegruppe enthalten in $M_n(\mathbb{C})$. $\mathcal{A}$ sei die kommutative C*-Algebra $C(G)$ der stetigen Funktionen auf G, und $u = (u_{rs})_{r,s=1,\ldots,n}$ sei die Matrix der Funktionen $u_{rs} \in C(G)$, wobei $u_{rs}(g) := a_{rs}$ für $g = (a_{ij}) \in G$ ist (man vergleiche Beispiel 1.2.). $(\mathcal{A}, u)$ ist dann eine kompakte Quantenmatrixgruppe. Daß die von u_{rs} und 1 erzeugte $*$-Unteralgebra A dicht in $C(G)$ liegt, folgt sofort aus dem Stone-Weierstraß Theorem. Da $C(G \times G) \cong C(G) \widehat{\otimes} C(G)$, ist durch $(\Delta f)(g, g') := f(g \cdot g')$ ein $*$-Homomorphismus Δ von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$ gegeben. (15) gilt dabei nach (1). Im Falle $G \subseteq \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ ist $\kappa(u_{rs}) = \overline{u_{sr}} \in A$, woraus sofort Bedingung (iii) in Definition 3.1. folgt; im allgemeinen Fall gilt (iii) auch.

Die C*-Algebra $\mathcal{A}$ in diesem Beispiel ist kommutativ. Man kann zeigen, daß jede kompakte Quantenmatrixgruppe mit kommutativer C*-Algebra von der eben beschriebenen Form ist.

c.) *Das Haarfunktional für kompakte Quantenmatrixgruppen*

Ein zentrales Resultat der Theorie kompakter Quantenmatrixgruppen ist folgendes Theorem von WORONOWICZ.

Theorem 3.1. $(\mathcal{A}, u)$ sei eine kompakte Quantenmatrixgruppe. Es gibt einen eindeutig bestimmten Zustand h auf der C*-Algebra $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, daß

$$(h \otimes id)\Delta x = (id \otimes h)\Delta x = h(x)1 \text{ füralle } x \in \mathcal{A}. \tag{17}$$

h ist treu auf A (d.h. aus $h(x^+x) = 0$ und $x \in A$ folgt $x = 0$), und es gilt $h(\kappa(x)) = h(x)$ für $x \in \mathcal{A}$.

Den Zustand h aus Theorem 3.1. nennt man das *Haarfunktional* für die kompakten Quantenmatrixgruppen $(\mathcal{A}, u)$, denn h verallgemeinert das Haarmaß wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.2. (Fortsetzung)

h sei ein Zustand auf der C*-Algebra $\mathcal{A} = C(G)$. Nach dem Riesz-Markov Theorem wird h durch ein positives Borelmaß μ auf G gegeben: $h(f) = \int f\,d\mu$ für $f \in C(G)$. Für $f \in C(G)$ und $g_1, g_2 \in G$ haben wir

$$(h \otimes id)\Delta f = (h \otimes id)f(g_1, g_2) = \int f(g_1, g_2)d\mu(g_1),$$

$$(id \otimes h)\Delta f = (id \otimes h)f(g_1 g_2) = \int f(g_1 g_2)d\mu(g_2)$$

und $h(f)1 = \int f(g)\,d\mu(g)$. Folglich ist (17) erfüllt genau dann, wenn μ links- und rechtsinvariant, also das Haarmaß von G ist. Die Eigenschaft $h(\kappa(x)) = h(x)$ in Theorem 3.1. besagt in unserem Falle gerade $\int f(g)\,d\mu(g) = \int f(g^{-1})\,d\mu(g)$.

Beispiel 3.1. (Fortsetzung)

Sei $q \in (-1, 1), q \neq 0$. Das Haarfunktional h kann man explizit angeben. Man kann zeigen, daß die Elemente $a^k c^r c^{*s}$ und $a^{*j} c^r c^{*s}$, wobei $k, r, s \in \mathbf{N}_o$ und $j \in \mathbf{N}$ sind, eine Vektorraumbasis für A bilden. Da A dicht in $\mathcal{A}$ und h stetig ist, reicht es aus, h für diese Basiselemente anzugeben: Es ist

$$h(c^r c^{*r}) = \frac{1 - q^2}{1 - q^{2r+2}}$$

für $r \in \mathbf{N}_0$. Für die übrigen Basiselemente ist h gleich Null. Unter Verwendung der Vertauschungsrelationen (14) kann man hier die Gleichung (17) für Basiselemente x direkt nachrechnen.

Darstellungstheorie kompakter Quantenmatrixgruppen

In diesem Abschnitt sei $(\mathcal{A}, u)$ stets eine kompakte Quantenmatrixgruppe im Sinne von Definition 3.1. Auch die Symbole $A, u_{ij}, \Delta, \varepsilon$ und κ seien fest. Wir betrachten nur Darstellungen in endlichdimensionalen Vektorräumen. Die im folgenden auftretenden Vektorräume V, V_1, V_2 etc. sind stets endlichdimensional und komplex.

a.) *Zum Begriff der Darstellung*

Definition 4.1. Eine *Darstellung von* $(\mathcal{A}, u)$ *auf einem (endlichdimensionalen) Vektorraum* V ist eine lineare Abbildung $\varrho : V \to V \otimes A$ mit $(id \otimes \Delta)\varrho = (\varrho \otimes id)\varrho$.

Bemerkungen: 1. Wir lassen hier auch „entartete" Darstellungen zu, d. h. solche mit $\varrho(v) = 0$ für $v \neq 0$.

2. Bei WORONOWICZ [8] ist der Darstellungsbegriff noch etwas allgemeiner: Es sind lineare Abbildungen $\varrho : V \to V \otimes \mathcal{A}$ mit $(id \otimes \Delta)\varrho = (\varrho \otimes id)\varrho$. Darstellungen $\varrho : V \to V \otimes A$ heißen bei ihm glatt.

Wir geben jetzt einige Umformulierungen des Darstellungsbegriffes.

Zunächst bemerken wir, daß die Vektorräume $L(V, V \otimes A)$ und $L(V) \otimes A$ kanonisch isomorph sind vermöge folgender Korrespondenz $\widetilde{\varrho} \leftrightarrow \varrho$: Für $\varrho = \sum_k T_k \otimes a_k \in L(V) \otimes A$, wobei $T_k \in L(V)$ und $a_k \in A$, sei $\widetilde{\varrho} \in L(V, V \otimes A)$ durch $\widetilde{\varrho} v := \sum_k T_k v \otimes a_k, v \in V$, erklärt.

Man rechnet sofort um, daß für $\widetilde{\varrho} = \sum T_k \otimes a_k \in L(V) \otimes \mathcal{A}$ die Abbildung $\varrho : V \to V \otimes A$ genau dann eine Darstellung von $(\mathcal{A}, u)$ ist wenn gilt

$$\sum_k T_k \otimes \Delta(a_k) = \sum_{k,l} T_k T_l \otimes a_k \otimes a_l. \tag{18}$$

Wir fixieren jetzt eine Basis von V und bezeichnen mit m_{ij} die entsprechende (i, j)-te Matrixeins aus $L(V)$. D.h. m_{ij} ist die Abbildung aus $L(V)$, die in Matrixdarstellung bezüglich dieser Basis eine 1 hat am Schnittpunkt der i-ten Zeile und j-ten Spalte und sonst nur Nullen. Schreiben wir jetzt $\varrho \in L(V) \otimes A$ in der Form

$$\varrho = \sum_{i,j=1}^{d} m_{ij} \otimes a_{ij}, \tag{19}$$

$d = \dim V$, dann sind die Elemente $a_{ij} \in A$ durch ϱ eindeutig bestimmt. Nach (18) ist ϱ Darstellung genau dann wenn

$$\Delta(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} \otimes a_{ki} \text{ für } i, j = 1, \ldots, d. \tag{20}$$

Die Elemente $a_{ij} \in \mathcal{A}$ heißen dann - in Analogie zum klassischen Begriff - Matrixelemente der Darstellung ϱ. Die Bestimmung von Darstellungen ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung von Matrizen $(a_{ij}) \in M_d(A)$, die (20) erfüllen. Wegen (15) erhält man z.B.eine Darstellung in $V = \mathbb{C}^n$, wenn man $d = n$ und $a_{ij} = u_{ij}$ setzt. Diese Darstellung nennt man die Fundamentaldarstellung von $(\mathcal{A}, u)$.

Sei wieder $\varrho \in L(V) \otimes A$. Für $f \in A'$ sei $\varrho_f := (id \otimes f)\varrho$. Es ist klar, daß $\varrho_f \in L(V)$. Eine kurze Rechnung (basierend auf der Charakterisierung (18)) zeigt, daß ϱ eine Darstellung ist genau dann wenn

$$\varrho_{f_1 * f_2} = \varrho_{f_1}\varrho_{f_2} \text{ für } f_1, f_2 \in \mathcal{A}. \tag{21}$$

Dabei ist $f_1 * f_2$ das durch (6) definierte Produkt der Funktionale f_1, f_2, d. h. $(f_1 * f_2)(a) = (f_1 \otimes f_2)\Delta a$, $a \in A$. Illustrieren wir die eben gegebene Charakterisierung einer Darstellung am

Beispiel 1.2. (Fortsetzung)

Es ist hier $A = K(G)$. Für $g \in G$ sei F_g die Punktevolution an g, d.h. $F_g(a) = a(g)$ für $a \in A$. Für $\varrho \in L(V) \otimes A$ setzen wir $U(g) := \varrho_{F_g}$. Weil offenbar $F_{g_1} * F_{g_2} = F_{g_1 g_2}$ in A' ist, bedeutet (21) für $f_1 = F_{g_1}, f_2 = F_{g_2}$ gerade, daß $U(g_1 \cdot g_2) = U(g_1)U(g_2)$ für $g_1, g_2 \in G$ gilt, also $g \to U(g)$ ein Homomorphismus von G in $L(V)$ ist.

b.) *Nichtentartete Darstellungen*

Wie im klassischen Fall nennt man eine Darstellung $\varrho : V \to V \otimes A$ nichtentartet, wenn $\varrho(v) = 0$ für $v \in v$ nur für $v = 0$ möglich ist. Es gilt nun

Satz 4.1. *Für eine Darstellung $\varrho : V \to V \otimes \mathcal{A}$ sind äquivalent:*

(i) *ϱ ist nichtentartet.*

(ii) *$\varrho_\varepsilon = I$ auf $V \otimes \mathbb{C} \cong V$.*

(iii) *$\widetilde{\varrho}$ ist in $L(V) \otimes A$ invertierbar.* ∎

Zusammen mit der Relation $(id \otimes \Delta)\varrho = (\varrho \otimes id)\varrho$ für die Darstellung ϱ besagt Bedingung (ii), daß (V, ϱ) ein Rechtskomodul für A ist. Die nichtentarteten Darstellungen von $(\mathcal{A}, u)$ sind also genau die Rechtskomodule der Hopfalgebra A nach Definition 1.4.

Ist die Darstellung ϱ im obigen Beispiel unter a.) nicht entartet, dann ist die dortige Abbildung U ein stetiger Homomorphismus von G in $GL(V)$, also eine Darstellung der Liegruppe G. (Die Stetigkeit von U folgt aus der Stetigkeit der Funktionen aus A auf G.)

c.) *Der Intertwining-Raum zweier Darstellungen*

ϱ_1 und ϱ_2 seien Darstellungen von $(\mathcal{A}, u)$ auf V_1 bzw. V_2.

Definition 4.2. Der *Intertwining-Raum* $\mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_2)$ ist die Menge aller linearen Abbildungen $\varphi : V_1 \to V_2$, für die $\varrho_2\varphi = (\varphi \otimes id)\varrho_1$ ist.

Eine nützliche Charakterisierung von $\mathrm{Mor}(\varphi_1, \varphi_2)$ gibt

Satz 4.2. *Für eine lineare Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ sind äquivalent:*

(i) $\varphi \in \mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_2)$.

(ii) $(\varphi \otimes id)\widetilde{\varrho}_1 = \widetilde{\varrho}_2(\varphi \otimes id)$.

(iii) *$\varphi(\varrho_1)_f = (\varrho_2)_f\varphi$ für alle $f \in \mathcal{A}'$.* ∎

d.) *Einige Standardbegriffe der Darstellungstheorie*

Begriffe wie invarianter Teilraum, Unterdarstellung, Irreduzibität und Äquivalenz von Darstellungen überträgt man sofort aus der Darstellungstheorie von Gruppen. Eine Darstellung ϱ auf V heißt irreduzibel, wenn es außer $\{0\}$ und V keinen linearen Teilraum V_1 von V mit $\varrho(V_1) \subseteq V_1 \otimes A$ gibt. Zwei Darstellungen ϱ_1 und ϱ_2 heißen äquivalent, wenn $\mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_2)$ ein invertierbares Element enthält. Man schreibt dann $\varrho_1 \cong \varrho_2$. Aus Satz 4.2. folgt sofort, daß „$\cong$" eine Äquivalenzrelation ist. Völlig analog zum klassischen Fall haben wir

Satz 4.3. *ϱ_1 und ϱ_2 seien irreduzible Darstellungen.*

(i) *Wenn $\varrho_1 \ncong \varrho_2$, dann* $\mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_2) = \{0\}$.

(ii) *Wenn $\varrho_1 \cong \varrho_2$, dann* $\mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_2) = \mathbb{C} \cdot T$ *für ein invertierbares* $T \in \mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_2)$. *Insbesondere,* $\mathrm{Mor}(\varrho_1, \varrho_1) = \mathbb{C} \cdot I$. ∎

Wir definieren jetzt das Tensorprodukt zweier Darstellungen ϱ_1 und ϱ_2 auf V_1 bzw. V_2. Sei etwa $\widetilde{\varrho_1} = \sum_k T_k \otimes a_k \in L(V_1) \otimes A$ und $\widetilde{\varrho_2} = \sum_l S_l \otimes b_l \in L(V_2) \otimes A$. Mit Hilfe von (19) rechnet man sofort nach, daß die Abbildung $\widetilde{\varrho} = \sum_{k,l} T_k \otimes S_l \otimes a_k b_l$ aus $L(V_1 \otimes V_2) \otimes A$ eine Darstellung von (A, u) auf dem Vektorraum $V_1 \otimes V_2$ definiert. Wir bezeichnen diese mit $\varrho_1 \otimes \varrho_2$ und nennen sie das Tensorprodukt von ϱ_1 und ϱ_2.

Für zwei Darstellungen U_1 und U_2 einer Gruppe ist das Tensorprodukt der Darstellungen kommutativ in dem Sinne, daß der Flipoperator $\sigma : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ eine Äquivalenz der Darstellung en $U_1 \otimes U_2$ und $U_2 \otimes U_1$ bewirkt. Diese Eigenschaft gilt hier für beliebige Darstellungen nur noch, wenn die C*-Algebra $\mathcal{A}$ kommutativ ist, d.h. wenn $\mathcal{A} = C(G)$ für eine kompakte Gruppe in $M_n(\mathbb{C})$ ist (Beispiel 3.2.). Dies ist eigentlich auch zu erwarten, denn bei der Definition von $\varrho_1 \otimes \varrho_2$ steht in $\widetilde{\varrho}$ der Term $a_k b_l$, während bei $\varrho_2 \otimes \varrho_1$ der Term $b_l a_k$ vorkommt.

Grundlegend sind auch die Begriffe kontragrediente Darstellung und unitäre Darstellung.

ϱ sei Darstellung von (A, a) auf V mit $\widetilde{\varrho} = \sum T_n \otimes a_n \in L(V) \otimes A$. Wir bezeichnen mit V' den Vektorraum aller linearen Funktionale auf V, mit $\langle v', v \rangle$ den Wert von $v' \in V'$ an $v \in V$ und mit T^t die zu $T \in L(V)$ durch $\langle T^t v', v \rangle := \langle v', Tv \rangle$ definierte lineare Abbildung auf V'. Man verifiziert sofort, daß das Element $\sum_n T_n^t \otimes \kappa(a_n)$ von $L(V') \otimes A$ auch wieder (19) erfüllt, also eine Darstellung von $(\mathcal{A}, u)$ definiert. Wir bezeichnen s ie mit ϱ^c und nennen sie die zu ϱ kontragrediente Darstellung. Symbolisch ist also $\widetilde{\varrho^c} = (t \otimes \kappa)\widetilde{\varrho}$. Da $\widetilde{\varrho^{cc}} = (id \otimes \kappa^2)\widetilde{\varrho}$ und i.a. $\kappa^2 \neq id$ ist, haben wir $\varrho^{cc} \neq \varrho$ i.a. Wenn ϱ nicht entartet ist, gilt aber wenigstens $\varrho^{cc} \cong \varrho$.

Eine Darstellung ϱ von (A, u) auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum V heißt unitär wenn $\widetilde{\varrho}$ ein unitäres Element der $*$-Algebra $L(V) \otimes A$ ist, d.h. es gibt $\widetilde{\varrho}\widetilde{\varrho}^* = \widetilde{\varrho}^*\widetilde{\varrho} = I_V \otimes 1$ in $L(V) \otimes A$. Wie im klassischen Fall erhält man mit Hilfe des Haarfunktionals folgenden

Satz 4.4. *Jede nichtentartete Darstellung von $(\mathcal{A}, u)$ ist äquivalent zu einer unitären Darstellung.* ∎

e.) *Invariante Elemente und Funktionale*

ϱ sei eine Darstellung von $(\mathcal{A}, u)$ auf V. Ein Vektor $v \in V$ heißt ϱ-invariant wenn $\varrho(v) = v \otimes 1$ ist. Ein Funktional $f \in A'$ nennt man ϱ-invariant wenn $v'(\varrho_f) = f(1)v'$ für alle $v' \in V$ ist.

Analog zu kompakten Gruppen erhält man mit Hilfe des Haarfunktionals h von (A, u) eine Projektion auf die ϱ-invarianten Elemente.

Satz 4.5. *$\varrho_h \equiv (id \otimes h)\widetilde{\varrho}$ ist ein Projektor auf den Vektorraum V_{inv} der ϱ-invarianten Elemente von V. Es ist $\varrho_h \in \mathrm{Mor}(\varrho, \varrho)$.* ∎

Um die Anwendung des Haarfunktionals zu illustrieren, geben wir den kurzen Beweis des Satzes 4.5.:

Aus der Eigenschaft (17) des Haarfunktionals h erhalten wir für $f \in A'$ [4]$(f{*}h)(x) = (f \otimes h)\Delta x = (f \otimes id)(id \otimes h)\Delta x = (f \otimes id)(1 \otimes h(x)) = h(x)f(1), x \in A$, also $f * h = f(1)h$. Nach (21) ist damit

$$\varrho_f \varrho_h = \varrho_{f*h} = f(1)\varrho_h. \tag{22}$$

Analog ergibt sich $\varrho_h \varrho_f = f(1)\varrho_h$. Also ist $\varrho_h \in Mor(\varrho, \varrho)$ nach Satz 4.2. Setzt man $f = h$ in (22), so folgt $\varrho_h \cdot \varrho_h = \varrho_h$; also ist ϱ_h ein Projektor.

Sei $v \in \varrho_h(V)$. Dann ist $(id \otimes f)\varrho(v) = \varrho_f v = \varrho_f \cdot \varrho_h v = f(1)\varrho_h v = f(1)v = (id \otimes f)(v \otimes 1)$ für $f \in \mathcal{A}'$. Damit gilt $\varrho(v) = v \otimes 1$. Umgekehrt folgt aus $\varrho(v) = v \otimes 1$ natürlich $\varrho_h v = v$, d.h. $v \in \varrho_h(v)$. D. h. wir haben $\varrho_h(V) = V_{inv}$.

f.) *Harmonische Analyse auf kompakten Quantenmatrixgruppen*

$\widehat{G}$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von irreduziblen Darstellungen von $(\mathcal{A}, u)$. Für jedes $\alpha \in \widehat{G}$ wählen wir eine Darstellung ϱ_α aus α ,V_α sei der Darstellungsraum von ϱ_α und d_α seine Dimension. Nach Satz 4.4 können wir o. B. d. A. annehmen, daß V_α ein endlichdimensionaler Hilbertraum ist und daß ϱ_α unitär ist. Wir wählen eine Orthobasis in V_α und schreiben ϱ_α in der Form (19) mit Matrixeinsen m_{ij} bezüglich dieser Basis:

$$\varrho_\alpha = \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} m_{ij} \otimes a_{ij}^\alpha$$

Im klassischen Fall ($\mathcal{A} = C(G), G$ kompakte Matrixgruppe) ist die Menge $\{d_\alpha^{-1/2} a_{ij}^\alpha;\ \alpha \in \widehat{G},\ i,j = 1, \ldots, d_\alpha\}$ eine Orthonormalbasis in $L^2(G)$. Im allgemeinen Fall gilt zumindest das

Theorem 4.1. (i) *Die Menge $\{a_{ij}^\alpha; \alpha \in \widehat{G}, i,j = 1, \ldots, d_\alpha\}$ ist eine Vektorraumbasis für A.*

(ii) *Es gibt (eindeutig bestimmte) Charaktere f_1 und f_{-1} (d.h. multiplikative lineare Funktionale $f_j \not\equiv 0, j = 1, -1$) der Algebra A, so daß*

$$h(a_{ij}^\alpha (a_{kl}^\beta)^*) = \frac{1}{M_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} f_1(a_{lj}^\alpha) \tag{23}$$

und

$$h((a_{ji}^\alpha)^* a_{lk}^\beta) = \frac{1}{M_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} f_{-1}(a_{lj}^\alpha). \tag{24}$$

für $\alpha, \beta \in \widehat{G}, i, j, k, l = 1, \ldots, d_\alpha$, *wobei* $M_\alpha = f_1(\sum_{i=1}^{d\alpha} a_{ii}^\alpha)$ *ist. Weiter gilt* $f_1(a^*) = \overline{f_{-1}(a)}$ *für* $a \in A$.

Die Gleichungen (23) und (24) verallgemeinern also die Schurschen Orthogonalitätsrelationen für kompakte Gruppen. Für $\mathrm{SU}_q(2)$ ist der Charakter f_1 sogar explizit angebbar: $f_1(a) = q^{-1}$, $f_1(a^*) = q$, $f_1(c) = f_1(c^*) = 0$.

Einige Worte zum Beweisgang der Relationen (23) und (24).

Zunächst sei $\alpha \neq \beta$. Dann ist $\mathrm{Mor}(\varrho_\alpha, \varrho_\beta) = \{0\}$ (Satz 4.3.,(i)). Daraus folgert man, daß jedes invariante Element für $\varrho_\alpha \otimes \varrho_\beta^c$ Null ist; also ist die Projektion $(\varrho_\alpha \otimes \varrho_\beta^c)_h$ (Satz 4.5.) auf die invarianten Elemente Null.

Sei jetzt $\alpha = \beta$. Man zeigt, daß $\varrho_\alpha \cong \varrho_\alpha^{cc}$; also ist $\mathrm{Mor}(\varrho_\alpha, \varrho_\alpha^{cc}) = \mathbb{C} \cdot T_\alpha$. Es ist natürlich $\mathrm{Mor}(\varrho_\alpha, \varrho_\alpha) = \mathbb{C} \cdot I_{V_\alpha}$. Man zeigt, daß $\mathrm{Mor}(\varrho_\alpha, \varrho_\alpha^{cc})$—bei geeigneter Identifikation von $L(V_\alpha, V_\alpha)$ und $(V_\alpha \otimes V_\alpha')'$—genau die invarianten Funktionale für $\varrho_\alpha \otimes \varrho_\alpha^c$ sind. Ebenso entspricht $\mathrm{Mor}(\varrho_\alpha, \varrho_\alpha)$ den invarianten Elementen für $\varrho_\alpha \otimes \varrho_\alpha^c$. Ausrechnen der Projektion auf die invarianten Elemente führt zu $(\varrho_\alpha \otimes \varrho_\alpha^c)_h z = \frac{\mathrm{Tr}\, T_\alpha z}{\mathrm{Tr}\, T_\alpha} I_{V_\alpha}$. Setzt man für z die Matrixeins $m_{lj} \in L(V_\alpha)$ ein und rechnet die Spuren aus ($M_\alpha = \mathrm{Tr}\, T_\alpha, f_1(a_{lj}^\alpha) = \mathrm{Tr}\, T_\alpha m_{lj}$), so erhält man (23).

Die Orthogonalitätsrelationen der Matrixelemente gelten also nur noch in der durch das Auftauchen von f_1 modifizierten Form. Mathematisch ist die Ursache darin zu suchen, daß das Haarfunktional h nicht mehr zentral ist, d.h. es ist i.a. $h(ab) \neq h(ba)$. Das Funktional f_1 beschreibt sogar das Abweichen von der Zentralität von h: es gilt nämlich $h(ab) = h(b\eta(a))$ für $a, b \in A$, wobei $\eta(a)$ das Element $(id \otimes f)\Delta(f \otimes id)\Delta a$ von A ist. (Im Falle einer gewöhnlichen kompakten Matrixgruppe haben wir $(\varrho^\alpha)^{cc} = \varrho^\alpha$, daher $F_\alpha = I, f_1(a_{ij}^\alpha) = \delta_{ij}$ und $f_1 = \varepsilon$, woraus man $\eta(a) = a$ erhält.) Im oben skizzierten Beweis kommt das Abweichen vom Gruppenfall daher, daß ϱ_α und $\varrho_\alpha^{cc} = (id \otimes \kappa^2)\widetilde{\varrho}$ zwar äquivalent, aber wegen $\kappa^2 \neq id$ i.a. nicht gleich sind. Daher ist $\mathrm{Mor}(\varrho_\alpha, \varrho_\alpha^{cc}) = \mathbb{C} \cdot T_\alpha$, wobei i.a. $T_\alpha \neq I$ ist.

g.) *Charaktere*

Definition 4.3. ϱ sei eine Darstellung von $(\mathcal{A}, u)$. Das Element $\chi_\varrho := (Tr \otimes id)\widetilde{\varrho}$ von A heißt *der Charakter von* ϱ.

Ist ϱ in der Form (19), dann ist natürlich $\chi_\varrho = \sum_{i=1}^d a_{ii}$. Den Charakter der Darstellung $\varrho_\alpha, \alpha \in \widehat{G}$, bezeichnen wir mit χ_α.

Satz 4.6. (i) *Für* $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ *und* $f \in \mathcal{A}'$ *gilt*

$$h(\chi_\alpha \chi_\beta^*) = h(\chi_\beta^* \chi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} \cdot 1 \text{ und} \tag{25}$$

$$(id \otimes f)\Delta\chi_\alpha = (f \otimes id)\Delta\chi_\alpha \tag{26}$$

(ii) *Jede unitäre Darstellung* ϱ *von* (A, u) *ist äquivalent zu einer direkten orthogonalen Summe* $\sum_{\alpha \in \widehat{G}} \otimes n_\alpha \varrho_\alpha$, *wobei* $n_\alpha \in \mathbf{N}_0$. *Es gilt dann* $\chi_\varrho = \sum_\alpha n_\alpha \chi_\alpha$ *mit* $n_\alpha = h(\chi_\alpha^* \chi_\varrho)$ *und* $h(\chi_\varrho^* \chi_\varrho) = \sum_\alpha n_\alpha^2$. ∎

Die Formel (25) folgt sofort aus (23) und (24). Da $\Delta\chi_\alpha = \sum_{i,k}^{d\alpha} a_{ik}^\alpha \otimes a_{ki}^\alpha$ ist, haben wir $(id \otimes f)\Delta\chi_\alpha = (f \otimes id)\Delta\chi_\alpha = \sum_{r,s=1}^{d\alpha} f(a_{sr}^\alpha)$, also (26). Aus (ii) erhält man sofort die

Folgerung 4.1. *Zwei unitäre Darstellungen sind äquivalent genau dann, wenn ihre Charaktere gleich sind.* ■

h.) *Das Beispiel* $\mathrm{SU}_q(2)$, $q \in (-1, 1)$

Die $\mathrm{SU}_q(2)$ war und ist das Standardbeispiel bei der Entwicklung der gesamten Theorie der Quantengruppen. Für dieses Beispiel wollen wir $\widehat{G}$ beschreiben und einige allgemeine Resultate illustrieren.

Sei $n \in \frac{1}{2}\mathbf{N}_0$. Für $l \in I_n := \{-n, -n+1, \ldots, n\}$ sei $x_l := a^{n+l}(c^*)^{n-l}$. Aus $\Delta(x_l) = \Delta(a)^{n+l}(\Delta(c)^*)^{n-l} = (a \otimes a - qc^* \otimes c)^{n+l}(c^* \otimes a^* + a \otimes c^*)^{n-l}$ und den Vertauschungsrelationen (14) für a, a^*, c, c^* folgt leicht, daß $\Delta(x_l) = \sum_{k \in In} x_k \otimes w_{kl}$ gilt mit gewissen Elementen $w_{kl} \in A$. Die w_{kl} sind dabei eindeutig bestimmt, denn die x_l sind linear unabhängig. Aus $\sum_k x_k \otimes \Delta(w_{kl}) = (id \otimes \Delta)\Delta x_l = \sum_j \Delta x_j \otimes w_{jl} = \sum_{j,k} x_k \otimes w_{kj} \otimes w_{jl}$ ergibt sich

$$\Delta(w_{kl}) = \sum_j w_{kj} \otimes w_{jl},$$

d. h. die Matrix $(w_{kl})_{k,l \in In}$ erfüllt (20) und definiert daher eine Darstellung in $(2n+1)$-dimensionalen komplexen Vektorraum.

Diese Darstellung ist nicht entartet (Nachrechnen!) und damit äquivalent zu einer unitären Darstellung d_n im $(2n+1)$-dimensionalen Hilbertraum. Man kann zeigen: Die $d_n, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$, sind irreduzibel und ihre Äquivalenzklassen ergeben bereits den gesamten Dualraum $\widehat{G}$. Dabei ergibt $n = \frac{1}{2}$ die Fundamentaldarstellung. In Matrixschreibweise haben wir

$$d_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} a & -qc^* \\ c & a^* \end{pmatrix};$$

folglich ist

$$(d_{\frac{1}{2}})^{cc} = \begin{pmatrix} a & -q^{-1}c^* \\ q^2 c & a^* \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sehen wir, daß $(d_{\frac{1}{2}})^{cc} \neq d_{\frac{1}{2}}$. Man verifiziert sofort, daß $T_{\frac{1}{2}} := \begin{pmatrix} |q|^{-1} & 0 \\ 0 & |q| \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mor}(d_{\frac{1}{2}}, (d_{\frac{1}{2}})^{cc})$ liegt, weshalb $\mathrm{Mor}(d_{\frac{1}{2}}, (d_{\frac{1}{2}})^{cc}) = \mathbb{C} \cdot T_{\frac{1}{2}}$ ist.

Die Matrixelemente a^n_{ij} von d_n (bei geeigneter Basiswahl!) ergeben einen bemerkenswerten Zusammenhang zur Theorie der orthogonalen Polynome, den wir hier nur andeutungsweise nennen wollen. Sie lassen sich mit Hilfe der sogenannten kleinen q-Jacobipolynome $p_k(x; a, b, q)$ ausdrücken (siehe [5]). Es gilt

$$a^n_{ij} = \chi^l_{ij}(a^*)^{i+j} p_{n-i}(cc^*; q^{2(i-j)}, q^{2(i+j)}; q^2)c^{i-j}$$

für $i \geq j \geq -i$ mit gewissen positiven Koeffizienten χ^l_{ij}. Die Formel (25) hat dabei folgende Gestalt

$$h((a^n_{ji})^*(a^m_{lk})) = \delta_{nm}\delta_{jl}\delta_{ik}\frac{q^{2(m-l)}(1-q^2)}{1-q^{2(2m+1)}}.$$

Für $q \to 1$ geht der Quotient auf der rechten Seite gegen $2m+1 = \dim V_m$, d. h. wir erhalten die klassische Schursche Orthogonalitätsrelation für die $\mathrm{SU}(2)$.

Zur Konstruktion von C*-Algebren nichtkompakter Quantenmatrixgruppen

Wenn die Matrixgruppe nichtkompakt ist, dann kann man die Hopfalgebra A ihrer Quantenversion nicht mehr direkt in eine C*-Algebra $\mathcal{A}$ einbetten wie im Beispiel der $\mathrm{SU}_q(2)$ (siehe 3.a), denn die Vertauschungsrelationen für die Generatoren von A führen im Hilbertraum auf unbeschränkte Operatoren. Außerdem können beträchtliche technische Probleme mit den unbeschränkten Operatoren auftreten. Wir skizzieren dies am Beispiel einer Version der $ax+b$-Gruppe und folgen dabei—wie bereits erwähnt—VAN DAELE [2].

Beginnen wir zunächst mit der klassischen $ax+b$-Gruppe. Wir nehmen sie in der Form

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad \alpha > 0, \, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei g als affine Transformation $x \mapsto \alpha^2 x + \alpha\beta$ der reellen Achse wirkt. Für die beiden Koordinatenfunktionen $a(g) := \alpha$ und $b(g) := \beta$ auf G ergeben sich (vgl. 1.a) die Komultiplikation Δ und die Koeins ε zu

$$\Delta a = a \otimes a, \Delta b = a \otimes b + b \otimes a^{-1}, \varepsilon a = 1, \varepsilon b = 0. \tag{27}$$

Als Quantenversion von G stellen wir uns Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

aus $M_q(2)$ vor. Genauer, wir definieren die Algebra $B := M_q(2)/(c, da-1, ad-1)$. In B ist dann $d = a^{-1}$ und $c = 0$. Wir definieren Δ und ε durch (27) und κ durch

$$\kappa a := a^{-1} \text{ und } \kappa b := -q^{-1} b. \tag{28}$$

Man verifiziert leicht: $\Delta, \varepsilon, \kappa$ können auf B fortgesetzt werden und wir erhalten so eine Hopfalgebra. Im Falle $\mid q \mid = 1$ kann man durch $a^* := a, b^* := b$ eine Involution auf der Algebra B definieren und B wird damit eine Hopf-$*$-Algebra.

Im Hinblick auf die folgenden Darlegungen nehmen wir jedoch eine andere Hopf-$*$-Algebra. Wir setzen jetzt $q \in \mathbb{R}, q \neq 0$, voraus. A sei die freie $*$-Algebra mit Eins, die von Elementen a und b erzeugt werden mit

$$ab = qba, a^* = a, bb^* = b^* b. \tag{29}$$

Definieren wir $\Delta, \varepsilon, \kappa$ durch (27) und (28) und setzen Δ und ε zu $*$-Homomorphismen und κ zu einem Antihomomorphismus fort, dann wird A zu einer Hopf-$*$-Algebra.

Um eine zu A assoziierte C*-Algebra $\mathcal{A}$ zu erhalten, betrachten wir Darstellungen von (29) durch Hilbertraumoperatoren. Es seien a und b abgeschlossene Operatoren in einem Hilbertraum mit

$$(30) \qquad a = a^* \geq 0, bb^* = b^*b \text{ und } \ker a = \ker b = \{0\},$$

für die auf einem dichten invarianten Bereich $ab = qba$ gilt.

1. Schritt: Definition der strengen Kommutativität für die Relation $ab = qba$.

Im klassischen Fall $q = 1$ würde man für die Relation $ab = ba$ fordern, daß a und b streng kommutieren, daß also die Spektralprojektoren von a und b kommutieren. Damit werden pathologische Darstellungen („Nelson-Paare") ausgeschlossen. Im allgemeinen Fall kann man wie folgt vorgehen:

Sei $b = u \mid b \mid$die Polarzerlegung des Operators b. Formal folgt aus $ab = qba, a = a^*$ und $q \in \mathbb{R}$ die Relation $b^*a = qab^*$, also $ab^*b = b^*ba$, d.h. $a \mid b \mid^2 = \mid b \mid^2 a$. Dies motiviert die folgende

Forderung 1: Die Spektralprojektoren von a und $\mid b \mid$ kommutieren.
Aus dieser Forderung erhält man wieder formal $a \mid b \mid = \mid b \mid a$ und somit
$u^*ab = u^*au \mid b \mid = u^*(qba) = qu^*u \mid b \mid a = qa \mid b \mid$.
Naheliegend ist damit die

Forderung 2: $u^*au = qa$.

Mit dem durch die Forderungen 1 und 2 definierten Begriff der strengen Kommutativität kommen wir nun zum

2. Schritt: Bestimmung aller streng kommutierenden irreduziblen Darstellungen der Relation $ab = qba$.

Sei etwa $q > 1$. Es sei $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ und $e_n = (\delta_{nm})$ die kanonische Orthobasis von $\mathcal{H}$. Für $\alpha \in [1, q)$ und $\beta > 0$ definieren wir $ae_n = \alpha q^n e_{n+1}$ und $be_n = \beta e_{n+1}, n \in \mathbf{Z}$. Wir erhalten auf diese Weise genau alle irreduziblen streng kommutierenden Darstellungen von $ab = qba$ unter den Bedingungen (30).

Aus den beschränkten Funktionen all dieser Darstellungsoperatoren a und b erzeugt man dann eine C*-Algebra und man nimmt dann deren Multiplieralgebra als C*-Algebra $\mathcal{A}$.

3. Schritt: Definition der Komultiplikation als $*$-Homomorphismus $\Delta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ Da die $*$-Algebra A nicht in der C*-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist, ist dies so zu verstehen, daß das $\Delta : A \to A \otimes A$ etwa durch Erweiterung auf beschränkte Funktionen von a und b stetig auf $\mathcal{A}$ ausgedehnt wird. Man rechnet leicht nach, daß in der $*$-Algebra $A \otimes A$ das Element $\Delta b = a \otimes b + b \otimes a^{-1}$ normal ist, d.h. daß $(\Delta b)^* \Delta b = \Delta b (\Delta b)^*$ ist. Im Hilbertraum ist Δb daher ein formal normaler Operator. Man kann nun aber zeigen, daß für gewisse Paare $\{a, b\}$ aus dem 2. Schritt der Operator Δb keine normalen Erweiterungen (nicht einmal in einem größeren Hilbertraum) besitzt! Damit ist völlig unklar, wie man Δb (etwa durch Funktionalkalkül) in Beziehung zur C*-Algebra $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ bringen kann. Ein (allerdings wenig befriedigender) Ausweg aus diesem Dilemma wäre, solche Paare $\{a, b\}$ wegzulassen. Dann könnte man zumindestens die Komultiplikation Δ auf dem Niveau der C*-Algebren definieren.

Das im 1. Schritt genannte Problem tritt auch bei der Konstruktion der C*-Algebra für verschiedene nicht kompakte Quantenräume auf, etwa für $\mathbb{R}_q^2$. Nach 2.e.) ist $\mathbb{R}_q^2$ die freie $*$-Algebra mit Eins erzeugt von Elementen $x = x^*$ und $y = y^*$, für die $xy = qyx$ gilt. Hierbei ist $\mid q \mid = 1$, etwa $q = e^{i\gamma}$ mit $\gamma \in [0, 2\pi)$. Aus $xq = qyx$ ergibt sich $p(x)y = yp(qx)$ für jedes Polynom p. Naheliegend wäre es deshalb, strenge Kommutativität durch eine Forderung der Form $f(x)y = yf(qx)$ mit geeigneten beschränkten Funktionen f zu definieren. Wenn der Operator x positiv selbstadjungiert ist und $ker\ x = \{0\}$, dann bieten sich die Funktionen $f_t(x) := x^{it}, t \in \mathbb{R}$, an. $f_t(x)y = yf_t(qx)$ führt dann auf $x^{it}y = e^{-\gamma t}yx^{it}, t \in \mathbb{R}$. (Wenn auch noch $y = y^* \geq 0$ und $ker\ y = \{0\}$ ist, dann folgt aus der letzten Gleichung $x^{it}y^{is}x^{-it} = e^{-\gamma its}y^{is}$ für $t, s \in \mathbb{R}$. Für $\gamma = 1$ ist dies die Weylrelation für die unitären Gruppen x^{it} und y^{is}.) Im allgemeinen Fall (d.h. $x = x^*$ und $y = y^*$ beliebig) ist mir keine überzeugende Definition der strengen Kommutativität für $xy = qyx$ bekannt. Es werden nur Arbeiten aufgelistet, die im Text explizit genannt wurden. Eine sehr gute Bibliographie zu Quantengruppen ist [4].

References

[1] Abe, E., "Hopf algebras", Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge Univ. Press, 1977.

[2] Daele, A. Van , "The operator $a \otimes b + b \otimes a^{-1}$ when $ab = \lambda ba$.", Preprint, Leuven, 1990.

[3] Hofmann, K. H., "The duality on compact semigroups and C*-bigebras", Lecture Notes in Mathematics **129**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[4] Koornwinder, T. H., *References on quantum groups*, September 1990.

[5] —, *Representations of the twisted $SU(2)$ quantum groups and some q-hypergeometric orthogonal polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **92** (1989), 97–117.

[6] Manin, Yu. I., "Quantum groups and non-commutative geometry", Publications du C. R. M. **1561**, University of Montreal, 1988.

[7] Sweedler, M. E., "Hopf algebras", Benjamin, New York, 1969.

[8] Woronowicz, S. L., *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613–665.

[9] —, *Twisted* SU(2)*. An example of noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **23** (1987), 117–181.

Sektion Mathematik
Universität Leipzig
Augustus-Platz
O-7010 Leipzig

Received 19. Februar 1991