Seminar Sophus Lie
1 (1991) 55–63

Invariante Kegel in Cartan-Algebren

Ulrike Zimmermann

Für die Bestimmung von Halbgruppen in einer Liegruppe spielen invariante Kegel als deren Tangentialobjekte eine sehr wichtige Rolle. Ein invarianter Kegel in einer Lie-Algebra ist durch seinen Schnitt mit einer Cartan-Unteralgebra eindeutig bestimmt, und diese Schnitte sind im Fall von spitzen und erzeugenden Kegeln vollständig klassifiziert.

Im Folgenden wird die Klassifikation der invarianten Kegel angegeben, wozu als technisches Hilfsmittel die reelle Wurzelzerlegung einer Lie-Algebra bereitgestellt wird. Im zweiten Abschnitt wird die Geometrie dieser Kegel genauer untersucht.

I. Invariante Kegel in Lie-Algebren

Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra. Ein Kegel W in $\mathfrak{g}$ heißt *invariant*, falls er invariant ist unter der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{g}$, d. h. falls für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt: $e^{\operatorname{ad} x} W = W$.

Ohne allzugroße Einschränkung der Allgemeinheit werden nur spitze und erzeugende Kegel betrachtet.

Definition I.1. Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt *kompakt*, falls die Einparametergruppe $e^{\mathbb{R} \operatorname{ad} x}$ in $\operatorname{End} \mathfrak{g}$ relativ kompakt ist. Eine Cartan-Algebra $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ heißt *kompakt eingebettet*, falls sie aus kompakten Elementen besteht. Die Menge der kompakten Elemente in $\mathfrak{g}$ wird mit $\operatorname{comp} \mathfrak{g}$ bezeichnet. ∎

In [2] wird gezeigt, daß kompakt eingebettete Cartan-Algebren abelsch sind, und in [3, 4.6] erhält man

Satz I.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit einem spitzen erzeugenden invarianten Kegel W. Dann enthält $\mathfrak{g}$ eine kompakt eingebettete Cartan-Algebra $\mathfrak{h}$. Der Kegel W ist durch den Schnitt $C := \mathfrak{h} \cap W$ eindeutig bestimmt.* ∎

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung der Struktur von Lie-Algebren mit invarianten Kegeln ist die reelle Wurzelzerlegung. Man erhält sie aus der komplexen Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}$$

mit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid (\forall h \in \mathfrak{h})\,[h,x] = \lambda(h)x\}$ und $\Lambda = \{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}} \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \neq \{0\}\}$, indem man setzt

$$\Omega = \{-i\lambda|\mathfrak{h} \mid \lambda \in \Lambda\}, \quad \mathfrak{g}^{\omega} = \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\lambda}).$$

Wegen $\mathfrak{g}^{\lambda} = \mathfrak{g}^{-\lambda}$ wählt man aus Ω ein sogenanntes positives System Ω^+ aus, d. h. eine Menge $\Omega^+ \subseteq \Omega$, die in einem Halbraum von $\widehat{\mathfrak{h}}$ liegt und für die gilt: $\Omega = \Omega^+ \,\dot\cup\, (-\Omega^+) \,\dot\cup\, \{0\}$. Dazu erhält man eindeutig eine komplexe Struktur $I\colon \mathfrak{h}^+ \to \mathfrak{h}^+$ mit $I^2 = -\mathrm{id}$ und bekommt die reelle Wurzelzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^+ \quad \text{mit} \quad \mathfrak{h}^+ = \bigoplus_{\omega \in \Omega^+} \mathfrak{g}^{\omega},$$

und es gilt $[h,x] = \omega(h)Ix$ für $h \in \mathfrak{h}$ und $x \in \mathfrak{g}^{\omega}$. (Details siehe [3, III.6])

Durch $Q\colon \mathfrak{h}^+ \to \mathfrak{h}$ mit $Q(x) = [Ix, x]$ wird eine quadratische Abbildung definiert. Falls $\mathfrak{g}$ einen invarianten Kegel enthält, gilt $Q(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Man sagt, $\mathfrak{g}$ habe *Kegelpotential*. Die Struktur von Lie-Algebren mit Kegelpotential ist bestimmt in [5].

Es sei $\mathfrak{r}$ das Radikal in $\mathfrak{g}$. Dann existiert nach ([6, Th.3]) eindeutig ein angepaßtes Levikomplement $\mathfrak{s}$ mit $[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}, \mathfrak{s}] = \{0\}$. Es gilt dann $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{r} \oplus \mathfrak{h}) \cap \mathfrak{s}$. Man erhält eine Zerlegung der Menge Ω^+ in $\Omega_R^+ \,\dot\cup\, \Omega_S^+$ durch

$$\Omega_R^+ = \{\omega \in \Omega^+ \mid (\forall x \in \mathfrak{g}^{\omega})\, Q(x) \in \mathfrak{z}\},$$

wobei $\mathfrak{z}$ das Zentrum der Lie-Algebra ist,

$$\Omega_S^+ = \{\omega \in \Omega^+ \mid (\forall x \in \mathfrak{g}^{\omega})\, Q(x) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}\}.$$

Es gibt noch eine weitere Zerlegung der Menge Ω^+. Zu der kompakt eingebetteten Cartan-Algebra $\mathfrak{h}$ existiert eindeutig eine maximal kompakt eingebettete Unteralgebra $\mathfrak{k}(\mathfrak{h})$, die $\mathfrak{h}$ enthält. Falls $\mathfrak{g}$ invariante Kegel enthält, gilt:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}(\mathfrak{h})) \cap \operatorname{int} \operatorname{comp} \mathfrak{g} \not\subseteq \{0\}.$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt dann *quasihermitesch.*

Falls $\mathfrak{g}^{\omega} \cap \mathfrak{k}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ gilt, so folgt $\mathfrak{g}^{\omega} \subseteq \mathfrak{k}(\mathfrak{h})$. Also kann man die Zerlegung $\Omega^+ = \Omega_K^+ \,\dot\cup\, \Omega_P^+$ definieren durch $\Omega_K^+ := \{\omega \in \Omega^+ \mid \mathfrak{g}^{\omega} \subseteq \mathfrak{k}(\mathfrak{h})\}$.

Nun wird noch die Weylgruppe $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ gebraucht. Sie ist die Gruppe, die erzeugt wird von den Reflexionen an den Hyperebenen $\ker \omega$ mit $\omega \in \Omega_K^+$.

Damit hat man die nötigen Strukturelemente zusammen, um die Klassifikation angeben zu können wie sie in [3, III 5.18] bewiesen ist.

Satz I.3. (Hauptsatz über invariante Kegel) *Sei $\mathfrak{h}$ eine kompakt eingebettete Cartan-Algebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Ein spitzer erzeugender Kegel C in $\mathfrak{h}$ ist genau dann die Spur eines spitzen erzeugenden invarianten Kegels W in $\mathfrak{g}$, falls er folgende Bedingungen erfüllt:*

1) *C ist invariant unter der Weylgruppe $\mathcal{W}$.*
2) *Für $x \in \mathfrak{g}^{\omega}$ mit $\omega \in \Omega^+$ gilt: $\omega(C)Q(x) \subseteq C$.* ∎

Führt man nun folgende Menge von Rang-1-Operatoren von $\mathfrak{h}$ ein:

$$\mathcal{C} := \{(\operatorname{ad} x)^2|\mathfrak{h} \mid x \in \mathfrak{g}^{\omega}, \omega \in \Omega_P^+\},$$

so ist Bedingung 2) äquivalent zu

2') *C ist invariant unter $\mathcal{C}$.*

Es gilt nämlich: $(\operatorname{ad} x)^2(h) = [x,[x,h]] = -\omega(h)[x, Ix] = \omega(h)Q(x)$.

II. Invariante Kegel in Konfigurationsräumen $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$

Faßt man zusammen, welche Informationen man über die Struktur von Cartan-Algebren mit invarianten Kegeln hat, so erhält man folgende verallgemeinerte Situation.

Definition II.1. Ein *Konfigurationsraum* sei ein System $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ mit folgenden Eigenschaften: Es sei

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_R \oplus \mathfrak{h}_S$ ein reeller n-dimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$, so daß $\langle \mathfrak{h}_R, \mathfrak{h}_S \rangle = \{0\}$ gilt,

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_k \,\dot\cup\, \mathcal{H}_p$ eine endliche Menge von Hyperebenen durch den Nullpunkt des Vektorraumes $\mathfrak{h}$,

$\mathcal{W}$ die durch die orthogonalen Reflexionen s_H an den Hyperebenen $H \in \mathcal{H}_k$ erzeugte Gruppe,

$\mathcal{C}$ eine Menge von Rang-1-Operatoren in $\mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{H}_p = \{\ker \tau \mid \tau \in \mathcal{C}\},$$

die abgeschlossen ist unter Multiplikation mit positiven reellen Zahlen und für die gilt: $\mathcal{C} \cap -\mathcal{C} = \emptyset$.

Setzt man

$$Z := \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H, \qquad Z_k := \bigcap_{H \in \mathcal{H}_k} H$$

so soll die Bedingung $Z \subseteq \mathfrak{h}_R \subseteq Z_k$ erfüllt sein.
Die Menge der Rang-1-Operatoren werde zerlegt durch

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_s \,\dot\cup\, \mathcal{C}_n \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \tau \in \mathcal{C}_s & \Longleftrightarrow \quad \operatorname{im} \tau \subseteq \mathfrak{h}_S, \\ \tau \in \mathcal{C}_n & \Longleftrightarrow \quad \operatorname{im} \tau \subseteq Z. \end{cases}$$

Setze noch
$$\mathcal{H}_{ps} := \{H \in \mathcal{H}_p \mid \exists \tau \in \mathcal{C}_s \text{ mit } \ker \tau = H\},$$
$$\mathcal{H}_{pn} := \{H \in \mathcal{H}_p \mid \exists \tau \in \mathcal{C}_n \text{ mit } \ker \tau = H\}.$$

Die Menge $\mathcal{C}$ und die Gruppe $\mathcal{W}$ seien dadurch verknüpft, daß $\mathcal{C}$ invariant ist unter Konjugation mit Elementen aus $\mathcal{W}$. ■

Bemerkung II.2. Die Gruppe $\mathcal{W}$ eines Konfigurationsraumes ist eine endliche Coxetergruppe [7, VI.1]. ■

Definition II.3. Unter einem *invarianten Kegel in einem Konfigurationsraum* $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ soll ein spitzer erzeugender Kegel in dem Vektorraum $\mathfrak{h}$ verstanden werden, der invariant ist unter der Coxetergruppe $\mathcal{W}$ und unter der Menge von Rang-1-Operatoren $\mathcal{C}$. ■

Bemerkung II.4. Jede Hyperebene H von $\mathfrak{h}$ wird bestimmt durch einen Normaleneinheitsvektor n_H, der bis auf seine Orientierung eindeutig bestimmt ist, d. h. $H = n_H^\perp = \{ h \in \mathfrak{h} \mid \langle n_H, h \rangle = 0 \} = (-n_H)^\perp$.

Ebenso kann man jedem Operator $\tau \in \mathcal{C}$ zwei Vektoren $n_\tau, Q_\tau \in \mathfrak{h}$ mit $\|n_\tau\| = 1$ zuordnen, so daß $\tau(h) = \langle n_\tau, h \rangle Q_\tau = \langle -n_\tau, h \rangle (-Q_\tau)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ gilt. Auch n_τ und Q_τ sind eindeutig bis auf das Vorzeichen. Dabei gilt $\Omega := \{\pm n_\tau \mid \tau \in \mathcal{C}\} = \{\pm n_H \mid H \in \mathcal{H}_p\}$. Wir schreiben $\tau = Q_\tau \otimes n_\tau$ und haben

$$(Q_\sigma \otimes n_\sigma) \circ (Q_\tau \otimes n_\tau) = Q_\sigma \otimes \langle n_\sigma, Q_\tau \rangle n_\tau.$$

Die Gruppe $\mathcal{W}$ wirkt auf der Menge der der Hyperebenen $\mathcal{H}_p$ und der Menge Rang-1-Operatoren $\mathcal{C}$, und man berechnet:

$$\begin{aligned} w(n_H) &= \pm n_{wH}, \\ w(Q_\tau \otimes n_\tau) w^{-1} &= w(Q_\tau) \otimes w(n_\tau), \\ \text{also} \quad Q_{w\tau w^{-1}} = \pm w(Q_\tau), &\quad n_{w\tau w^{-1}} = \pm w(n_\tau). \end{aligned}$$

Zuerst soll eine Auswahl der Vorzeichen getroffen werden.

Definition II.5. Ein *positives System* ist eine Menge $\Omega^+ = \{ n_H \mid H \in \mathcal{H}_p \}$, so daß $\Omega = \Omega^+ \,\dot\cup\, -\Omega^+$ gilt und Ω^+ in einem offenen Halbraum von $\mathfrak{h}$ liegt. ∎

Zu einem gewählten positiven System Ω^+ werde ein Rang-1-Operatoren $\tau \in \mathcal{C}$ geschrieben als $n_H \otimes Q_\tau$ mit $n_H = n_\tau \in \Omega^+$.

Es wird nun untersucht, unter welchen Voraussetzungen ein Konfigurationsraum $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ invariante Kegel enthält, und, wo sie existieren, werden sie näher bestimmt.

Definition II.6. Der *minimale* und der *maximale Kegel* seien definiert durch

$$C_{\min} = C_{\min}(\Omega^+) := \operatorname{cone}(\{Q_\tau \mid \tau \in \mathcal{C}(\Omega^+)\}),$$

wobei $\operatorname{cone}(X)$ der von einer Menge X erzeugte Kegel ist,

$$C_{\max} = C_{\max}(\Omega^+) := (\Omega^+)^*,$$

wobei $X^* := \{h \in \mathcal{H} \mid (\forall x \in X) \langle h, x \rangle \geq 0\}$ der Dualkegel der Menge X ist. ∎

Satz II.7. (Charakterisierung der Konfigurationsräume mit invarianten Kegeln). *Ein wie oben definierter Konfigurationsraum $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ enthält genau dann einen invarianten Kegel C, wenn es ein positives System $\Omega^+ = \{n_H \mid H \in \mathcal{H}_p\}$ gibt, sodaß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *Für alle $H \in \mathcal{H}_p$ und für alle $\tau \in \mathcal{C}(\Omega^+)$ gilt: $\langle n_H, Q_\tau \rangle \geq 0$.*

(2) *Der von der Menge $\mathcal{Q}_n = \{Q_\tau \mid \tau \in \mathcal{C}_n\}$ erzeugte Kegel ist spitz.*

(3) *Es existiert ein $z \in Z_k \setminus \{0\}$, so daß für alle $n_H \in Q_\tau$ gilt $\langle n_H, z \rangle > 0$.*

Aus Bedingung (1) kann man folgern

Korollar 1. *Falls ein invarianter Kegel C existiert, so gilt für das positive System Ω^+:*

$$C_{\min}(\Omega^+) \subseteq C \subseteq C_{\max}(\Omega^+).$$

Korollar 2. *Das positive System Ω^+ ist so gewählt, daß für alle $w \in \mathcal{W}$, $\tau \in \mathcal{C}$ und $H \in \mathcal{H}_p$ gilt:*

$$Q_{w\tau w^{-1}} = w(Q_\tau), \quad n_{w\tau w^{-1}} = w(n_\tau), \quad n_{wH} = w(n_H).$$

Beweis. 7. **1.Schritt:** Notwendigkeit von Bedingung (1).
Sei C ein invarianter Kegel in $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$. Dieser ist invariant unter $\mathcal{C}$, das bedeutet $\tau(C) = \langle n_\tau, C\rangle Q_\tau \subseteq C$ für alle $\tau \in \mathcal{C}$. Weil C erzeugend ist, gilt $\langle n, C\rangle \neq \{0\}$ für jeden Einheitsvektor n in $\mathfrak{h}$. Die Abbildung $\langle n, \bullet\rangle \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ ist stetig und linear. Damit ist das Bild $\langle n, C\rangle$ eines Kegels C ein Kegel in $\mathbb{R}$, also entweder $\mathbb{R}$ oder $[0, \infty[$ oder $]-\infty, 0]$. Da C spitz ist und $\tau(C) = \langle n_H, C\rangle Q_\tau \subseteq C$ gilt mit $Q_\tau \neq 0$, kann der Fall $\langle n_H, C\rangle = \mathbb{R}$ nicht eintreten. Jedes n_H mit $H \in \mathcal{H}_p$ liegt also in $C^* \cup -C^*$.

Wir setzen nun $\Omega^+ := \Omega \cap C^*$ und zeigen, daß diese Menge ein positives System ist. Der Kegel C^* ist spitz, da C erzeugend ist. Die Menge Ω^+ ist also in einem spitzen Kegel enthalten und damit auch in einem Halbraum von $\mathfrak{h}$. Es gilt $C \cap -C = \{0\}$ und damit $\Omega^+ \cap -\Omega^+ = \emptyset$. Wegen $\Omega \subseteq C^+ \cup -C^*$ haben wir auch $\Omega = \Omega^+ \,\dot\cup\, -\Omega^+$.

2.Schritt: Beweis der Korollare.
Das erste Korollar folgt sofort aus den obigen Rechnungen. Zum Beweis von Korollar 2: Nach Bemerkung II.4 gilt $Q_{w\tau w^{-1}} \otimes n_{w\tau w^{-1}} = w(Q_\tau) \otimes w(n_\tau)$. Wegen $C_{\min} \subseteq C$ liegen $Q_{w\tau w^{-1}}$ und Q_τ in dem spitzen Kegel C. Da C invariant ist unter $\mathcal{W}$, gilt aber auch $w(Q_\tau) \in w(C_{\min}) = C$. Daraus folgen die ersten beiden Behauptungen. Es gilt nun $n_{wH} = \pm w(n_H)$ und mit $n_H = n_\tau$ erhält man $w(n_H) = n_{w\tau w^{-1}} \in \Omega^+$. Also gibt es eine Hyperebene H' mit $n_{H'} = w(n_H)$, und es folgt $H' = wH$.

3.Schritt: Notwendigkeit von Bedingung (2).
Zu gewähltem System Ω^+ sei $\mathcal{Q}_s$ die Menge aller $Q_\tau \in \mathcal{Q}$ mit $\tau \in \mathcal{C}_s$ und $\mathcal{Q}_n$ die Menge der $Q_\tau \in \mathcal{Q}$ mit $\tau \in \mathcal{C}_n$. Nach Definition gilt dann: $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_s \,\dot\cup\, \mathcal{Q}_n$.

Setze $C_{\min,s} := \operatorname{cone}(\mathcal{Q}_s)$ und $C_{\min,z} := \operatorname{cone}(\mathcal{Q}_n)$. Nach Definition von $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ gilt $C_{\min,z} \subseteq Z$. Deshalb heißt $C_{\min,z}$ der *minimale zentrale Kegel.*

Direkt aus den Definitionen ergeben sich dann die folgenden Aussagen:

(i) $C_{\min,s} = C_{\min} \cap \mathfrak{h}_s$.

(ii) $C_{\min,z} = C_{\min} \cap Z$.

(iii) $C_{\min} = C_{\min,s} \oplus C_{\min,z}$.

Das folgende Lemma liefert dann die Behauptung.

Lemma . *Falls ein positives System Ω^+ existiert, sodaß Bedingung* (1) *erfüllt ist, dann ist der minimale Kegel $C_{\min}$ genau dann spitz, wenn der minimale zentrale Kegel $C_{\min,z}$ spitz ist.*

Beweis des Lemmas. Der minimale Kegel ist genau dann spitz, wenn sowohl $C_{\min,s}$ als auch $C_{\min,z}$ spitz sind. Da Bedingung (1) erfüllt ist und $Z \cap \mathfrak{h}_s = \{0\}$ gilt, gibt es zu jedem $0 \neq x \in C_{\min,s}$ ein $\tau \in \mathcal{C}$ mit $\langle n_\tau, x\rangle > 0$, denn x liegt nicht in Z. Wegen der Wahl von Ω^+ kann $-x$ nicht zu $C_{\min,s}$ gehören, das bedeutet aber gerade, daß $C_{\min,s}$ immer spitz ist. ■

4.Schritt: Notwendigkeit von Bedingung (3).
Sei C ein invarianter Kegel in $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$. Nach Definition ist C dann erzeugend und invariant unter $\mathcal{W}$ und es gilt $C \subseteq C_{\max}$. Sei $x \in \operatorname{int} C$. Es gilt dann auch

$$x \in \operatorname{int} C_{\max} = \{h \in \mathcal{H} \mid (\forall H \in \mathcal{H}_p)\ \langle n_H, h\rangle > 0\}.$$

Der durch $z := \frac{1}{|\mathcal{W}|}\sum_{w\in\mathcal{W}} w(x)$ definierte Vektor ist ein Fixpunkt von $\mathcal{W}$. Das ist gleichbedeutend mit $z \in Z_k$. Nun gilt aber für jedes $n_H \in \Omega^+$:

$$\langle n_H, z\rangle = \frac{1}{|\mathcal{W}|}\sum_{w\in\mathcal{W}} \langle n_H, wz\rangle = \frac{1}{|\mathcal{W}|}\sum_{w\in\mathcal{W}} \langle n_{w^{-1}H}, z\rangle > 0,$$

d. h. z liegt in $\operatorname{int} C_{\max}$. Also wurde gezeigt:

$$Z_k \cap \operatorname{int} C_{\max} \not\subseteq \{0\}. \tag{3'}$$

Dies ist aber äquivalent zu (3).

5.Schritt: Die Bedingungen sind auch hinreichend.
Sei nun Ω^+ ein positives System mit (1), (2), (3). Wegen (1) gilt $C_{\min} \subseteq C_{\max}$, (2) bedeutet, daß $C_{\min}$ spitz ist, und aus (3) folgt, daß $C_{\max}$ erzeugend ist. Zu $0 \neq z \in Z_k \cap \operatorname{int} C_{\max}$ wähle man eine kompakte Umgebung $B \subseteq \operatorname{int} C_{\max}$, so daß $0 \notin \operatorname{conv}(\mathcal{W}B) =: K$ gilt. Das ist möglich, da $0 \notin \mathcal{W}z = \{z\}$ und $\mathcal{W}$ eine kompakte Gruppe stetiger Selbstabbildungen von $\mathfrak{h}$ ist. Also ist K kompakt, konvex, invariant unter $\mathcal{W}$, und es gilt $K \subseteq \operatorname{int} C_{\max}$. Setze $C := \mathbb{R}^+K + C_{\min}$. Dann ist C erzeugend, da K innere Punkte hat. Wegen $C_{\min} \subseteq C \subseteq C_{\max}$ ist C invariant unter $\mathcal{C}$ und nach Konstruktion ist C auch invariant unter $\mathcal{W}$. Es bleibt zu zeigen, daß der Kegel C auch spitz ist. Sei also $x \in C \cap -C$. Wegen $C = \mathbb{R}^+K + C_{\min}$ existieren $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$, $k, k' \in K$ und $c, c' \in C_{\min}$ mit $x = \lambda k + c$ und $-x = \lambda' k' + c'$. Also gilt $\lambda k + c = -\lambda' k' - c'$ und daraus folgt

$$\lambda k + \lambda' k' = -c - c' \in (\{0\} \cup \operatorname{int} C_{\max}) \cap -C_{\min} = \{0\},$$

denn falls $\mathcal{C}_{ps} \neq \emptyset$ ist, folgt aus $x \in \operatorname{int} C_{\max}$, daß $-x \notin \operatorname{int} C_{\max}$, und für $\mathcal{C}_{ps} = \emptyset$ gilt $C_{\max} = \mathfrak{h}$, $C_{\min} = 0$. Also ist C ein invarianter Kegel in $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$. ■

Bemerkung II.8. Durch den Begriff des Konfigurationsraumes wurde der Fall von Cartan-Algebren in Lie-Algebren mit invarianten Kegeln verallgemeinert, und es ist zu erwarten, daß man die Bedingungen von Satz II.7. abschwächen kann. In der Tat: Falls das System $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ von einer Lie-Algebra mit Kegelpotential abstammt, sind die zweite und die dritte Bedingung schon hinreichend für die Existenz invarianter Kegel. ([4, III.35]) ∎

Jeder invariante Kegel liegt also zwischen dem minimalen und dem maximalen Kegel, wobei diese selbst invariant sind ([7, VI.13]). Aus all diesem folgt nun schnell

Satz II.9. *Ein spitzer erzeugender Kegel C in einem Konfigurationsraum $(\mathfrak{h}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{C})$ ist genau dann invariant, wenn er invariant ist unter der Coxetergruppe $\mathcal{W}$ und $C_{\min} \subseteq C \subseteq C_{\max}$ gilt.* ∎

Beispiele. Es werden die Kegel in den Cartan-Algebren der nichtkompakten quasihermiteschen einfachen Lie-Algebren mit $\dim \mathfrak{h} = 3$ betrachtet, wobei die Bezeichnungen der Lie-Algebren wie in [1] gewählt sind. In der Skizze sind jeweils Kegelbasen für den minimalen und den maximalen Kegel angegeben und die Hyperebnen, die $\mathcal{W}$ bestimmen. Insbesondere ist in $\mathrm{sp}(n, \mathbb{R})$ der minimale gleich dem maximalen Kegel. Also gibt es dort (nach Wahl des positiven Systems) nur genau einen invarianten Kegel. Vergleicht man die Algebren $\mathrm{so}(2n+1, 2)$ und $\mathrm{so}(2n, 2)$, so erkennt man, daß minimale und maximale Kegel übereinstimmen, aber die Weylgruppe der $\mathrm{so}(2n, 2)$ eine Untergruppe von der Weylgruppe der $\mathrm{so}(2n+1, 2)$ ist. Letztere enthält somit weniger invariante Kegel.

1) $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(3,1)$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{W} = \mathrm{S}_3$

2) $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(5,2)$ $\mathcal{W} = \mathrm{D}_4$

3) $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(4,2)$ $\mathcal{W} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

4) $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}(3,\mathbb{R})$ $\mathcal{W} = \mathrm{S}_3$

References

[1] Helgason, S., "Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces", Acad. Press, London, 1978.

[2] Hilgert, J., and K. H. Hofmann, *Compactly embedded Cartan Algebras*, Advances in Mathematics **75** (1989), 168–252.

[3] Hilgert, J., K. H. Hofmann, and J. D. Lawson,"Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups", Oxford Univ. Press, 1989.

[4] Neeb, K.-H., *Invariant Subsemigroups of Lie Groups, The Infinitesimal Theory*, Preprint **1317**, 1990.

[5] Spindler, K., "Invariante Kegel in Liealgebren", Mitteilungen Mathematisches Seminar Gießen **188**, 1988.

[6] Spindler, K., *Some remarks on Levi complements and roots in Lie algebras with cone potential*, Preprint, Conf.Anal.Topol.theory of Semigroups, Oberwolfach, 1989.

[7] Zimmermann, U., "Invariante Kegel in Cartanalgebren", Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1990.

Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule Darmstadt
Schlossgartenstr. 7
D-6100 Darmstadt, Germany
e-mail XMATAG05@DDATHD21

Received January 18, 1991
and in final form February 18, 1991