Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 1–14*

Sur les fonctions zêta attachées aux classes de rayon

par Wolfgang Jenkner

1. Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie (quadratique, pour la plupart des considérations suivantes) et soit $\mathfrak{m}$ un idéal ($\neq (0)$, comme tous les idéaux dont il est question ici) dans l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers de K. Désignons par $I(\mathfrak{m})$ le groupe engendré par les idéaux $\mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$ soient premiers entre eux et par $P(\mathfrak{m})$ le sous-groupe des idéaux principaux. Soient $P_{\mathfrak{m}} = \{(x) \in P(\mathfrak{m}) \mid x \equiv 1 \bmod^{\times} \mathfrak{m}\}$ et $P_{\mathfrak{m}+} = \{(x) \in P_{\mathfrak{m}} \mid \sigma_1(x) > 0, \cdots, \sigma_{r_1}(x) > 0\}$ où $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r_1}$ sont les $\mathbb{Q}$-monomorphismes $K \to \mathbb{R}$.

Pour un groupe

$$P_{\mathfrak{m}+} \leq \mathcal{C} \leq P(\mathfrak{m}),$$

soit $H(\mathcal{C}) = I(\mathfrak{m})/\mathcal{C}$.

Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on définit la *fonction zêta partielle attachée à* la classe $\mathfrak{a}\mathcal{C}$ par

$$\zeta(s, \mathfrak{a}\mathcal{C}) = \sum_{\mathfrak{n}\mathcal{C} = \mathfrak{a}\mathcal{C}} \frac{\mathrm{N}\mathfrak{m}^s}{\mathrm{N}\mathfrak{n}^s}.$$

Ce sont respectivement les fonctions zêta de Hurwitz et d'Epstein lorsque n égale 1 ou 2.

Évidemment, il est possible de ramener les fonctions de cette forme aux fonctions L attachées aux caractères du groupe $H(\mathcal{C})$, mais cette méthode ne permet pas, à ce qu'il semble, de trouver des inégalités satisfaisantes touchant les intégrales (pour $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1, s = \sigma + it$)

$$\int |\zeta(s, \mathfrak{a}\mathcal{C})|^2 \, dt,$$

pour peu que l'on s'intéresse à la façon dont ces expressions dépendent de l'idéal $\mathfrak{m}$. C'est donc le sujet de ce qui suit.

2. On commence par quelques considérations élémentaires, dont l'idée de base se trouve dans [4, Kap. V Aufg. 16].

Manuscrit reçu le 28 mars 1994.

Lemme 1. *Soit* $K \in \mathbb{N}$ *et* $c, d \in \mathbb{Z}$. *Soit* $\rho = \text{p.g.c.d.}(c, d, K)$. *De plus, soient* S, T, U, V *tels que*

$$SV = TU.$$

Soit $M := \min\{S, U\}$ *ainsi que* $N := \min\{T, V\}$. *Alors le nombre des* $(s, t, u, v) \in \mathbb{Z}^4$ *satisfaisant aux conditions*

$$sv = tu$$

$$\begin{cases} s \equiv c \bmod K \\ t \equiv d \bmod K \end{cases}$$

$$|s| \leq S, |t| \leq T, |u| \leq U, |v| \leq V$$

est

$$\ll \frac{SV\rho}{K^2} \log^+ MN + \left(U + \frac{T}{K} + 1\right)\left(V + \frac{S}{K} + 1\right) + U \log^+ M + V \log^+ N$$

Preuve. Tout d'abord, il convient de compter les quadruplets en question dont au moins une composante est égale à zéro; il en existe

$$\ll \left(U + \frac{T}{K} + 1\right)\left(V + \frac{S}{K} + 1\right).$$

Dès lors, on peut supposer que $svtu \neq 0$ et, quitte à remplacer (c, d) par $(\pm c, \pm d)$, il suffit même de ne considérer que les $(s, t, u, v) \in \mathbb{N}^4$. De plus, on n'apporte pas de restriction au problème si l'on suppose que $\text{p.g.c.d.}(c, d, K) = 1$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et tels que

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{t} = \frac{u}{v}.$$

À partir de là, on renverse la situation : Étant donnés a et b, on va chercher les $(s, t), (u, v)$ tels que la relation ci-dessus ainsi que les hypothèses du lemme soient verifiées.

Or, évidemment, il existe des nombres $m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} u = ma & v = mb \\ s = na & t = nb. \end{cases}$$

On voit tout de suite que le nombre des couples (u, v) est

$$\leq \min\{\frac{U}{a}, \frac{V}{b}\}.$$

En ce qui concerne les (s, t), il faut d'abord résoudre

$$\begin{cases} na \equiv c \mod K \\ nb \equiv d \mod K. \end{cases}$$

On voit de façon élémentaire qu'il existe une bijection entre les (a, b, n) satisfaisant à ce système–là et les solutions (a', b', n') du système suivant:

$$\begin{cases} (a', K_c) = (b', K_d) = 1 \\ n'a' \equiv c' \bmod K_c \\ n'b' \equiv d' \bmod K_d, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} K_c := \frac{K}{(c,K)} & K_d := \frac{K}{(d,K)} \\ c' := \frac{c}{(c,K)} & d' := \frac{d}{(d,K)}, \end{cases}$$

et la bijection est donnée par

$$(a', b', n') \mapsto (a, b, n) := (a'(c, K), b'(d, K), n).$$

Donc, pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit que

$$a'd' \equiv b'c' \bmod (K_c, K_d),$$

et dans ce cas, il y a une seule solution $n \bmod K$ (car $[K_c, K_d] = K$). Par conséquent, le nombre des couples (s, t) est

$$\leq \frac{1}{K} \min\{\frac{S}{a}, \frac{T}{b}\} + 1.$$

Soit

$$\lambda := \frac{S}{T} = \frac{U}{V} = \frac{M}{N}.$$

Il s'ensuit que le nombre des (s, t, u, v) tels que $a \geq \lambda b$ est

$$\leq \sum_a \sum_b \left(\frac{1}{K} \frac{S}{a} + 1 \right) \frac{U}{a},$$

où les a sont tels que $a \leq M$ et $(c,K) \mid a$, alors que les b doivent satisfaire à $b \leq \lambda^{-1}a$ et $b \equiv r(a) \bmod K_c$, la classe de $r(a) \bmod K_c$ étant donnée par les considérations ci-dessus. Cette somme est

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_a \left(\frac{1}{K}\frac{S}{a}+1\right)\frac{U}{a}\left(\frac{a}{\lambda}\frac{(c,K)}{K}+1\right)\\
&\ll \frac{SV}{K^2}(1+\log M)+\frac{SU}{K}+UV+U(1+\log M),
\end{aligned}$$

et il suffit d'y joindre l'expression analogue que l'on obtient dans le cas $b \geq \lambda^{-1}a$, le remplacement de $1+\log$ par $\log^+$ étant justifié par l'inégalité

$$\left(U+\frac{T}{K}\right)\left(V+\frac{S}{K}\right) \geq 4\left(U\frac{T}{K}\right)^{\frac{1}{2}}\left(V\frac{S}{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esquissons brièvement l'idée principale de ce qui va suivre :

Étant donné un polynôme

$$F(X,Y) = AX^2 + BXY + CY^2 + aX + bY + c \in \mathbb{Z}[X,Y],$$

on se propose comme but de compter (en quelque sorte) les solutions de l'équation

$$F(x,y) = F(x',y') \qquad \text{avec} \qquad (x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4.$$

Or, on a l'identité

$$F(x,y) - F(x',y') = \tfrac{1}{2}(sv - tu)$$

avec

$$\begin{cases} u = y' - y \\ v = x - x' \\ s = 2A(x+x') + B(y+y') + 2a \\ t = 2C(y+y') + B(x+x') + 2b. \end{cases}$$

Pourvu que l'on soit assez chanceux pour disposer de bornes raisonnables pour u, v, s, t, on a donc ramené le problème au lemme précédent.

3. Pour le polynôme

$$F(X,Y) = AX^2 + BXY + CY^2 + aX + bY + c \in \mathbb{Z}[X,Y],$$

soient $\delta = (A,B,C), \rho = (\delta, a, b), A' = A/\delta, B' = B/\delta, C' = C/\delta, \Delta = B^2 - 4AC, D = \Delta/\delta^2, d = |D|$.

Soit $G = \{S = S(S_0,k) = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ k^t & 1 \end{pmatrix} \mid S_0 \in Sl_2(\mathbb{Z}), k \in \mathbb{Z}^2\}$. On définit une action de G sur $\mathbb{Z}[X,Y]$ par

$$(S \cdot F)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = F(S^t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix})$$

(où $F((X,Y,1)^t) := F(X,Y)$), et une action de G sur $\mathbb{Z}^2$ par

$$S \cdot (x,y) := \left(S^t\right)^{-1}(x,y,1)^t.$$

D'après ces définitions, on a $(S \cdot F)(S \cdot (x,y)) = F(x,y)$. Soit $\mathrm{Aut}\, F = \{S \in G \mid S \cdot F = F\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$r_F(n) = \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid F(x,y) = n\}/\mathrm{Aut}\, F.$$

Soit $F_h(X,Y) = AX^2 + BXY + CY^2$; on voit facilement que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}\, F &\to \mathrm{Aut}\, F_h \\ S &\mapsto S_0 \end{aligned}$$

est un monomorphisme, de sorte que l'on peut identifier $\mathrm{Aut}\, F$ à un sous–groupe de $\mathrm{Aut}\, F_h$, ce qui s'explique encore mieux par comparaison avec le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$:

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie. Soit U le groupe des unités de K et soit $U^+ = \{u \in U \mid N(u) = 1\}$, où N est la norme par rapport à $\mathbb{Q}$. D'une façon plus générale, pour un idéal $\mathfrak{m} \triangleleft \mathcal{O}$, on définit $U_\mathfrak{m} = \{u \in U \mid u \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\}$ et $U_\mathfrak{m}^+ = \{u \in U_\mathfrak{m} \mid N(u) = 1\}$ ainsi que $U_{\mathfrak{m}+} = \{u \in U_\mathfrak{m} \mid \sigma_1(u) > 0, \cdots, \sigma_{r_1}(u) > 0\}$.

De plus, pour un corps quadratique, il existe une unité qui engendre $U_\mathfrak{m}^+$ (modulo $\{\pm 1\}$ lorsque $-1 \in U_\mathfrak{m}^+$) et dont la valeur absolue est ≥ 1; soit $\varepsilon_\mathfrak{m}$ cette valeur absolue.

En ce qui concerne le polynôme F_h (dont on suppose désormais que D est un discriminant fondamental), il est bien connu que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}\, F_h &\to U^+ \\ S_0(u,t) &\mapsto \frac{t - u\sqrt{D}}{2}, \end{aligned}$$

où
$$S_0(u,t) = \begin{pmatrix} \frac{t+B'u}{2} & -A'u \\ C'u & \frac{t-B'u}{2} \end{pmatrix},$$
est un isomorphisme.

De manière plus générale, on a
$$F(X,Y) = F_h(X-p, Y-q) - F_h(p,q) + c$$
avec $p = (2Ca - Bb)/\Delta$ et $q = (2Ab - Ba)/\Delta$. Comme on sait [6, §10], il existe un idéal $\mathfrak{A}$ de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ donné par une base orientée (ξ, η) telle que
$$F_h(x,y) = \frac{N(x\xi + y\eta)}{\mathbf{N}\mathfrak{A}}\delta,$$
de sorte que
$$F_h(x-p, y-q) = \frac{N(\alpha + x\xi + y\eta)}{\mathbf{N}\mathfrak{A}}\delta,$$
avec $\alpha = -p\xi - q\eta$. Quitte à remplacer $\mathfrak{A}$ par $(l)\mathfrak{A}$, avec un nombre $l \in \mathbb{N}$ de sorte que $\mathfrak{A}$ et α soient entiers, on est à même d'énoncer ce qui suit :

PROPOSITION 1. *Soit K un corps quadratique. Soit $\mathfrak{A} \triangleleft \mathcal{O}_K$ un idéal donné par une base orientée (ξ, η); soit $\alpha \in \mathcal{O}_K$ et*
$$\mathfrak{m} := \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha) + \mathfrak{A}}.$$
On considère le polynôme
$$F(x,y) = N(\alpha + \xi x + \eta y).$$
Alors
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}\, F_h & \xrightarrow{\cong} & U^+ \\ {\scriptstyle incl.}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle incl.} \\ \mathrm{Aut}\, F & \xrightarrow[\cong]{} & U^+_{\mathfrak{m}} \end{array}$$
est commutatif.

(En ce cas, on peut définir $\varepsilon_F := \varepsilon_{\mathfrak{m}}$.)

Dans le même ordre d'idées, soit
$$\mathcal{C} = \{(x) \in I_K \mid x \equiv 1 \bmod^{\times} \mathfrak{m},\ N(x) > 0\}.$$

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal tel que $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = 1$, on définit

$$a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n) = \#\{\mathfrak{b} \triangleleft \mathcal{O} \mid \mathfrak{b}\mathcal{C} = \mathfrak{a}\mathcal{C} \,\mathrm{et}\, \mathbf{N}\mathfrak{b} = n\}.$$

On peut choisir $\mathfrak{c} \triangleleft \mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{ac} \in \mathcal{C}$, c'est–à–dire $\mathfrak{ac} = (\alpha)$ avec $\alpha \equiv 1 \bmod^{\times} \mathfrak{m}$, $N(\alpha) > 0$, et tel que $\mathfrak{c}$ et D soient premiers entre eux. En définissant

$$F(x, y) = N(\alpha + \xi x + \eta y),$$

où (ξ, η) est une base orientée de $\mathfrak{mc}$, on obtient

$$a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n) = r_F(n\mathbf{N}\mathfrak{c})$$

(tandis que $r_F(m) = 0$ si $\mathbf{N}\mathfrak{c} \nmid m$). C'est, pour l'essentiel, une conséquence de la proposition ci–dessus.

4. Pour voir réalisé le souhait exprimé à la fin du paragraphe 2 il faut que F soit donné d'une façon particulière:

Définition 1. *Un polynôme*

$$F(X, Y) = A(X - p)^2 + B(X - p)(Y - q) + C(Y - q)^2 \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

est réduit (par rapport à G) si

$$\begin{gathered} -|A| < B \leq |A| \leq C, \\ 0 \leq p, q < 1. \end{gathered}$$

Soit $T > 0$, et soit F réduit. Si l'on choisit un système de représentants $D(T)$ pour

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < F(x, y) \leq T\}/\mathrm{Aut}\, F,$$

on a pour $n \leq T$

$$\begin{aligned} r_F(n)^2 &= \#\{(x, y) \in D(T) \mid F(x, y) = n\}^2 \\ &= \#\{(x, y, x', y') \in D(T)^2 \mid F(x, y) = F(x', y') = n\}, \end{aligned}$$

de sorte que $Q_F(T) :=$

$$\sum_{n \leq T} r_F(n)^2 = \#\{(x, y, x', y') \in D(T)^2 \mid 0 < F(x, y) = F(x', y') \leq T\}.$$

Avec un choix approprié de $D(T)$ (c'est–à–dire un secteur d'ellipse pour $D<0$ et un "secteur" d'hyperbole pour $D>0$), on arrive aux inégalités suivantes (les notations sont comme à la fin du paragraphe 2):

$$|s| \leq S = 36\varepsilon\sqrt{|A|T},\ |v| \leq V = 8\varepsilon\sqrt{\frac{T}{|A|}}$$

$$|u| \leq U = 8\varepsilon\sqrt{\frac{T}{|C|}},\ |t| \leq T = 36\varepsilon\sqrt{|C|T};$$

c'est juste ce qu'il faut pour pouvoir appliquer le lemme 1:

PROPOSITION 2. *Soit*

$$F(X,Y) = A(X-p)^2 + B(X-p)(Y-q) + C(Y-q)^2 \in \mathbb{Z}[X,Y].$$

Alors, pour $T>0$

$$Q_F(T) \ll \frac{\varepsilon^2\rho}{\delta^2} T \log^+ \frac{\varepsilon^2}{\delta} T + \frac{\varepsilon^2\sqrt{d}}{\delta} T + 1$$

(où $\varepsilon := \varepsilon_F$*, ...)*

Pour ce résultat–là, on ne s'est servi que de la condition banale

$$\begin{cases} s \equiv 2a \bmod \delta \\ t \equiv 2b \bmod \delta. \end{cases}$$

Avec une hypothèse supplémentaire, en appliquant la théorie des diviseurs élémentaires à la matrice $\begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix}$, on peut montrer un peu plus (on désigne par $\tau(d)$ le nombre des diviseurs de d):

PROPOSITION 3. *On suppose de plus que* $(\delta, D) = 1$. *Alors, pour* $T>0$

$$\begin{aligned} Q_F(T) \ll\ & \frac{\varepsilon^2\rho\tau(d)}{\delta^2 d} T \log^+ \frac{\varepsilon^2}{\delta} T \\ & + \frac{\varepsilon^2\sqrt{d}}{\delta} T + \frac{\varepsilon d}{\sqrt{\delta}}\sqrt{T} \log^+ \frac{T}{\delta} + 1. \end{aligned}$$

Toutefois, c'est de la proposition 2, que l'on va faire usage dans la suite; au moyen des résultats du paragraphe précédent, elle se traduit de la manière suivante dans le langage des idéaux (pour ce qui est de ρ, cf. la définition suivante) :

Proposition 4. *On a*

$$\sum_{n\leq T} a(\mathfrak{m},\mathfrak{a},n)^2 \ll \frac{\varepsilon^2\rho}{\mathbf{N}\mathfrak{m}^2}T\log^+\frac{\varepsilon^2}{\mathbf{N}\mathfrak{m}}T+\frac{\varepsilon^2\sqrt{d}}{\mathbf{N}\mathfrak{m}}T+1$$

(où $\varepsilon := \varepsilon_{\mathfrak{m}}$ et $\rho=\rho(\mathfrak{m},\mathfrak{a})$.)

Définition 2.

$$\rho(\mathfrak{m},\mathfrak{a})=\min(\{|\mathbf{N}\mathfrak{b}-\mathbf{N}\mathfrak{b}'|\neq 0 \mid \mathfrak{b},\mathfrak{b}'\lhd\mathcal{O},\ \mathfrak{b},\mathfrak{b}'\in\mathfrak{a}\mathcal{C}\}\cup\{\mathbf{N}\mathfrak{m}\})$$

Remarque 1: On a

$$\rho(\mathfrak{m},\mathfrak{a})\mathbf{N}\mathfrak{c}\geq\rho_F.$$

Toutefois, c'est une définition qui ne s'impose pas à première vue, mais qui s'explique par la suite.

Remarque 2: Soit $a(n)=\#\{\mathfrak{a}\lhd\mathcal{O}\mid \mathbf{N}\mathfrak{a}=n\}$ et soit $Q(T)=\sum_{n\leq T}a(n)^2$. Il est intéressant de mettre les résultats ci-dessus en comparaison avec ceci:

$$Q(T)=AT\log T+BT+\mathbf{O}\left(\sqrt{Td}4^{\omega(d)}(\log T)^6\right).$$

où

$$A=\frac{L(1)^2}{\zeta(2)}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$B=A\left(2\gamma-1-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}+2\frac{L'(1)}{L(1)}+\sum_{p|d}\frac{\log p}{1+p}\right)$$

(On a posé $\omega(d)=\#\{p\in\mathbb{P}\mid p|n\}$ et $L(s)=L(s,\chi_D)$ où χ_D est le caractère quadratique primitif de $\mathbb{Z}/(d)$.)

C'est que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty}a(n)^2n^{-s}$ a la représentation

$$\prod_{p|d}(1+p^{-s})^{-1}(\zeta(s)L(s))^2\zeta(2s)^{-1},$$

ce qui permet d'appliquer les méthodes habituelles de l'intégration complexe jointes à quelques inégalités difficiles (cf. [5]) touchant les valeurs moyennes des fonctions concernées .

5. Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie de degré $n = r_1 + 2r_2$. Soient $\mathfrak{D}$ la différente et d la valeur absolue du discriminant de cette extension. Soit $\mathfrak{m} \triangleleft \mathcal{O}$. Soit χ un caractère du groupe $H(P_{\mathfrak{m}+})$. On a une application

$$\begin{gathered}(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times \times (\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^+)^{r_1} \to P(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}+}\\ (x{+}\mathfrak{m}; \operatorname{signe}\sigma_1(x), \cdots, \operatorname{signe}\sigma_{r_1}(x)) \mapsto (x)P_{\mathfrak{m}+},\end{gathered}$$

qui donne la suite exacte

$$0 \to U/U_{\mathfrak{m}+} \to (\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times \times (\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^+)^{r_1} \to P(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}+} \to 0$$

de sorte que l'on a un caractère

$$\chi : (\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times \to \mathbb{C}^\times,$$

et un autre caractère

$$\chi_\infty : (\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^+)^{r_1} \to \mathbb{C}^\times$$

tels que

$$\chi((x)) = \chi(x)\chi_\infty(x)$$

si l'on écrit

$$\chi_\infty(x) := \chi_\infty(\operatorname{signe}\sigma_1(x), \cdots, \operatorname{signe}\sigma_{r_1}(x)).$$

Soit $m = m(\chi_\infty)$ le nombre des fois que -1 se trouve parmi les valeurs suivantes:

$$\chi_\infty(-1, 1, \cdots, 1), \chi_\infty(1, -1, \cdots, 1) \cdots, \chi_\infty(1, 1, \cdots, -1).$$

On définit une fonction méromorphe G_{χ_∞} par

$$\begin{aligned}&G_{\chi_\infty}(s) i^m (2^{-r_2}\pi^{-n/2})^{2s-1}\\ &\qquad = \left(\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\right)^{r_1-m} \left(\frac{\Gamma(1-(s/2))}{\Gamma((1+s)/2)}\right)^{m} \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right)^{r_2}.\end{aligned}$$

Soit $P_{\mathfrak{m}+} \leq \mathcal{C} \leq P_{\mathfrak{m}}$ et soit $\mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{O}$.

Il existe une équation fonctionnelle (que l'on peut démontrer à partir de celles attachées aux fonctions L):

Proposition 5 (Équation fonctionnelle). *Étant donné un caractère χ du groupe $H(\mathcal{C})$ et un idéal $\mathfrak{n} \triangleleft \mathcal{O}_K$, soit*

$$E(\mathcal{C},\chi,\mathfrak{n}) = \begin{cases} \frac{1}{(P_{\mathfrak{m}}:\mathcal{C})} \sum\limits_{\varepsilon \in U/U_{\mathfrak{m}}} e^{2\pi i Tr(\varepsilon\nu)} \chi_\infty(\varepsilon\nu) \\ \text{si } \mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{D}^{-1} = (\nu) \\ 0 \text{ si } \mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{D}^{-1} \text{ non principal.} \end{cases}$$

Alors, pour $\sigma < 0$

$$\zeta(s,\mathfrak{a}\mathcal{C}) = d^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\chi \in \widehat{P_{\mathfrak{m}}/\mathcal{C}}} G_{\chi_\infty}(s) \sum_{\mathfrak{n}} E(\mathcal{C},\chi,\mathfrak{n}) \mathbf{N}\mathfrak{n}^{s-1}.$$

(On a identifié $U/U_{\mathfrak{m}}$ à l'image de U dans $(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times$ et Tr est la trace par rapport à l'extension $K/\mathbb{Q}$.)

En adaptant les méthodes de [1], on obtient dans le cas d'une extension *quadratique* ($\mathcal{C}$ étant definie comme dans le paragraphe précédent):

Proposition 6 (Équation fonctionnelle approchée).

Soit $0 \le \sigma < 1$ et soient $x, y, t \in \mathbb{R}$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$t \ge 8$$
$$t/2 \le x \le 2t$$
$$xy = t^2$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\zeta(s,\mathfrak{a}\mathcal{C}) = (\mathbf{N}\mathfrak{m})^s & \sum_{n \le \sqrt{d}\mathbf{N}\mathfrak{m}x/2\pi} \frac{a(\mathfrak{m},\mathfrak{a},n)}{n^s} \\ & + d^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\chi \in \widehat{P_{\mathfrak{m}}/\mathcal{C}}} G_{\chi_\infty}(s) \sum_{n \le \sqrt{d}y/2\pi} \frac{c(\mathcal{C},\chi_\infty,n)}{n^{1-s}} \\ & + \mathbf{O}(\varepsilon_{\mathfrak{m}} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \log t),\end{aligned}$$

avec

$$c(\mathcal{C},\chi_\infty,n) = \sum_{\mathbf{N}\mathfrak{n}=n} E(\mathcal{C},\chi,\mathfrak{n}),$$

et où la constante impliquée par $\mathbf{O}$ *ne dépend que du corps K.*

De cette façon, on a exprimé une fonction zêta par des polynômes de Dirichlet, ce qui suggère d'appliquer les méthodes de [3,§6,7]. On a d'abord ceci:

Lemme 2. *Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite strictement monotone. On suppose qu'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que la condition*

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \rho \text{ pour } n \neq m$$

soit verifiée.

De plus, soient $a_n \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{R}_+$. On considère

$$S(t) = \sum_{\lambda_n \leq N} \frac{a_n}{\lambda_n^{it}}.$$

Alors, pour $T > 0$

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2 \, dt = 2T \sum_{\lambda_n \leq N} |a_n|^2 + 2\theta R(N)$$

où

$$R(N) = 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\rho} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda_n \leq N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda_n \leq N} \lambda_n^2 |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$-1 \leq \theta = \theta(T, N) \leq 1.$$

C'est précisément là que se pose le problème de trouver une inégalité comme celle de la proposition 4; en même temps, on voit la raison de la définition 2.

Á proprement parler, c'est d'une moyenne double que l'on a besoin; cependant, au lieu d'invoquer, là aussi, les méthodes de [3], on préfère peut-être voir le résultat explicite que voici:

Pour $T > 0$, soit

$$W_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq t \leq T, \, \tfrac{t}{2} \leq x \leq 2t\};$$

pour une fonction mesurable

$$f : W_T \to \mathbb{C}$$

et un nombre $\lambda < 1$, on définit la pseudonorme suivante :

$$\|f\|_{\lambda,T} = \tfrac{2}{3}(1-\lambda) T^{\lambda - 1} \int_0^T \int_{t/2}^{2t} |f(x,t)| \, dx \, t^{-\lambda - 1} \, dt.$$

Proposition 7. *Soit $f : W_T \to [0,\infty)$ une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^T f(x,t)\,dt = S(x)T + \mathbf{O}(R(x)),$$

avec des fonctions mesurables $R, S : [0,\infty) \to [0,\infty)$.
Soit $M > -1$. Alors, pour $-M \le \lambda < 1$ et pour tout $S_0 \in \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\lambda,T} = S_0 + \\ + \mathbf{O}_M\left((1-\lambda)T^{\lambda-1}\left(\int_0^{2T} |S(x)-S_0|x^{-\lambda}\,dx + \int_0^{2T} \frac{R(x)}{x^{1+\lambda}}\,dx\right)\right).$$

En posant

$$\zeta^*(s,\mathfrak{a}\mathcal{C}) = \sum_{n\ge \mathbf{N}\mathfrak{m}} \frac{a(\mathfrak{m},\mathfrak{a},n)}{\mathbf{N}\mathfrak{n}^s}$$

et

$$Z^*(\sigma) = \mathbf{N}\mathfrak{m}^{2\sigma} \sum_{n\ge \mathbf{N}\mathfrak{m}} \frac{a(\mathfrak{m},\mathfrak{a},n)^2}{\mathbf{N}\mathfrak{n}^{2\sigma}},$$

on est à même d'appliquer les outils donnés par le lemme 2 et la proposition 7 à la proposition 6, ce qui donne finalement

Proposition 8. *Soit $T \ge 8$ (par exemple).*

(1) *Soit $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$. Alors on a*

$$\frac{1}{T}\int_8^T |\zeta^*(s,\mathfrak{a}\mathcal{C})|^2\,dt = Z^*(\sigma) + \mathbf{O}_{K,\sigma}\left(q(\mathfrak{m},\mathfrak{a})T^{\frac{1}{2}-\sigma}\log \varepsilon_{\mathfrak{m}}^2 T\right).$$

(2) *On a*

$$\frac{1}{T}\int_8^T |\zeta^*(\tfrac{1}{2}+it,\mathfrak{a}\mathcal{C})|^2\,dt = \mathbf{O}_K\left(q(\mathfrak{m},\mathfrak{a})(\log \varepsilon_{\mathfrak{m}}^2 T)^2\right),$$

où

$$q(\mathfrak{m},\mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{m}}^2 \frac{\mathbf{N}\mathfrak{m}}{\rho(\mathfrak{m},\mathfrak{a})}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The Approximate Functional Equation for a Class of Zeta –Functions*, Math. Annalen **152** (1963), 30–64.

[2] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Springer–Verlag, New York ..., 1986.

[3] H.L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer–Verlag, Berlin ..., 1986.

[4] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer–Verlag, Berlin..., 1978.

[5] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummmen in der neueren Zahlentheorie*, Berlin, 1963.

[6] D. B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Springer–Verlag, Berlin ..., 1981.

Wolfgang JENKNER
Universität Wien
Institut für Mathematik
Strudlhofgasse 4
1090 Vienne, Autriche
e-mail : wolfgang@nelly.mat.univie.ac.at