Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 435–445*

Sur un procédé universel d'extraction

par Guy Barat

Résumé – On étudie ici un procédé universel d'extraction de suites – extraction en un sens élargi qui sera précisé – consistant à piquer les chiffres de l'écriture en base d des indices de la suite, cela suivant une partie E de $\mathbb{N}$. On s'intéresse plus particulièrement à l'action de ce procédé sur les suites périodiques, en liaison avec la régularité de la partie E, en termes de périodicité, de quasi-périodicité et d'automaticité. Ainsi (à une restriction évidente près), les procédés associés aux parties ultimement périodiques de $\mathbb{N}$ transforment suites périodiques en suites automatiques, mais conservent l'automaticité - ces parties de $\mathbb{N}$ étant les seules à posséder cette propriété. D'autre part, les parties de $\mathbb{N}$ inférieurement lacunaires sont les seules à transformer toute suite en une suite quasi-périodique, et celles qui sont arithmétiquement denses changent le périodique en quasi-périodique.

I. Description du procédé

Soit une application $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, ou, de manière équivalente, une partie infinie de $\mathbb{N}$, soit $E = \theta(\mathbb{N})$.

d étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé et n un entier naturel, on note $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(n) d^k$ le développement de n en base d.

A la suite de [5], on définit l'application $\sigma_E(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{\theta(k)}(n) d^k$. Autrement dit, σ_E supprime dans l'écriture de n en base d les chiffres dont le numéro d'ordre n'est pas un élément de E.

Examinons comment se construit la suite $(\sigma_E(n))_n$. Les premiers termes de la suite sont nuls, ils le sont jusqu'au premier n vérifiant $\varepsilon_{\theta(0)}(n) \neq 0$, soit $d^{\theta(0)}$ termes nuls. Autant valent ensuite 1, puis 2, et ainsi de suite jusqu'à $d-1$. Ensuite, on reprend tous les termes déjà écrits en leur ajoutant d, puis $2d$, etc, en ayant auparavant répété le procédé $d^{\theta(1)-\theta(0)-1}$ fois. On répète alors la totalité de ce qui a été fait $d^{\theta(2)-\theta(1)-1}$ fois ; puis l'on reprend en ajoutant d^2, $2d^2$, etc. Par exemple, si $E = 2\mathbb{N}$ et $d = 2$, les premiers termes de la suite sont : 01012323010123232345456767.

Manuscrit reçu le 10 mars 1994.

Remarquons que l'on peut sans inconvénient supposer $\theta(0) = 0$, la suite obtenue à partir de E étant déductible de celle obtenue à partir de $\theta' = \theta - \theta(0)$ en "bégayant", c'est-à-dire en répétant chaque terme $d^{\theta(0)}$ fois.

1. Premières propriétés

• Suivant [3], $\sigma = \sigma_E$ est d-additive : si $m < d^r$, on a $\sigma(ad^r + m) = \sigma(ad^r) + \sigma(m)$. La vérification est immédiate.

• σ n'est jamais régulière - c'est-à-dire qu'il n'existe pas de partie A de $\mathbb{N}$ de densité asymptotique 1 telle que $\sigma_{|A}$ soit injective -, sauf si θ est l'identité : en effet, si $r \notin E$, on a $\sigma(n) = \sigma(n + d^r\alpha)$, pour $0 \leq \alpha \leq d-1$ et $\varepsilon_r(n) = 0$

DÉFINITION 1. *Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On appelle densité asymptotique de A la limite quand N tend vers l'infini, si elle existe, de la quantité* $\frac{1}{N}\#\big(A \cap [\![0;\ N-1]\!]\big)$

• σ est "presque toujours" M-régulière, en ce sens que la série numérique de terme général $\frac{\Delta(n)}{n^3}$ est convergente, où $\Delta(N) := \#\,\{(n,m) < (N,N)\,;\ \sigma(n) = \sigma(m)\}$ (cf.[4]).

$N = d^r$. En base d, $n < N$ s'écrit $\varepsilon_{r-1}(n)\varepsilon_{r-2}(n)\ \ldots\varepsilon_0(n)$, dans la mesure où $\{n\ ;\ n < N\} = \{n\ ;\ \varepsilon_k(n) = 0, \forall k \geq r\}$.

Notons $\tau_E(r) := \#[\![0\ ;\ r-1]\!] \cap E$. Pour alléger l'écriture, nous noterons le plus souvent τ pour τ_E quand cela ne saura entraîner d'ambiguité.

On a $\sigma(n) = \sigma(m)$ si et seulement si, pour tout k de E, $\varepsilon_k(n) = \varepsilon_k(m)$, d'où $\Delta(N) = d^{\tau(r)}(d^{r-\tau(r)})^2 = d^{2r-\tau(r)}$.

Pour N quelconque, posons $r = \lfloor \log_d N \rfloor$. Comme $d^r \leq N \leq d^{r+1}$, on peut écrire $\Delta(d^r) \leq \Delta(N) \leq \Delta(d^{r+1})$, d'où $\frac{N^2}{d^2 d^{\tau(r)}} \leq \Delta(N) \leq \frac{d^2 N^2}{d^{\tau(r+1)}}$ en vertu du calcul précédent. En divisant cet encadrement par N^3 et en observant que $\tau(r+1) \geq \tau(r)$, il vient :

$$\frac{1}{N d^2 d^{\tau(r)}} \leq \frac{\Delta(N)}{N^3} \leq \frac{d^2 N^2}{d^{\tau(r+1)}},$$

et on peut dire que la série de terme général $\frac{\Delta(n)}{n^3}$ converge si et seulement si celle de terme général $\frac{1}{N d^{\tau(r)}}$ est convergente. Il s'ensuit que seules les

σ correspondant à des parties E de $\mathbb{N}$ largement lacunaires ne sont pas M-régulières. (Ce résultat n'avait pas été complètement élucidé dans [5]).

Cette propriété de M-régularité permet de se rendre compte que si le procédé décrit n'est pas *stricto sensu* une extraction (σ_E n'est pas strictement croissante), il ne s'en éloigne pas de façon immodérée.

• Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes. Alors, $\{\sigma_E,\ E \in \mathcal{E}\}$ est "éparse" (ce qui signifie d'après [5] que $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ \sigma(n) = \tau(n)\}$ est de densité asymptotique nulle pour tous σ et τ dans $\mathcal{E}$) :

En effet, si E et F sont deux parties de $\mathcal{E}$, prenons $N = d^r$.

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\#\{n < N\ ;\ \sigma_E(n) = \sigma_F(n)\} &= \frac{1}{N} d^{r-(\tau_E(r)+\tau_F(r))} d^{\min(\tau_E(r),\ \tau_F(r))}\\ &= d^{-\max(\tau_E(r),\ \tau_F(r))}.\end{aligned}$$

Pour N quelconque, on a alors $\frac{1}{N}\#\{n < N\ ;\ \sigma_E(n) = \sigma_F(n)\} \le d^{1-\max(\tau_E(r),\ \tau_F(r))}$, où $r = \lfloor \log_d N \rfloor$.

Or, $\lim_{r\to\infty} \tau_E(r) = \lim_{r\to\infty} \tau_F(r) = +\infty$, d'où le résultat.

Remarquons plus généralement que si E et F sont deux parties infinies de $\mathbb{N}$, le même calcul montre que $(\sigma_E,\ \sigma_F)$ est éparse si et seulement si $E \bigtriangleup F$ est infinie.

2. Une propriété universelle

Rappelons un résultat obtenu dans [5], et qui montre qu'il s'agit là d'un procédé intéressant :

THÉORÈME. *Soit (X, μ) un espace topologique compact muni d'une mesure de probabilité borélienne. Soit $u \in X^{\mathbb{N}}$. Alors, pour $E \subset \mathbb{N}$ infinie :*

i. Si u est μ-équirépartie, alors $u \circ \sigma_E$ est aussi μ-équirépartie.

ii. Si u est μ-bien répartie (c'est-à-dire si la famille des suites obtenues à partir de u par itérations successives de l'opérateur de décalage est uniformément μ-équirépartie), il en va de même de $u \circ \sigma_E$.

II. Application aux suites périodiques

On considère maintenant une suite périodique, de période q, sur un alphabet à q éléments. Nous prenons comme modèle de cet alphabet l'anneau $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +, *)$, cela afin de disposer d'un morphisme de $\mathbb{N}$ sur $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, par $n \mapsto u_n = n \bmod q$. Notons que, quitte à appliquer à u une fonction de sortie, on ne se restreint pas à lui supposer la forme indiquée.

Nous allons maintenant étudier les propriétés de régularité de la suite $u \circ \sigma$.

1. Deux cas évidents

Proposition 2. *i. S'il existe $n > 0$ tel que $q|d^n$, alors $u \circ \sigma$ est périodique.*

ii. Si E est de complémentaire fini, $u \circ \sigma$ est également périodique.

Preuve.

i. Utilisons le caractère d-additif de σ : pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $s < d^{\theta(n)}$, on a

$$u_{\sigma(md^{\theta(n)}+s)} = u_{\sigma(md^{\theta(n)})+\sigma(s)} = \sigma(s) \bmod q = u_{\sigma(s)}$$

car $d^n|\sigma(md^{\theta(n)})$.

ii. Posons $s = 1 + \max(\mathbb{N}\backslash E)$. Si $n < d^s$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(n + qd^s) &= \sigma(n) + \sigma(qd^s) \text{ par } d\text{-additivité} \\ &= \sigma(n) + qd^{\tau(s)}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $\tau(s) = \#[\![0\,;s-1]\!] \cap E$. L'entier qd^s est donc une période de $\sigma \bmod q$.

Après avoir éliminé ces cas d'extrême régularité, on peut se demander s'il n'arrive pas à $u\circ\sigma$ d'être quelque chose d'un peu moins fort que périodique, en l'occurrence automatique. C'est le cas si E est suffisamment régulier, comme le montrent les propositions suivantes.

2. Les cas d'automaticité

Proposition 3. *Sous l'hypothèse de périodicité de u, on suppose que E est ultimement périodique (c'est-à-dire que la suite caractéristique de E –*

$(\chi_E(n))_n$ – *est périodique à partir d'un certain rang). Alors, la suite* $u \circ \sigma_E$ *est* d*-automatique.*

Preuve. Commençons par le cas où E est périodique, de période l.

Posons $a = \tau_E(l)$. Si $r < d^l$, on a :

$$\sigma(d^l m + r) \ = \ \sigma(d^l m) \ + \ \sigma(r) \ = \ d^a \sigma(m) \ + \ \sigma(r) \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}.$$

La d^l-substitution sur l'alphabet $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$:

$$k \ \longmapsto [d^a k, \ d^a k + \sigma(1), \ ..., \ d^a k + \sigma(d^l - 1)] \bmod q \ (k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

admet $u \circ \sigma_E$ mod q comme point fixe.

Passons maintenant au cas général : E est ultimement périodique, périodique de période l à partir du rang t. Notons F la partie périodique de $\mathbb{N}$ de même période que E. Pour $r < d^t$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sigma_E(d^t n + r) \ = \ \sigma_E(d^t n) \ + \ \sigma_E(r) \ = \ d^b \sigma_F(n) \ + \ \sigma_E(r), \text{ où } b = \tau_E(t).$$

D'après ce qui précède, $u \circ \sigma_F$ est d^l-automatique, donc d-automatique (ces deux propriétés sont classiquement équivalentes). Si $(S, \ s, \ \Phi, \ \rho)$ est un d-automate reconnaissant $u \circ \sigma_F$ (rappelons que S est l'ensemble des états, s un état initial, Φ une application de $S \times \{0, \ 1 \ ..., \ d-1\}$ dans S, et $\rho \ : \ S \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, une fonction de sortie), on peut construire des automates $(S^{(i)}, \ s^{(i)}, \ \Phi^{(i)}, \ \rho^{(i)}) \ \equiv \ (S, \ s, \ \Phi, \ d^b \rho + i \bmod q)$ pour $i \ \in \sigma_E([\![0 \ ; \ d^t]\!]) \bmod q$.

L'automate dont l'ensemble d'états est $\bigcup_i S^{(i)} \ \bigcup \{0, \ ..., \ d^{t-1}\}$, d'état initial 0, et tel que :

- si $m < d^{t-2}$ et $0 \leq k \leq d-1$, $m = \sum_{v<w} a_v d^v$, avec $a_{w-1} \neq 0$; alors $k.m \ = \ m + kd^w$

- si $m = \sum_{v<t-1} a_v d^v$, avec $a_{t-1} \neq 0$; alors $k.m \ = \ s^{(\sigma_E(m + kd^{t-1}))}$,

et dont les autres caractéristiques d'attribution et de sortie sont entièrement décrites par les $\Phi^{(i)}$ et $\rho^{(i)}$, ce d-automate, donc, reconnaît σ_E mod m. *q.e.d.*

Remarque. la deuxième partie de la démonstration montre un résultat un peu plus fort, qui servira dans la démonstration de la proposition suivante : avec les notations précédentes - et indépendamment de toute hypothèse de périodicité sur u – si $u \circ \sigma_F$ est d-automatique, alors c'est également le cas de $u \circ \sigma_E$.

La proposition 3 admet la généralisation suivante :

PROPOSITION 3bis. *On suppose que E est ultimement périodique et que u est d-automatique. Alors, la suite $u \circ \sigma_E$ est d-automatique.*

Preuve. D'après la remarque précédente, on peut se restreindre au cas où E est périodique ; soit l sa période, et $a = \tau_E(l)$.

Commençons par une remarque technique. On sait ([1], [2]) que la d-automaticité de u est équivalente à la finitude de $\{(u_{d^m n+r})_n \; ; \; m \in \mathbb{N}, \; r < d^m\}$. Montrons qu'elle équivaut aussi à la finitude de $\{(u_{d^m n+r})_n \; ; \; m \in \mathbb{N}, \; r < d^{m+c}\}$, où c est un entier naturel arbitraire fixé. En effet, le premier ensemble de sous-suites étant inclus dans le second, la finitude de celui-ci assure celle de celui-là. Réciproquement, une sous-suite du dernier n'étant pas *a priori* nécéssairement dans le premier doit s'écrire $(u_{d^m n+\alpha d^m+\beta})_n$, avec $0 \leq \alpha \leq d^c - 1$ et $\beta < d^m$.

Or, $d^m n + \alpha d^m + \beta \; = \; d^m(n+\alpha) + \beta$. Une telle suite est donc l'image d'une suite du d-noyau de u par un itéré de l'opérateur de décalage d'ordre inférieur ou égal à $d^c - 1$. Les nouvelles suites éventuelles sont donc obtenues à partir des suites du d-noyau par un nombre fini de procédés d'extraction, ce qui achève de démontrer cette assertion préliminaire.

On suppose que $\mathcal{U} := \{(u_{d^m n+r})_n \; ; \; m \in \mathbb{N}, \; r < d^{m+1}\}$ est fini.

Soit alors $m \in \mathbb{N}$ et $s < d^m$. Effectuons la division euclidienne de m par l ; il vient $m = l\kappa + r$. $\sigma(d^m n + s) = \sigma(d^m n) + \sigma(s) = d^{a\kappa}\sigma(d^r n) + \sigma(s)$ par d-additivité de σ et périodicité de E, d'où $u \circ \sigma(d^m n + s) = u_{d^{a\kappa}\sigma(d^r n)+\sigma(s)}$.

Du fait que $\sigma(s) < d^{a(\kappa+1)} = d^{a\kappa+a}$, on peut conclure en observant que les suites $(u \circ \sigma(d^m n + s))_n$ sont obtenues à partir de celles de $\mathcal{U}$ par un nombre fini d'extractions (r est majoré par la constante l), et que le d-noyau de $u \circ \sigma_E$ est donc fini.

En fait, ces propriétés de conservation sont peu ou prou caractéristiques des ensembles E décrits ci-dessus. Cette réciproque fait l'objet de la proposition 4.

PROPOSITION 4. *On suppose qu'il n'existe pas de n tel que $q|d^n$, que u est périodique, et que E n'est pas ultimement périodique. Alors, la suite $u \circ \sigma_E$ n'est pas d-automatique.*

Preuve. Il suffit d'exhiber une partie infinie du d-noyau : plus précisément, on va montrer que si $m \neq n$, alors $(u \circ \sigma(d^m k))_k \;\neq\; (u \circ \sigma(d^n k))_k$.

On peut supposer $n < m$. E n'étant pas ultimement périodique, il existe un entier i tel que $\chi_E(n+i) \neq \chi_E(m+i)$, sinon, χ_E serait $(m-n)$-périodique à partir du rang n. Ainsi, si, par exemple, on a $n+i \in E$ et $m+i \notin E$, alors $\sigma(d^m.d^i) = 0$ et $\sigma(d^n.d^i) = d^{n+i}$ n'est pas nul *modulo* q en vertu de l'hypothèse sur q.

3. La pseudo-périodicité

Une deuxième façon d'approcher la périodicité peut s'obtenir en ne raisonnant non plus, en quelque sorte, algébriquement, mais en termes de densité : la quasi-périodicité.

Définition 5. *Soit X un ensemble, et $u \in X^{\mathbb{N}}$. Suivant [4], u est dite quasi-périodique si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists t \in \mathbb{N})\ :\ \liminf \frac{1}{N} \#\{n < N\ ;\ u_n = u_{n+t}\} \ \geq\ 1 - \varepsilon.$$

Voyons tout d'abord deux lemmes :

Lemme 6. *Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$, et $\varphi\ :\ A \to [\![0\ ;\ d]\!]$, une application. Alors, l'ensemble $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ \forall a \in A,\ \varepsilon_a(n) = \phi(a)\}$ est de densité asymptotique $d^{-|A|}$.*

Nous ne détaillons pas la preuve de ce lemme facile.

Lemme 7. *Soit E une partie infinie et t un élément de $\mathbb{N}$. Alors, l'ensemble A défini par : $A = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ \sigma(n+t) = \sigma(n)\}$ admet une densité asymptotique.*

Preuve. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $A_N = A \cap [\![0;\ N-1]\!]$. Si $n < d^{r+1}$, $n = a_r d^r + n_1$ avec $n_1 < d^r$. Si $n + t < (a_r+1)d^r$, alors

$$\begin{aligned} \sigma(n+t) = \sigma(n) &\iff \sigma(a_r d^r + (n_1 + t)) = \sigma(a_r d^r + n_1) \\ &\iff \sigma(n_1 + t) = \sigma(n_1), \end{aligned}$$

par d-additivité de σ, du fait que $n_1 + t < d^r$.

Soit $r \geq \log_d t$. Pour $n_1 < d^r$ tel que $n_1 + t < d^r$, l'équivalence ci-dessus fait correspondre aux n_1 éléments de A_{d^r} d éléments de $A_{d^{r+1}}$, à savoir les $\alpha d^r + n_1$, avec $\alpha \in [\![0\,;d-1]\!]$. Il y a t entiers strictement inférieurs à d^r qui ne sont pas dans ce cas (ce sont les $d^r - k$, $k \in [\![1\,;t]\!]$), auxquels correspondent dt entiers strictement inférieurs à d^{r+1}. On a donc l'encadrement $d\big(|A_{d^r}| - t\big) \leq |A_{d^{r+1}}| \leq d\big(|A_{d^r}| - t\big) + dt$. Alors,

$$\big||A_{d^{r+1}}| - d|A_{d^r}|\big| \;\leq\; dt \text{ , d'où } \left|\frac{1}{d^{r+1}}|A_{d^{r+1}}| - \frac{1}{d^r}|A_{d^r}|\right| \;\leq\; \frac{t}{d^r}.$$

Ainsi $(\frac{1}{d^r}|A_{d^r}|)_r$ est-elle une suite de Cauchy, qui converge à ce titre vers une limite, soit α.

De même, si N est un entier quelconque, N se développe en base d selon : $N = a_r d^r + \ldots\ + a_0$; si $N_1 = N - a_r d^r$, on a :

$$\big||A_N| - |A_{a_r d^r}| - |A_{N_1}|\big| \;\leq t \text{ , et } \big||A_{a_r d^r}| - a_r|A_{d^r}|\big| \;\leq\; a_r t,$$

$$\text{d'où } \big||A_N| - a_r|A_{d^r}| - |A_{N_1}|\big| \;\leq t + a_r t.$$

En itérant cette majoration, puis en divisant par N, il vient, où $r = \lfloor \log_d N \rfloor$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{N}|A_N| - \frac{a_r d^r}{N}\cdot\frac{1}{d^r}|A_{d^r}| - \ \cdots\ - \frac{a_{r-m}}{N}\cdot\frac{1}{d^{r-m}}|A_{d^{r-m}}|\right| & \\ \leq\ \frac{m(d+1)}{N}t + \frac{|A_{N_{m+1}}|}{N} & \\ \leq\ \frac{rt(d+1) + d^{r-m}}{N}. & \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N > d^m$, on ait $\dfrac{rt(d+1)+d^{r-m}}{N} < \varepsilon$. L'entier m ainsi fixé, on fait tendre N vers l'infini. On a alors $\dfrac{|A_{d^{r-k}}|}{d^{r-k}} \to \alpha$ pour tout $k \in [\![0\ ;\ m]\!]$ et

$$\left|\frac{a_r d^r + \ \cdots\ + a_{r-m}d^{r-m}}{N} - 1\right| \;<\; \frac{d^{r-m}}{N} \;<\; \varepsilon,$$

d'où l'encadrement :

$$(1-\varepsilon)\alpha - \varepsilon \;\leq\; \liminf \frac{1}{N}|A_N| \;\leq\; \limsup \frac{1}{N}|A_N| \;\leq\; (1+\varepsilon)\alpha + \varepsilon.$$

Cela valant pout tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim \dfrac{1}{N}|A_N| = \alpha$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Le résultat suivant caractérise les cas où la suite σ est quasi-périodique. Naturellement, quand c'est le cas, $u \circ \sigma$ l'est *a fortiori* pour toute suite u, périodique ou non.

Proposition 8. *σ_E est quasi-périodique si et seulement si E est "inférieurement lacunaire", c'est-à-dire si* $\limsup(\theta(n+1)-\theta(n)) = +\infty$. *On rappelle que θ est l'application strictement croissante telle que $E = \theta(\mathbb{N})$.*

Preuve.

- Considérons un intervalle $[\![i\ ;\ i+s]\!]$ d'intersection vide avec E.

$\sigma(n+d^i) \neq \sigma(n)$ implique $\varepsilon_k(n) = d-1$ pour tout $k \in [\![i\ ;\ i+s]\!]$.

L'ensemble de ces n est de densité asymptotique d^{-s-1}, d'après le lemme 6. Comme, par hypothèse, on peut considérer des intervalles de la forme ci-dessus avec des s aussi grands que l'on veut, il s'ensuit que σ est quasi-périodique.

- Réciproquement, supposons que E est à lacunes bornées. Par hypothèse,

$$(\exists K > 0)(\forall m \in \mathbb{N})\ :\ [\![m\ ;\ m+K]\!] \cap E \neq \emptyset.$$

Soit $t \in \mathbb{N}^*$. On va montrer que $X := \{n\ ;\ \sigma(n+t) \neq \sigma(n)\}$ contient une partie de densité asymptotique minorée par une constante indépendante de t.

Développons t en base d : $t = \sum_k \varepsilon_k(t) d^k$, et considérons l'ensemble fini F défini par $F := \{k \in \mathbb{N}\ ;\ \varepsilon_k(t) \neq 0\}$; posons enfin $s := \min\ F$ et distinguons deux cas :

1^{er} *cas :* $s \in E$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $\varepsilon_s(n) = 0$, alors $\varepsilon_s(n+t) = \varepsilon_s(t) \neq 0$, d'où $\sigma(n+t) \neq \sigma(n)$. Aussi, X contient-il $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ \varepsilon_s(n) = 0\}$, qui est de densité asymptotique d^{-1}.

$2^{ème}$ *cas :* $s \notin E$

Soit $r = \min\{l \in \mathbb{N}\ ;\ s+l \in E\}$. L'hypothèse sur E montre que $r < K$.

Si $\varepsilon_{s+r}(t) = 0$, et si $n \in \mathbb{N}$ vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_s(n) = d - \varepsilon_s(t) \\ \varepsilon_{s+k}(n) = d - \varepsilon_{s+k}(t) - 1 \text{ pour } 1 \leq k < r \\ \varepsilon_{s+r}(n) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{alors, } \varepsilon_{s+r}(n+t) &= \varepsilon_{s+r}(n)+1 \ (\text{et} \varepsilon_{s+k}(n+t)=0 \text{ pour } 0 \leq k < r)\\ &= 1\\ &\neq \varepsilon_{s+r}(n).\end{aligned}$$

Si $\varepsilon_{s+r}(n) \neq 0$, et si n est un entier naturel tel que $\varepsilon_{s+k}(n) = 0$ pour $0 \leq k \leq r$, alors $\varepsilon_{s+r}(n+t) = \varepsilon_{s+r}(t) \neq \varepsilon_{s+r}(n)$, ce qui montre que X contient une partie de $\mathbb{N}$ de densité asymptotique d^{-K}, *q.e.d.*

La condition suffisante de la proposition précédente admet une forme symétrique : on a vu que si χ_E admettait des plages arbitrairement longues de 0, la suite $u \circ \sigma_E$ était quasi-périodique. Sous l'hypothèse que u est périodique, supposons que χ_E admette des plages arbitrairement longues de 1 ; alors, la suite $u \circ \sigma_E$ est quasi-périodique, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 9. *Soit E une partie de $\mathbb{N}$ contenant des segments (de $\mathbb{N}$) arbitrairement longs. Supposons que u est périodique. Alors, $u \circ \sigma_E$ est quasi-périodique.*

Preuve. En vertu de la proposition 1, on peut supposer que $\mathbb{N} \setminus E$ est infinie, toute suite périodique étant évidemment quasi-périodique.

Modulo q, la suite $(d^n)_n$ est ultimement périodique ; soit r le rang à partir duquel elle est périodique ($r = 0$ si d et q sont premiers entre eux).

Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, E contient q segments $E_1 < E_2 < \ldots < E_q$ de $\mathbb{N}$ (en ce sens que $\max E_j < \min E_{j+1}$), de longueurs supérieures à $(1+h)l$ et tels que pour tout $j \in [\![1;q]\!]$, $1 + \max E_j$ n'appartienne pas à E. On peut aussi imposer $r < \min E_1$. Pour $j \in [\![1;q]\!]$, on considère $s_j := \min \{k \in E_j \ ; \ d^k \equiv d^i \bmod q\}$. Enfin, on pose $\delta := \sum_{1 \leq j \leq q} d^{s_j}$. Par construction, δ est nul *modulo* q.

Soit maintenant $n \in N$. Si, pour tout j appartenant à $[\![1;q]\!]$, il existe $k \in E_j$, $k \geq s_j$, tel que $\varepsilon_k(n) \neq d-1$, alors $\sigma(n+\delta) = \sigma(n) + \delta$, d'où $\sigma(n+\delta) \equiv \sigma(n) \bmod q$. Il en découle que

$$\begin{aligned}&\{n \in \mathbb{N} \ ; \ \sigma(n+\delta) \equiv \sigma(n) \bmod q\}^c\\ \subset &\bigcup_{1 \leq j \leq q} \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \varepsilon_k(n) = d-1, \ \forall k \in E_j, \ k \geq s_j\}\end{aligned}$$

$\{n \in \mathbb{N} \; ; \; \sigma(n+\delta) \equiv \sigma(n) \bmod q\}^c$ est donc contenue dans une partie de $\mathbb{N}$ de densité asymptotique inférieure à $q.d^{-hl}$ d'après le lemme 6 et le caractère sous-additif fini de la densité asymptotique. Or, h est arbitrairement grand, d'où le résultat.

Références

[1] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France, G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* 108 (1980), 401-419.

[2] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Mathem. Syst. Theory* 6, 1972, p.164-192.

[3] A. O. Gel'fond, Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithmetica* XIII, 1968, 259-265.

[4] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Pure and applied mathematics, Wiley, New-York-NY, 1974.

[5] P. Liardet, Some metric properties of subsequences, *Acta Arithmetica* LV, 1990, 119-135.

Guy BARAT
Dynamique Stochastique et Algorithmique
Université de Provence
3 place Victor Hugo, case 96
13331 Marseille Cedex 03, France