Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 407 – 433*

Fonction sommatoire de la fonction μ de Möbius, majorations asymptotiques effectives fortes

par M. El Marraki

Résumé — On établit les majorations $|M(x)| \leq \frac{0.002969\, x}{(\log x)^{1/2}}$, valable pour $x \geq 142\,194$, $|M(x)| \leq \frac{0.6437752\ x}{\log x}$ qui est la meilleure majoration possible en $\frac{x}{\log x}$ valable pour tout $x > 1$ $\left(|M(5)| = 2 = \frac{0.6437752 \times 5}{\log 5}\right)$, et d'autres analogues. On montre enfin comment trouver des majorations effectives $|M(x)| < \frac{c_k\ x(\log\log x)^{2k}}{(\log x)^k}$ pour tout k.

Abstract — We prove the bounds $|M(x)| \leq \frac{0.002969\, x}{(\log x)^{1/2}}$, valid for $x \geq 142\,194$, $|M(x)| \leq \frac{0.6437752\ x}{\log x}$ which is the best $\frac{c\ x}{\log x}$ bound valid for all $x > 1$ $\left(|M(5)| = 2 = \frac{0.6437752 \times 5}{\log 5}\right)$, and other similar ones. At the end we explain how to find effective bounds $|M(x)| < \frac{c_k\ x(\log\log x)^{2k}}{(\log x)^k}$ for every k.

1. INTRODUCTION

On rappelle les notations classiques : μ fonction de Möbius [4], M fonction sommatoire de μ, Q fonction sommatoire de $|\mu|$. On note enfin $R(x)$ la différence $Q(x) - \frac{6}{\pi^2}x$.

Après l'article de H. Cohen, F. Dress et M. El Marraki [1] dont les deux résultats essentiels sont

$$|R(x)| \leq 0.02767\sqrt{x} \quad \text{pour } x \geq 438\,653 \tag{1.1}$$

$$|M(x)| \leq \frac{x}{4345} \quad \text{pour } x \geq 2\,160\,535, \tag{1.2}$$

on va établir dans cet article, dans un premier temps, des majorations asymptotiques pour la fonction $M(x)$ du type :

$$|M(x)| < \frac{cx}{(\log x)^\alpha},$$

Manuscrit reçu le 12 juin 95.

qui améliorent les couples (c, α) fournis par L. Schoenfeld [5], avec notamment des résultats pour $\alpha > 2$. Les α pour lesquels on peut déterminer une majoration sont inférieurs à 4, et le plus grand pour lequel nous l'avons fait est $\frac{236}{75} = 3.1466...$ Dans un deuxième temps on établira des majorations du type :

$$|M(x)| < \frac{c_k\, x(\log\log x)^{2k}}{(\log x)^k},$$

l'exposant k étant un entier quelconque.

L'ensemble de ces résultats constitue la version améliorée et définitive des majorations données dans la thèse de l'auteur [3].

La méthode est une récurrence qui utilise conjointement des majorations de $|M(x)|$ et de $|\rho(x)|$ (cf définition juste ci-dessous). Les majorations du type $|M(x)| \leq \epsilon x$ établies par F. Dress et M. El Marraki [2] ou H. Cohen, F. Dress et M. El Marraki [1] sont tout à fait essentielles, car la récurrence doit commencer avec une majoration en $\frac{cx}{(\log x)^\alpha}$ avec l'exposant $\alpha = 0$.

2. DÉFINITIONS ET LEMMES PRÉLIMINAIRES

DÉFINITIONS. *On définit la fonction Λ par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & si\ n = p^\nu \quad (\nu \geq 1) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On définit les fonctions Ψ, ρ et N par :

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^\nu \leq x} \log p,$$
$$\rho(x) = \Psi(x) - [x],$$
$$N(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) \log n.$$

LEMME 1. [SCHOENFELD, AMÉLIORÉ] *Soit $f(x)$ la fonction $\sum_{n \leq x} \frac{|\mu(n)|}{n} - \frac{6}{\pi^2} \log x$. Alors on a les deux encadrements :*

$$\text{(2.1)} \qquad si\ \ x \geq 2 \qquad 0.832110 < f(x) < 1.165471,$$

(la majoration $f(x) < 1.165471$ est vraie pour tout $x \geq 1$).

$$\text{(2.2)} \qquad si\ x \geq 438\,653 \qquad 1.043801 < f(x) < 1.043988.$$

Remarque : Schoenfeld avait donné un encadrement entre 0.68 et 1.25 pour $x \geq 2$.

La démonstration, classique, est donnée très brièvement.

Soient $Q(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} |\mu(n)|$ et $R(x) = Q(x) - \frac{6}{\pi^2}x$. Si C est un réel positif qui sera choisi ultérieurement, une intégration par parties permet d'écrire, pour $x \geq C$:

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \frac{\left|\mu(n)\right|}{n} &= \sum_{n \leq C} \frac{\left|\mu(n)\right|}{n} - \frac{Q(C)}{C} + \frac{Q(x)}{x} + \int_C^x \frac{Q(u)}{u^2} du \\ &= \frac{6}{\pi^2} \log x + C_1 + \frac{R(x)}{x} + \int_C^x \frac{R(u)}{u^2} du\end{aligned}$$

avec

$$C_1 = \sum_{n \leq C} \frac{\left|\mu(n)\right|}{n} - \frac{Q(C)}{C} - \frac{6}{\pi^2}\big(\log C - 1\big).$$

En utilisant la majoration (1.1) (H. Cohen, F. Dress et M. El Marraki [1]), on a alors, pour $x \geq C \geq 438\,653$:

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\left|\mu(n)\right|}{n} - \frac{6}{\pi^2} \log x - C_1 \right| \leq \frac{0.0278}{\sqrt{x}} + 0.0556\left(\frac{1}{\sqrt{C}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \frac{0.0556}{\sqrt{C}}.$$

Si on prend $C = 438\,653$, alors $C_1 = 1.043894438$, et on obtient la majoration (2.2).

Une étude numérique directe jusqu'à $438\,653$ permet d'obtenir la majoration (2.1).

Remarque. Le lemme 2 nous donne un très bon encadrement de la différence $\sum_{n \leq x} \frac{|\mu(n)|}{n} - \frac{6}{\pi^2} \log x$, car on a en fait :

Lemme 2 *(Résultat classique rappelé par Schoenfeld et démontré dans [5]).*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\left|\mu(n)\right|}{n} - \frac{6}{\pi^2} \log x \longrightarrow \frac{6}{\pi^2}\left(\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) = 1.0438945... \quad \textit{quand } x \to \infty,$$

3. RÉSULTATS UTILISÉS ET FORMULES FONDAMENTALES

Résultats utilisés : on utilisera dans ce travail une majoration concernant la fonction Λ (voir [5]) :

$$\sum_{1\le n\le x}\frac{1}{n}\big|\Lambda(n)-1\big| < 2\log x - 2\log\log x \quad \text{si } x>1 \tag{3.1}$$

ainsi que des majorations de la fonction $\rho(x)=\Psi(x)-[x]$ (voir [6]) :

$$\big|\Psi(x)-[x]\big| < \frac{\eta_k x}{(\log x)^k} \tag{3.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 0.00776291 \quad \text{si } x>e^{22}\\
\eta_2 &= 8.0720 \qquad\quad \text{si } x>1\\
\eta_3 &= 10644 \qquad\quad \text{si } x>1\\
\eta_4 &= 1.6570\ 10^7 \quad \text{si } x>1,
\end{aligned}$$

et

$$\big|\rho(x)\big| \le \big|\Psi(x)-x\big|+1 < x\sqrt{\frac{8}{17\pi}}\ X^{\frac12}e^{-X}+1 \quad \text{si } x\ge 17, \tag{3.3}$$

avec

$$X=\sqrt{\frac{\log x}{R}} \quad \text{et } R=9.645908801.$$

Formules fondamentales liant $M(x)$, $\rho(x)$ et $N(x)$: la méthode de Schoenfeld consiste à majorer asymptotiquement la fonction $M(x)$ en se servant de majorations déjà établies sur la fonction $\rho(x)$. Mais le problème est que l'on ne dispose pas de formules directes reliant M à ρ puis ρ à M ; pour remédier à ce problème on introduit la fonction $N(x)$ qui nous fournira des majorations en deux étapes : la première reliant M et ρ à N (prop. 5), la deuxième reliant N à M (prop. 7).

Lemme 3. *Si $x\ge 1$ et $y>0$ on a l'égalité suivante :*

$$-N(x)-1=\sum_{k\le y}\big\{\Lambda(k)-1\big\}M\Big(\frac{x}{k}\Big)+\sum_{j\le \frac{x}{y}}\mu(j)\rho\Big(\frac{x}{j}\Big)-\rho(y)M\Big(\frac{x}{y}\Big), \tag{3.4}$$

et, si $x \geq C > 1$, on a :

$$M(x) = M(C) - \frac{N(C)}{\log C} + \frac{N(x)}{\log x} + \int_C^x \frac{N(u)}{u(\log u)^2} du \tag{3.5}$$

La relation (3.4) se démontre sans difficulté par la méthode de l'hyperbole (voir par exemple Schoenfeld [5]).

Pour établir la relation (3.5) entre $M(x)$ et $N(x)$, on fait une intégration par parties pour $x > 1$ sur la fonction $M(x)$, ce qui donne :

$$M(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \mu(n) \log n \frac{1}{\log n} + 1 = \frac{N(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{N(u)}{u(\log u)^2} du + 1,$$

d'où la relation (3.5) découle immédiatement. On peut ainsi obtenir une majoration de $M(x)$ à partir de toute majoration de $N(x)$.

On utilisera plusieurs fois cette formule pour écrire

$$M(x) \leq \frac{C}{4345} + \frac{|N(C)|}{\log C} + \frac{|N(x)|}{\log x} + \int_C^x \frac{|N(u)|}{u(\log u)^2} du$$

(avec bien sûr $C \geq 2\,160\,535$). On notera que les majorations de $|M(x)|$ en ϵx, indépendamment de leur utilisation comme point de départ dans une récurrence, jouent un rôle important dans la mise en oeuvre de la méthode de Schoenfeld.

Majoration de $N(x)$

Lemme 4. [Schoenfeld] *Soient x et y donnés. On suppose que :*

$$\big|M(u)\big| \leq \frac{Au}{g(u)} \quad \text{si } u \geq \frac{x}{y} \ , \qquad \big|\rho(v)\big| \leq \frac{Bv}{h(v)} \quad \text{si} \quad v \geq y \ , \tag{3.6}$$

avec A, B des constantes positives, $g(u)$ et $h(v)$ des fonctions positives croissantes.

Alors on a :

$$\big|N(x)\big| < 2x \left\{ \frac{A \log y}{g\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{3B \log\left(\frac{x}{y}\right)}{\pi^2 h(y)} - \frac{A \log\log y}{g\left(\frac{x}{y}\right)} k_0(x,y) \right\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{1}{\log\log y}\left\{\frac{Bg\left(\frac{x}{y}\right)}{Ah(y)} + \frac{B}{2h(y)} + \frac{g\left(\frac{x}{y}\right)}{2Ax}\right\}$$

Démonstration :

Si $x \geq 1$, $y > 1$ et $x \geq y$, en appliquant la relation (3.4) du lemme 3 on obtient :

$$\begin{aligned}\left|N(x)+1\right| &\leq Ax\sum_{k\leq y}\frac{|\Lambda(k)-1|}{kg\left(\frac{x}{k}\right)} + Bx\sum_{j\leq\frac{x}{y}}\frac{|\mu(j)|}{jh\left(\frac{x}{j}\right)} + \frac{ABx}{h(y)g\left(\frac{x}{y}\right)}\\ &\leq \frac{Ax}{g\left(\frac{x}{y}\right)}\sum_{k\leq y}\frac{1}{k}\left|\Lambda(k)-1\right| + \frac{Bx}{h(y)}\sum_{j\leq\frac{x}{y}}\frac{|\mu(j)|}{j} + \frac{ABx}{h(y)g\left(\frac{x}{y}\right)}\end{aligned}$$

donc en utilisant (2.1) et (3.1) on a :

$$\left|N(x)\right| \leq \frac{2Ax\big(\log y - \log\log y\big)}{g\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{Bx}{h(y)}\left(\frac{6}{\pi^2}\log\frac{x}{y} + 1.166\right) + \frac{ABx}{h(y)g\left(\frac{x}{y}\right)} + 1$$

puis :

$$\left|N(x)\right| < 2x\left\{\frac{A\log y}{g\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{3B\log\left(\frac{x}{y}\right)}{\pi^2 h(y)} - \frac{A\log\log y}{g\left(\frac{x}{y}\right)}k_0(x,y)\right\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{1}{\log\log y}\left\{\frac{0.583Bg\left(\frac{x}{y}\right)}{Ah(y)} + \frac{B}{2h(y)} + \frac{g\left(\frac{x}{y}\right)}{2Ax}\right\}$$

Pour simplifier les calculs, nous ajoutons une condition qui sera toujours très largement vérifiée et qui permet notament d'absorber le dernier terme (qui provient du terme $+1$ dans $|N(x)+1|$).

Lemme 4. [version 2] *Si de plus on a* $\frac{1}{2x} < \frac{0.017B}{h(y)}$ *et* $g\left(\frac{x}{y}\right) \geq 2.5A$, *alors:*

$$\left|N(x)\right| < 2x\left\{\frac{A\log y}{g\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{3B\log\left(\frac{x}{y}\right)}{\pi^2 h(y)} - \frac{A\log\log y}{g\left(\frac{x}{y}\right)}k_0(x,y)\right\} \tag{3.7}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8Bg(\frac{x}{y})}{Ah(y)\log\log y}$$

Démonstration : Si $\frac{1}{2x} < \frac{0.017B}{h(y)}$, alors :

$$\frac{0.583Bg\left(\frac{x}{y}\right)}{Ah(y)} + \frac{g\left(\frac{x}{y}\right)}{2Ax} < \frac{0.6Bg\left(\frac{x}{y}\right)}{Ah(y)}$$

d'où

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{B}{h(y)\log\log y}\left\{\frac{0.6Bg\left(\frac{x}{y}\right)}{A} + \frac{1}{2}\right\}.$$

Pour la deuxième étape de la simplification, on remarque que g vérifie $\frac{g(u)}{A} \geq 2.5$ pour $x \geq 2$, ou bien peut être remplacé par une fonction g_1 qui vérifie cette propriété.

En effet $|M(u)| \leq 0.4\,u$ pour $u \geq 2$, et on peut donc toujours remplacer $g(u)$ par $g_1(u)$ définie par :

$$\begin{cases} g_1(u) = 2.5\;\; A & \text{pour } g(u) < 2.5\;\; A \\ g_1(u) = g(u) & \text{pour } g(u) \geq 2.5\;\; A \end{cases}$$

en conservant la condition positive croissante.

Si donc $\frac{g(\frac{x}{y})}{A} \geq 2.5$, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{5}\frac{g(\frac{x}{y})}{A}$, donc $\frac{0.6g(\frac{x}{y})}{A} + \frac{1}{2} < \frac{0.8g(\frac{x}{y})}{A}$, et enfin :

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8Bg(\frac{x}{y})}{Ah(y)\log\log y}$$

Dans les utilisations successives de (3.7), on aura toujours $x > e^{164}$, $B < 2\;10^7$, y de l'ordre de $(\log x)^{1/3}$ et $h(y) = (\log y)^2$: on peut donc vérifier que les conditions supplémentaires sont largement satisfaites.

Remarque : la simplification apportée à l'expression de $k_0(x,y)$ ne fait que repousser la valeur de x au-delà de laquelle $k_0(x,y) \geq 0$, ce qui sera sans importance dans la pratique, en laissant inchangée la majoration obtenue pour $|M(x)|$.

4. PREMIÈRE MAJORATION ASYMPTOTIQUE DE M(x)

Proposition 5. *On considère deux majorations :*

$$\big|M(u)\big| \leq \frac{Au}{(\log u)^{\alpha}} \quad si \quad u \geq u_0 \ , \qquad \big|\rho(v)\big| \leq \frac{Bv}{(\log v)^{\beta}} \quad si \quad v \geq v_0 \ ,$$

avec α, $\beta \geq 0$, $\alpha < \beta$.

On se donne x, *on pose :*

$$D = \big(\frac{3B\beta}{\pi^2 A}\big)^{\frac{1}{\beta+1}} \ ,$$

et on définit y *par*

$$\log y = D\big(\log x\big)^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}} \ .$$

On considère une valeur de T *supérieure à* $\big(\frac{0.8B}{AD^{\beta}\log D}\big)^{\frac{\beta+1}{\beta-\alpha}}$ *et on pose*

$$a = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta+1},$$

$$f(q) = \frac{2AD}{(1-q)^{\alpha}} + \frac{6B}{\pi^2 D^{\beta}}(1-q) \ , \ q_0 = \frac{D}{(T)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}} \ , \ \epsilon = Max\big(f(0), f(q_0)\big).$$

Alors, si $x \geq e^T$, $\frac{x}{y} \geq u_0$, $y \geq v_0$, $\frac{1}{2x} < \frac{0.017\,B}{(\log y)^{\beta}}$ *et* $(\log\frac{x}{y})^{\alpha} \geq 2.5\,A$, *on a la majoration :*

$$\big|N(x)\big| < \frac{\epsilon x}{\big(\log x\big)^{a}} \ . \tag{4.1}$$

Remarque : dans l'utilisation récurrente de la proposition 5 pour calculer des majorations successives de $|M(x)|$, la valeur de T sera choisie pour que e^T soit exactement au "raccord" d'une majoration et de la suivante, ce qui permet d'optimiser la valeur du coefficient.

Début de la démonstration : En prenant $g(u) = (\log u)^{\alpha}$ et $h(v) = (\log v)^{\beta}$, et en remplaçant dans la majoration (3.7) de $N(x)$ on obtient :

$$\big|N(x)\big| < 2x\Big\{\frac{A\log y}{\big\{\log\frac{x}{y}\big\}^{\alpha}} + \frac{3B\log\frac{x}{y}}{\pi^2\{\log y\}^{\beta}} - \frac{A\log\log y}{\big\{\log\frac{x}{y}\big\}^{\alpha}}k_0(x,y)\Big\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8B\{\log\frac{x}{y}\}^{\alpha}}{A\{\log y\}^{\beta}\log\log y}$$

Soit la fonction ϕ de y définie par :

$$\phi(y) = \frac{A\log y}{\{\log\frac{x}{y}\}^{\alpha}} + \frac{3B\log\frac{x}{y}}{\pi^2\{\log y\}^{\beta}}.$$

En dérivant ϕ on obtient :

$$\phi'(y) = \frac{A(\log x - \log y) + A\alpha\log y}{y(\log x - \log y)^{\alpha+1}} - \frac{3B\log y + 3B\beta(\log x - \log y)}{\pi^2 y(\log y)^{\beta+1}}$$

La valeur optimale de y est donnée par $\phi'(y) = 0$. On ne peut pas résoudre exactement cette équation et on en cherche une solution approchée. Une étude heuristique montre que $\log y$ sera petit devant $\log x$. On peut donc négliger les termes en $\log y$ devant ceux en $\log x$ dans les numérateurs et les dénominateurs, et écrire :

$$\frac{A\log x}{y(\log x)^{\alpha+1}} - \frac{3B\beta\log x}{\pi^2 y(\log y)^{\beta+1}} = 0$$

ce qui donne la valeur de y définie dans l'énoncé de la proposition :

$$\log y = D(\log x)^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}} \quad \text{avec} \quad D = \left(\frac{3B\beta}{\pi^2 A}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}. \tag{4.2}$$

En utilisant (3.7) et (4.2) dans la relation donnée dans le lemme 4 (version 2), et sous la condition supplémentaire $x > y > e$, on a :

(4.3)

$$|N(x)| < \frac{2x}{(\log x)^{\frac{\alpha\beta-1}{\beta+1}}}\left\{\frac{AD}{(1-q)^{\alpha}} + \frac{3B}{\pi^2 D^{\beta}}(1-q) - \frac{A\log\log y}{(1-q)^{\alpha}(\log x)^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}}k_0(x,y)\right\}$$

avec

$$q = \frac{\log y}{\log x} = \frac{D}{(\log x)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}}$$

et

$$\begin{aligned} k_0(x,y) &\geq 1 - \frac{0.8B(1-q)^{\alpha}}{AD^{\beta}\{\log D + \frac{\alpha+1}{\beta+1}\log\log x\}\{\log x\}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}} \\ &> k(x) = 1 - \frac{0.8B}{AD^{\beta}\{\log D + \frac{\alpha+1}{\beta+1}\log\log x\}\{\log x\}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}} \end{aligned}$$

donc on peut réécrire (4.3) en remplaçant $k_0(x,y)$ par $k(x)$.

Remarque : Comme $\alpha < \beta$, $k(x) \longrightarrow 1$ quand $x \to \infty$, il existe donc un x_0 tel que, si $x > x_0$ on a $k(x) \geq 0$.

Lemme 6. *Si on choisit T en respectant la contrainte énoncée à la proposition 5, alors $k(x) \geq 0$ pour $x > e^T$.*

Démonstration du lemme :

$$T \geq \Big(\frac{0.8B}{AD^\beta \log D}\Big)^{\frac{\beta+1}{\beta-\alpha}}$$

ou encore

$$(T)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}} \geq \frac{0.8B}{AD^\beta \log D}$$

or $x \geq e^T$ (et on aura toujours $T > e$), donc

$$(\log x)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}} \geq (T)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}} \geq \frac{0.8B}{AD^\beta\big\{\log D + \frac{\alpha+1}{\beta+1}\log\log x\big\}}$$

ce qui implique :

$$\frac{0.8B}{AD^\beta\big\{\log D + \frac{\alpha+1}{\beta+1}\log\log x\big\}(\log x)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}} \leq 1,$$

soit $k(x) \geq 0$.

Fin de la démonstration de la proposition 5 :

Dans l'énoncé de cette proposition, si x est supérieur à e^T, $k(x) \geq 0$, et a fortiori $k_0(x,y) \geq 0$. De la majoration (4.3) on déduit donc :

$$\big|N(x)\big| < \frac{x}{\big(\log x\big)^{\frac{\alpha\beta-1}{\beta+1}}}\left\{\frac{2AD}{(1-q)^\alpha} + \frac{6B}{\pi^2 D^\beta}(1-q)\right\} .$$

On a :

$$f(q) = \frac{2AD}{(1-q)^\alpha} + \frac{6B}{\pi^2 D^\beta}(1-q)$$

$$f'(q) = \frac{2\alpha AD}{(1-q)^{\alpha+1}} - \frac{6B}{\pi^2 D^\beta}$$

$$f''(q) = \frac{2\alpha(\alpha+1)AD}{(1-q)^{\alpha+2}} \quad \geq 0$$

donc f est une fonction convexe, comme $x \geq e^T$, et que $q = \frac{\log y}{\log x}$ est une fonction décroissante de x, on a :

$$0 \leq q \leq q_0 = \frac{D}{(T)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta+1}}} \ ,$$

et donc $f(q) \leq Max\big(f(0), f(q_0)\big)$ pour tout $q \in [0, q_0]$. On obtient finalement la majoration (4.1), ce qui termine la démonstration de la proposition 5.

Proposition 7. *On considère le paramètre T utilisé dans la proposition 5 et le lemme 6, et on introduit un paramètre supplémentaire $C > 2\,160\,535$. Alors, pour $x > \max(e^T, C^{9/10})$, et avec les notations et conditions de la proposition 5, on a :*

$$\big|M(x)\big| \leq \frac{\epsilon' x}{(\log x)^{a+1}} \tag{4.4}$$

avec

$$\epsilon' = \epsilon + \left(\frac{1}{4345} + \frac{\epsilon}{(\log C)^{a+1}}\right)\frac{C\,T^{a+1}}{e^T} + \frac{\epsilon T^{a+1}}{(\log C)^{a+2}e^{T/10}} + \frac{\epsilon}{T(0.9)^{a+2}}$$

Remarque : le choix optimal de C pour l'utilisation de la proposition 7 sera donné par $\log C = \frac{9}{10}T$, mais l'incidence pratique de ce choix est absolument négligeable, car le seul terme correctif pour ϵ' qui soit alors significativement différent de 0 est $\frac{\epsilon}{T(0.9)^{a+2}}$.

Démonstration : On sait que $|N(x)| < \frac{\epsilon x}{(\log x)^a}$ si $x \geq e^T$, avec T la constante définie au lemme 6.

Comme $C \geq 2\,160\,535$ et $x \geq C^{9/10}$, la relation (3.5) peut s'écrire :

$$\big|M(x)\big| \leq \frac{C}{4345} + \frac{\epsilon C}{(\log C)^{a+1}} + \frac{\big|N(x)\big|}{\log x} + \epsilon \int_C^x \frac{du}{(\log u)^{a+2}}$$

avec

$$\int_C^x \frac{du}{(\log u)^{a+2}} \le \frac{1}{(\log C)^{a+2}} \int_C^{x^{9/10}} du + \frac{1}{(0.9\log x)^{a+2}} \int_{x^{9/10}}^x du$$
$$\le \frac{x^{9/10}}{(\log C)^{a+2}} + \frac{x}{(0.9\log x)^{a+2}}.$$

On obtient ainsi, en utilisant la condition $x > e^T$ (et en notant que, pour les valeurs de x et de a qui seront utilisées, la fonction $\frac{(\log x)^{a+1}}{x}$ est décroissante) :

$$\begin{aligned}|M(x)| &\le \frac{x}{(\log x)^{a+1}} \Bigg\{ \left(\frac{1}{4345} + \frac{\epsilon}{(\log C)^{a+1}} \right) \frac{C(\log x)^{a+1}}{x} + \epsilon \\ &\qquad + \frac{\epsilon(\log x)^{a+1}}{(\log C)^{a+2} x^{1/10}} + \frac{\epsilon}{(0.9)^{a+2}\log x} \Bigg\} \\ &\le \frac{x}{(\log x)^{a+1}} \Bigg\{ \left(\frac{1}{4345} + \frac{\epsilon}{(\log C)^{a+1}} \right) \frac{C\,T^{a+1}}{e^T} + \epsilon \\ &\qquad + \frac{\epsilon\, T^{a+1}}{(\log C)^{a+2} e^{T/10}} + \frac{\epsilon}{T\,(0.9)^{a+2}} \Bigg\}\end{aligned}$$

et on a :

$$|M(x)| \le \frac{\epsilon' x}{(\log x)^{a+1}} \tag{4.4}$$

avec la valeur de ϵ' donnée dans l'énoncé de la proposition.

Résultats numériques :

Théorème 1. *On a la majoration*

$$|M(x)| < \frac{0.002969\ x}{(\log x)^{1/2}} \quad \textit{pour } x \ge 142\,194 \tag{4.5}$$

Démonstration :

On utilise les propositions 5 et 7 avec les majorations (1.1) $|M(x)| < \frac{x}{4345}$ pour $x \ge 2\,160\,535$ et (3.2) $|\rho(x)| < \frac{0.00776291\ x}{\log x}$ pour $x > e^{22}$. Cela donne les valeurs suivantes des constantes :

$A = 1/4345$, $\alpha = 0$, $B = 0.00776291$, $\beta = 1$, d'où $D = 3.201975$.

La valeur optimale de T est 166.42, les conditions $x > 2\,160\,535\,y$, $y > e^{22}$ seront vérifiées.

On a ensuite

$$\left|N(x)\right| < \frac{0.0029478\ x}{(\log x)^{-1/2}} \quad \text{pour } x > e^{166.42},$$

puis, en remplaçant dans (4.5) :

$$\left|M(x)\right| < \frac{0.002969\ x}{(\log x)^{1/2}} \quad \text{pour } x > e^{166.42}.$$

Pour $2\,160\,535 < x < e^{166.42}$ la majoration (1.1) $\frac{x}{4345}$ implique $\frac{0.002969\ x}{(\log x)^{1/2}}$, et un calcul rapide par ordinateur permet de vérifier la majoration entre 142 194 et 2 160 535, ce qui permet de conclure :

$$\left|M(x)\right| < \frac{0.002969\ x}{(\log x)^{1/2}} \quad \text{pour } x \geq 142\,194$$

Chaque fois que l'on dispose de majorations $|M(x)| \leq \frac{A\,x}{(\log x)^{\alpha}}$ et $|\rho(x)| \leq \frac{B\,x}{(\log x)^{\beta}}$, on peut en déduire une nouvelle majoration $|M(x)| \leq \frac{c\,x}{(\log x)^{\gamma}}$, avec $\gamma = \frac{(\alpha+1)\beta}{\beta+1}$, à condition toutefois que $3B\beta$ soit suffisamment grand par rapport à $\pi^2 A$, de façon à ce que le paramètre $D = \left(\frac{3B\beta}{\pi^2 A}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$ ne soit pas trop petit. Dans le cas contraire, la valeur de T dans la proposition 5 est trop grande pour donner un résultat efficace, et en outre la condition $y \geq v_0$ n'est pas remplie.

En appliquant ce principe, et en calculant les valeurs effectives des coefficients et des bornes suivant la méthode décrite pour la démonstration du théorème 1, nous avons obtenu, en prenant $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$ le théorème 2.

Théorème 2. *On a la majoration*

$$\left|M(x)\right| < \frac{0.10917\ x}{\log x} \quad \textit{pour } x \geq 685. \tag{4.6}$$

Corollaire. *On a la majoration*

$$\left|M(x)\right| \leq \frac{0.6437752\ x}{\log x} \quad \text{pour } x > 1,$$

et c'est la meilleure majoration possible en $\frac{x}{\log x}$ *valable pour tout* $x > 1$ $\big($ *en effet* $|M(5)| = 2 = \frac{0.6437752\times 5}{\log 5}\big)$

Démonstration : un calcul rapide par ordinateur permet de la vérifier entre 1 et 685 ; pour $x \geq 685$ on utilise la majoration $|M(x)| \leq \frac{0.10917\,x}{\log x}$.

Nous avons enfin exploré les majorations que l'on peut ainsi obtenir en itérant le principe exposé plus haut et sélectionné, après chacune, la suivante meilleure. Ce cheminement optimal, arrêté à $\alpha = \frac{236}{75}$#3.1466..., est explicité par les deux tableaux ci-dessous :

α	A	β	B		γ	c
0	1/4345	1	0.00776291		1/2	0.002969
1/2	0.002969	2	8.072		1	0.10917
1	0.10917	2	8.072		4/3	1.3640
4/3	1.3640	2	8.072		14/9	7.8538

α	A	β	B		γ	c
14/9	7.8538	3	10 644		23/12	173.9913
23/12	173.9913	3	10 644		35/16	1 893.436
23/12	173.9913	4	16 570 000		7/3	6 989.807
35/16	1 893.436	4	16 570 000		51/20	49 337.9
7/3	6 989.807	4	16 570 000		8/3	143 469.8
8/3	143 469.8	4	16 570 000		44/15	1 689 105
44/15	1 689 105	4	16 570 000		236/75	12 590 292

L'ensemble de ces résultats est récapitulé dans le théorème suivant.

Théorème 3. *Les meilleures majorations de* $|M(x)|$ *de la forme* $\frac{c\,x}{\{\log x\}^{\alpha}}$

sont :

pour $x \in [2\,160\,535, e^{166.42}]$	$\dfrac{x}{4345}$
pour $x \in [e^{166.42}, e^{1352.03}]$	$\dfrac{0.002969\,x}{(\log x)^{1/2}}$
pour $x \in [e^{1352.03}, e^{1950.45}]$	$\dfrac{0.10917\,x}{\log x}$
pour $x \in [e^{1950.45}, e^{2637.52}]$	$\dfrac{1.3640\,x}{(\log x)^{4/3}}$
pour $x \in [e^{2637.52}, e^{5319.31}]$	$\dfrac{7.8538\,x}{(\log x)^{14/9}}$
pour $x \in [e^{5319.31}, e^{6728.23}]$	$\dfrac{173.9913\,x}{(\log x)^{23/12}}$
pour $x \in [e^{6728.23}, e^{7070.51}]$	$\dfrac{1893.436\,x}{(\log x)^{35/16}}$
pour $x \in [e^{7070.51}, e^{8053.99}]$	$\dfrac{6989.807\,x}{(\log x)^{7/3}}$
pour $x \in [e^{8053.99}, e^{8647.39}]$	$\dfrac{49337.9\,x}{(\log x)^{51/20}}$
pour $x \in [e^{8647.39}, e^{10371.95}]$	$\dfrac{143469.8\,x}{(\log x)^{8/3}}$
pour $x \in [e^{10371.95}, e^{12282.3}]$	$\dfrac{1689105\,x}{(\log x)^{44/15}}$
pour $x \in [e^{12282.3}, \infty]$	$\dfrac{12590292\,x}{(\log x)^{236/75}}$

Remarque : chacune de ces majorations est donnée sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ où elle est meilleure, mais son domaine propre de validité est $[x_0, \infty[$. Pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 1$, les valeurs de x_0 ont déjà été indiquées (formule 1.2, théorèmes 1 et 2); pour toutes les autres valeurs, on peut prendre $x_0 = 1$ (le domaine est alors ouvert à gauche).

Le théorème 3 permet d'interpoler les exposants. On peut par exemple, et parce qu'elle peut être commode à utiliser en pratique, donner une majoration avec l'exposant $\alpha = 2$.

Corollaire. *On a la majoration*

$$\left|M(x)\right| < \frac{362.7\ x}{(\log x)^2} \quad pour \quad x > 1.$$

Démonstration : en utilisant les deux majorations suivantes : $|M(x)| \leq \frac{173.9913\, x}{(\log x)^{23/12}}$ et $|M(x)| \leq \frac{1893.436\, x}{(\log x)^{35/16}}$. On note que $\frac{173.9913\, x}{(\log x)^{23/12}} = \frac{1893.436\, x}{(\log x)^{35/16}}$ pour $\log x = 6728.23$, et que la valeur commune des deux expressions vaut alors $\frac{362.7\, x}{(\log x)^2}$. Cette dernière majoration est donc vraie pour $\log x < 6728.23$ (entrainée par celle en $(\log x)^{-23/12}$), et pour $\log x > 6728.23$ (entrainée par celle en $(\log x)^{-35/16}$).

Il faut remarquer en conclusion qu'à exposant égal ou voisin, les coefficients que nous donnons représentent une amélioration d'un facteur d'environ 15 sur les coefficients donnés par Schoenfeld [5]. Néanmoins Schoenfeld, préoccupé d'obtenir un exposant supérieur à 1, avait négligé l'utilisation de la majoration $|\rho(x)| < \frac{0.00776291\, x}{\log x}$ pour $x > e^{22}$, qui fournit pourtant le point de départ le plus efficace.

5. DEUXIÈME MAJORATION ASYMPTOTIQUE DE M(x)

La deuxième application du lemme 4 de Schoenfeld consiste à choisir les fonctions g et h (qui interviennent aux dénominateurs des majorations de $|M(x)|$ et $|\rho(x)|$) de la façon suivante :

$$g(u) = \frac{\big(\log u\big)^{\alpha}}{\big(\log\log u\big)^{\delta}} \quad \text{et} \quad h(v) = \left(\frac{\log v}{R}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\sqrt{\frac{\log v}{R}}} \;. \tag{5.1}$$

Avec au départ $\alpha = \delta = 0$, on obtiendra une nouvelle série de majorations de $|M(x)|$ en $\frac{x(\log\log x)^{2k}}{(\log x)^k}$, chaque pas de la récurrence augmentant k de 1.

Proposition 8. *Soit x donné. On considère deux majorations :*

$$\big|M(u)\big| \leq \frac{Au\big(\log\log u\big)^{\delta}}{\big(\log u\big)^{\alpha}},\ \text{si } u \geq u_0, \big|\rho(v)\big| \leq \frac{Bv\big(\frac{\log v}{R}\big)^{\frac{1}{4}}}{e^{\sqrt{\frac{\log v}{R}}}} \quad , \quad \text{si} \quad v \geq v_0 \;\; ,$$

et on suppose en outre α entier ≥ 0, $\delta = 2\alpha$ et $R > 1$. On pose :

$$T = \max\left(4R^2(\alpha+1)^4, \left(\frac{0.8B\sqrt{\alpha+1}}{A\log R}\right)^{\frac{5}{4}}\right),$$

$$\epsilon = 2^{\alpha+1}AR(\alpha+1)^2 + \frac{6B\sqrt{\alpha+1}}{\pi^2(\log T)^{3/2}}.$$

Alors, si $x \geq e^T$, $\frac{x}{y} \geq u_0$, $y \geq v_0$, $\frac{1}{2x} < \frac{0.017\,B\left(\frac{\log y}{R}\right)^{1/4}}{e^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}}$ *et* $\frac{(\log\frac{x}{y})^\alpha}{(\log\log\frac{x}{y})^\delta} \geq 2.5\,A$, *on a la majoration :*

$$|N(x)| < \frac{\epsilon x\left(\log\log x\right)^{2\alpha+2}}{\left(\log x\right)^\alpha} \ . \tag{5.2}$$

La proposition 8 est l'équivalent, avec ce deuxième type de majorations de $|M|$ et de $|\rho|$, de la proposition 5. Sa démonstration suit le même schéma.

Début de la démonstration : en remplacant les expressions de g et h dans la majoration (3.7) de $N(x)$ on obtient :

$$\left|N(x)\right| < 2x\left\{\frac{A\log y\left(\log\log\frac{x}{y}\right)^\delta}{\left(\log\frac{x}{y}\right)^\alpha} + \frac{3B\log\frac{x}{y}\left(\frac{\log y}{R}\right)^{1/4}}{\pi^2 e^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}} - \frac{A\log\log y\left(\log\log\frac{x}{y}\right)^\delta}{\left(\log\frac{x}{y}\right)^\alpha}k_0(x,y)\right\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8B\left(\log\frac{x}{y}\right)^\alpha\left(\frac{\log y}{R}\right)^{1/4}}{Ae^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}\left(\log\log\frac{x}{y}\right)^\delta\log\log y} \ .$$

L'un des problèmes est la minoration du facteur $\left(\log\frac{x}{y}\right)^\alpha$ au dénominateur du premier terme. Lorsque α sera supérieur ou égal à 1, cela se fera en majorant y par $\sqrt{x}$. Cette majoration ne sera pas possible techniquement pour $\alpha = 0$, mais cela n'a aucune importance car le dénominateur $\left(\log\frac{x}{y}\right)^\alpha$ s'évanouit. Nous devons néanmoins traiter séparément le cas $\alpha = 0$.

Si $\alpha = \delta = 0$, la majoration de $|N(x)|$ devient :

$$\left|N(x)\right| < 2x\left\{A\log y + \frac{3B\log\frac{x}{y}\left(\frac{\log y}{R}\right)^{1/4}}{\pi^2 e^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}} - A(\log\log y)k_0(x,y)\right\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8B\left(\frac{\log y}{R}\right)^{1/4}}{Ae^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}\log\log y} \ .$$

En anticipant sur la valeur optimale de y qui sera détérminée plus loin de façon générale, on prend $Y = \frac{\log y}{R} = (\log\log x)^2$. On reporte dans la majoration de $|N(x)|$ et on obtient :

$$\big|N(x)\big| < 2x\left\{AR\big(\log\log x\big)^2 + \frac{3B\log x\sqrt{\log\log x}}{\pi^2\log x} - A(\log\log y)k_0(x,y)\right\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8\ \ B\sqrt{\log\log x}}{A\log x\log R}\ \ .$$

Comme $T > \big(\frac{0.8\ \ B}{A\log R}\big)^{5/4}$, on a $k_0(x,y) \geq 0$ (cf lemme 9 plus loin), et alors

$$\big|N(x)\big| < x\big(\log\log x\big)^2\left\{2AR + \frac{6B}{\pi^2(\log\log x)^{3/2}}\right\}.$$

Ce qui donne le résultat énoncé pour $\alpha = \delta = 0$:

$$\big|N(x)\big| < \epsilon x\big(\log\log x\big)^2 \qquad \text{pour } x > e^T\ \ ,$$

avec $\epsilon = 2AR + \frac{6B}{\pi^2(\log T)^{3/2}}$.

On revient maintenant au cas $\alpha \geq 1$. On aura $y > e$ donc $\log\log y > 0$, et on peut alors écrire :

$$\big|N(x)\big| < 2x\left\{\frac{A\log y\big(\log\log x\big)^\delta}{\big(\log\frac{x}{y}\big)^\alpha} + \frac{3B\log x\big(\frac{\log y}{R}\big)^{1/4}}{\pi^2 e^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}}\right.$$

$$\left.-\frac{A\log\log y\big(\log\log\frac{x}{y}\big)^\delta}{\big(\log\frac{x}{y}\big)^\alpha}k_0(x,y)\right\}$$

avec

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8B\big(\log\frac{x}{y}\big)^\alpha\big(\frac{\log y}{R}\big)^{1/4}}{Ae^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}\big(\log\log\frac{x}{y}\big)^\delta\log\log y}\ \ .$$

Soit la fonction ϕ de y définie par :

$$\phi(y) = \phi_1(y) + \phi_2(y)$$

avec

$$\phi_1(y) = \frac{A\log y\big(\log\log x\big)^{\delta}}{\big(\log\frac{x}{y}\big)^{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(y) = \frac{3B\log x\big(\frac{\log y}{R}\big)^{1/4}}{\pi^2 e^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}}.$$

En dérivant ϕ_1 et ϕ_2 on obtient :

$$\phi_1'(y) = \frac{A\big(\log\log x\big)^{\delta}\big(\log\frac{x}{y} + \alpha\log y\big)}{y\big(\log\frac{x}{y}\big)^{\alpha+1}}$$

et

$$\phi_2'(y) = \frac{3B\log x}{2\pi^2 yRe^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}}\left\{\frac{1}{2\big(\frac{\log y}{R}\big)^{3/4}} - \frac{1}{\big(\frac{\log y}{R}\big)^{1/4}}\right\}.$$

La valeur optimale de y est donnée par $\phi'(y) = 0$. On ne peut pas résoudre exactement cette équation et on en cherche une solution approchée. En faisant cela, on n'introduit aucune erreur dans le résultat, mais on risque simplement d'obtenir une majoration moins bonne que la véritable majoration optimale. Une étude heuristique montre que $\log y$ sera petit devant $\log x$. On peut donc négliger les termes en $\log y$ devant ceux en $\log x$ dans les numérateurs et les dénominateurs, et écrire :

$$\phi'(y) = \frac{A\big(\log\log x\big)^{\delta}}{y\big(\log x\big)^{\alpha}} + \frac{3B\log x}{2\pi^2 yRe^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}}\left\{\frac{1}{2\big(\frac{\log y}{R}\big)^{3/4}} - \frac{1}{\big(\frac{\log y}{R}\big)^{1/4}}\right\} = 0.$$

On pose $Y = \frac{\log y}{R}$ et en supposant que $2Y^{1/2} >> 1$ alors la solution de $\phi'(y) = 0$ est donnée approximativement par :

$$Y^{1/4}e^{\sqrt{Y}} = \frac{3B\big(\log x\big)^{\alpha+1}}{2\pi^2 RA\big(\log\log x\big)^{\delta}},$$

on a donc

$$\sqrt{Y} = f(x) - \frac{1}{4}\log Y. \tag{5.3}$$

avec $f(x) = \log\frac{3B}{2\pi^2RA} + (\alpha+1)\log\log x - \delta\log\log\log x$.

On rappelle que l'on cherche une solution approchée. Lorsque $f(x)$ tend vers l'infini (et c'est le cas ici), c'est un exercice d'analyse simple de montrer que la solution de (5.3) est équivalente à $f^2(x)$ (on peut même déterminer un développement limité : $Y = f^2(x) - f(x)\log f(x) + \ldots$, mais c'est inutile pour notre usage).

On prend $Y = \frac{\log y}{R} = \big((\alpha+1)\log\log x - \delta \log\log\log x\big)^2 \simeq f^2(x)$, et on peut écrire

$$e^{\sqrt{Y}} = \frac{\big(\log x\big)^{\alpha+1}}{\big(\log\log x\big)^{\delta}} \quad .$$

Lemme 9. *Si $\delta = 2\alpha$, et si on définit T par :*

$$T = \max\left(4R^2(\alpha+1)^4, \left(\frac{0.8B\sqrt{\alpha+1}}{A\log R}\right)^{5/4}\right),$$

on a les deux résultats suivants :

$$\log y \le \frac{1}{2}\log x \qquad \textit{pour } \alpha \ge 1 \textit{ et } x > e^T \quad ,$$

et

$$k_0(x,y) \ge 0 \qquad \textit{pour } x > e^T \quad .$$

Démonstration de la première assertion du lemme 9 :

Comme $T \ge 4R^2(\alpha+1)^4$, si $x > e^T$ on a $\log x > 4R^2(\alpha+1)^4$, et comme

$$\big(\log\log x - \log\log\log x\big)^2 < \sqrt{\log x} \qquad \text{pour tout } x > e^e$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \log y &= R\big((\alpha+1)\log\log x - 2\alpha\log\log\log x\big)^2 \\ &\le R(\alpha+1)^2\big(\log\log x - \log\log\log x\big)^2 \le R(\alpha+1)^2\sqrt{\log x} < \frac{1}{2}\log x \quad . \end{aligned}$$

Démonstration de la seconde assertion du lemme 9 :

$$k_0(x,y) = 1 - \frac{0.8B\big(\log\frac{x}{y}\big)^{\alpha}\big(\frac{\log y}{R}\big)^{1/4}}{Ae^{\sqrt{\frac{\log y}{R}}}\big(\log\log\frac{x}{y}\big)^2\alpha\log\log y} \quad .$$

En prenant $\frac{\log y}{R} = \big((\alpha+1)\log\log x - 2\alpha\log\log\log x\big)^2$, on a :

$$k_0(x,y) > 1 - \frac{0.8\ \ B\ \ \sqrt{(\alpha+1)\log\log x}\big(\log\log x\big)^{2\alpha}}{A\log R\big(\log x\big)^{\alpha+1}}\left(\frac{\log\frac{x}{y}}{\big(\log\log\frac{x}{y}\big)^2}\right)^{\alpha} .$$

Comme la fonction $t \longmapsto \frac{\log t}{\big(\log\log t\big)^2}$ est croissante pour $t \geq e^{e^2}$, on a

$$\frac{\log\frac{x}{y}}{\big(\log\log\frac{x}{y}\big)^2} < \frac{\log x}{\big(\log\log x\big)^2}.$$

Ce qui donne :

$$k_0(x,y) > 1 - \frac{0.8\ \ B\ \ \sqrt{(\alpha+1)}}{A\log R}\frac{\sqrt{\log\log x}}{\log x} .$$

Comme $\log\log x < \big(\log x\big)^{2/5}$ pour tout $x > e$, on a alors $\frac{\sqrt{\log\log x}}{\log x} < \frac{1}{\big(\log x\big)^{4/5}}$, on en déduit donc :

$$k_0(x,y) > 1 - \frac{0.8\ \ B\ \ \sqrt{(\alpha+1)}}{A\log R}\frac{1}{\big(\log x\big)^{4/5}} .$$

Puisque $T > \left(\frac{0.8B\sqrt{\alpha+1}}{A\log R}\right)^{5/4}$, alors $k_0(x,y) > 0$, ce qui termine la démonstration du lemme 9.

Fin de la démonstration de la proposition 8 :

En reportant dans la majoration de $|N(x)|$ la valeur $\frac{\log y}{R} = \big((\alpha+1)\log\log x - 2\alpha\log\log\log x\big)^2$, et en utilisant $k_0(x,y) > 0$, on obtient :

$$\big|N(x)\big| < \frac{2x\big(\log\log x\big)^{\delta+2}}{\big(\log x\big)^{\alpha}}\left\{2^{\alpha}AR(\alpha+1)^2 + \frac{3B\sqrt{(\alpha+1)}}{\pi^2\big(\log\log x\big)^{3/2}}\right\} .$$

On majore le deuxième facteur par sa valeur pour $x = e^T$ et on a :

$$\big|N(x)\big| < \frac{\epsilon x\big(\log\log x\big)^{\delta+2}}{\big(\log x\big)^{\alpha}} \tag{5.2}$$

avec

$$\epsilon = 2^{\alpha+1}AR(\alpha+1)^2 + \frac{6B\sqrt{(\alpha+1)}}{\pi^2\big(\log T\big)^{3/2}},$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 8.

Proposition 10. *Pour $x > e^T$, avec les notations et les conditions de la proposition 8, on a :*

$$\big|M(x)\big| < \frac{\epsilon' x\big(\log\log x\big)^{\delta+2}}{\big(\log x\big)^{\alpha+1}} \tag{5.4}$$

avec

$$\epsilon' = \epsilon + \left(\frac{1}{4345} + \frac{\epsilon(\log 189)^{\delta+2}}{(189)^{\alpha+1}}\right)\frac{(T)^{\alpha+1}}{e^{T-189}(\log T)^{\delta+2}} + \frac{\epsilon(T)^{\alpha+1}(\log 189)^{\delta+2}}{(189)^{\alpha+2}e^{T/10}(\log T)^{\delta+2}} + \frac{\epsilon}{(0.9)^{\alpha+2}T}$$

Démonstration : On sait que $\big|N(x)\big| < \frac{\epsilon x\left(\log\log x\right)^{\delta+2}}{\left(\log x\right)^{\alpha}}$ si $x \geq e^T$, avec T la constante définie au lemme 9.

Si $C \geq 2\,160\,535$ et $x \geq C^{9/10}$, la relation (3.5) peut s'écrire :

$$\big|M(x)\big| \leq \frac{C}{4345} + \frac{\epsilon C(\log\log C)^{\delta+2}}{(\log C)^{\alpha+1}} + \frac{\big|N(x)\big|}{\log x} + \epsilon\int_C^x \frac{(\log\log u)^{\delta+2}du}{(\log u)^{\alpha+2}} \ .$$

Comme $\log\log x \geq \frac{\delta+2}{\alpha+2}$, la fonction $x \longmapsto \frac{(\log\log x)^{\delta+2}}{(\log x)^{\alpha+2}}$ est décroissante et on a alors

$$\begin{aligned}
&\int_C^x \frac{(\log\log u)^{\delta+2}du}{(\log u)^{\alpha+2}} \\
&\leq \frac{(\log\log C)^{\delta+2}}{(\log C)^{\alpha+2}}\int_C^{x^{9/10}} du + \frac{(\log 0.9 + \log\log x)^{\delta+2}}{(0.9\log x)^{\alpha+2}}\int_{x^{9/10}}^x du \\
&\leq \frac{x^{9/10}(\log\log C)^{\delta+2}}{(\log C)^{\alpha+2}} + \frac{x(\log 0.9 + \log\log x)^{\delta+2}}{(0.9\log x)^{\alpha+2}}.
\end{aligned}$$

On prend $C = e^{189}$ puis on utilise la condition $x > e^T$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}|M(x)| &\le \frac{x(\log\log x)^{\delta+2}}{(\log x)^{\alpha+1}}\Bigg\{\left(\frac{1}{4345}+\frac{\epsilon(\log 189)^{\delta+2}}{(189)^{\alpha+1}}\right)\frac{e^{189}(\log x)^{\alpha+1}}{x(\log\log x)^{\delta+2}}+\epsilon \\ &\qquad + \frac{\epsilon(\log x)^{\alpha+1}(\log 189)^{\delta+2}}{(189)^{\alpha+2}x^{1/10}(\log\log x)^{\delta+2}}+\frac{\epsilon}{(0.9)^{\alpha+2}\log x}\Bigg\} \\ &\le \frac{x(\log\log x)^{\delta+2}}{(\log x)^{\alpha+1}}\Bigg\{\left(\frac{1}{4345}+\frac{\epsilon(\log 189)^{\delta+2}}{(189)^{\alpha+1}}\right)\frac{(T)^{\alpha+1}}{e^{T-189}(\log T)^{\delta+2}}+\epsilon \\ &\qquad + \frac{\epsilon(T)^{\alpha+1}(\log 189)^{\delta+2}}{(189)^{\alpha+2}e^{T/10}(\log T)^{\delta+2}}+\frac{\epsilon}{(0.9)^{\alpha+2}T}\Bigg\}\end{aligned}$$

soit

$$|M(x)| \le \frac{\epsilon' x(\log\log x)^{\delta+2}}{(\log x)^{\alpha+1}} \tag{5.4}$$

avec la valeur de ϵ' donnée dans l'énoncé de la proposition.

Résultats numériques :

Théorème 4. *On a les majorations*

$$|M(x)| < \frac{0.01490\, x(\log\log x)^2}{\log x} \quad \textit{pour } x \ge 2\,855 \tag{5.5}$$

$$|M(x)| < \frac{2.3132\, x(\log\log x)^4}{(\log x)^2} \quad \textit{pour } x \ge 10 \tag{5.6}$$

$$|M(x)| < \frac{1\,606.63\, x(\log\log x)^6}{(\log x)^3} \quad \textit{pour } x \ge 3 \tag{5.7}$$

$$|M(x)| < \frac{3\,967\,408 x(\log\log x)^8}{(\log x)^4} \quad \textit{pour } x \ge 3.$$

Démonstration pour (5.5) : on utilise les propositions 8 et 10 avec les majorations (1.1) $|M(x)| < \frac{x}{4345}$ pour $x > 2\,160\,535$ et (3.3) $\rho(x) \le \big|\Psi(x) -$

$x\big|+1 < x\sqrt{\frac{8}{17\pi}}\ X^{\frac{1}{2}}e^{-X}+1$ ($X = \sqrt{\frac{\log x}{R}}$ et $R = 9.645908801$) pour $x \geq 17$.
Soit donc avec les valeurs suivantes des constantes :

$$A = 1/4345\ , \quad \alpha = 0\ , \quad \delta = 0\ , \quad B = \sqrt{\frac{8}{17\pi}} = 0.387...\ .$$

Avec ces valeurs on trouve $T = 2938.92$, donc les conditions $x > 2\,160\,535\,y$, $y > 17$, sont vérifiées.

On a donc

$$\big|N(x)\big| < 0.014893\ \ x(\log\log x)^2 \quad \text{pour } x > e^{2938.92}$$

puis on remplace dans (5.4) pour avoir :

$$\big|M(x)\big| < \frac{0.0149\ \ x(\log\log x)^2}{\log x} \quad \text{pour } x > e^{2938.92}.$$

Pour $e^{1352.03} < x < e^{2938.92}$ on utilise la majoration :

$$\big|M(x)\big| < \frac{0.10917\ \ x}{\log x} \quad \text{pour } x \geq e^{1352.03}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\big|M(x)\big| &< \frac{x(\log\log x)^2}{\log x}\left\{\frac{0.10917}{(\log\log x)^2}\right\} < \frac{x(\log\log x)^2}{\log x}\left\{\frac{0.10917}{(\log 1352.03)^2}\right\}\\ &= \frac{0.0022\ \ x(\log\log x)^2}{\log x} < \frac{0.0149\ \ x(\log\log x)^2}{\log x}\ .\end{aligned}$$

Pour $2\,160\,535 < x < e^{1352.03}$ on utilise la majoration (1.1) on a

$$\begin{aligned}\big|M(x)\big| &< \frac{x(\log\log x)^2}{\log x}\left\{\frac{\log x}{4345(\log\log x)^2}\right\}\\ &< \frac{x(\log\log x)^2}{\log x}\left\{\frac{1352.03}{4345(\log 1352.03)^2}\right\} = \frac{0.006\ \ x\big(\log\log x\big)^2}{\log x}\end{aligned}$$

donc

$$\big|M(x)\big| < \frac{0.0149\ \ x(\log\log x)^2}{\log x} \quad \text{pour } 2\,160\,535 < x < e^{2938.92}.$$

Un calcul simple sur ordinateur montre que c'est encore vrai pour $2\,855 \leq x \leq 2\,160\,535$, d'où la majoration (5.5) du théorème 4.

Démonstration pour (5.6) : on prend $A = 0.0149$, $\alpha = 1$, $\delta = 2$ et $B = 0.388$; avec ces valeurs on trouve $T = 5954.8$ et on a :

$$\left|N(x)\right| < \frac{2.31261 \ \ x(\log\log x)^4}{(\log x)^2} \quad \text{pour } x > e^{5954.8}$$

puis on remplace dans (5.4) pour avoir :

$$\left|M(x)\right| < \frac{2.3132 \ \ x(\log\log x)^4}{(\log x)^2} \quad \text{pour } x > e^{5954.8}.$$

Pour $685 < x < e^{5954.8}$ on utilise la majoration (4.6) :

$$\left|M(x)\right| < \frac{0.10917 \ \ x}{\log x} \quad \text{pour } x \geq 685$$

On a alors :

$$\left|M(x)\right| < \frac{x(\log\log x)^4}{(\log x)^2}\left\{\frac{0.10917 \log x}{(\log\log x)^4}\right\} .$$

La fonction $x \longmapsto \frac{0.10917 \log x}{(\log\log x)^4}$ décroit de $x = 685$: valeur 0.05752, jusqu'à $x = e^{54.6}$: valeur 0.0233, puis croit ensuite et prend pour $x = e^{5954.8}$ la valeur 0.114. Cette fonction est donc toujours inférieure à 2.3132 et l'on a par conséquent

$$\left|M(x)\right| < \frac{2.3232 \ \ x(\log\log x)^4}{(\log x)^2} \quad \text{pour } 685 < x < e^{5954.8}.$$

Un calcul simple sur ordinateur montre que c'est encore vrai pour $10 \leq x \leq 685$, d'où la majoration (5.6) du théorème 4.

Démonstration pour (5.7) : on prend $A = 2.3232$, $\alpha = 2$, $\delta = 4$ et $B = 0.388$; avec ces valeurs on trouve $T = 30\,146.2$ et on a :

$$\left|N(x)\right| < \frac{1\,606.543 \ \ x(\log\log x)^6}{(\log x)^2} \quad \text{pour } x > e^{30\,146.2}$$

puis on remplace dans (5.4) pour avoir :

$$\left|M(x)\right| < \frac{1\,606.63\ \ x(\log\log x)^6}{(\log x)^3} \quad \text{pour } x > e^{30\,146.2}.$$

Pour $685 < x < e^{30\,146.2}$ on utilise la majoration (4.6) :

On a alors :

$$\left|M(x)\right| < \frac{x(\log\log x)^6}{(\log x)^3}\left\{\frac{0.10917\,(\log x)^2}{(\log\log x)^6}\right\} \; .$$

La fonction $x \longmapsto \frac{0.10917\,(\log x)^2}{(\log\log x)^6}$ décroit de $x = 685$: valeur 0.1067, jusqu'à $x = e^{20.1}$: valeur 0.061, puis croit ensuite et prend pour $x = e^{30\,146.2}$ la valeur 82.5. Cette fonction est donc toujours inférieure à 1 606.63 et l'on a par conséquent

$$\left|M(x)\right| < \frac{1\,606.63\ \ x(\log\log x)^6}{(\log x)^3} \quad \text{pour } 685 < x < e^{30\,146.2}.$$

Un calcul simple sur ordinateur montre que c'est encore vrai pour $3 \leq x \leq 685$, d'où la majoration (5.7) du théorème 4.

On terminera par un commentaire sur l'efficacité numérique : les majorations données dans le théorème 4 sont moins efficaces que l'ensemble de majorations détaillé au théorème 3. Néanmoins cette méthode nous permet d'obtenir des majorations en $\frac{x(\log\log x)^{2k}}{(\log x)^k}$ pour tout entier k. Mais il est bien clair que, compte-tenu des applications que l'on peut imaginer, il ne semble pas y avoir pour l'instant d'intérêt à donner les valeurs numériques suivantes.

References

[1] H. Cohen, F. Dress et M. El Marraki, Explicit estimates for summatory functions linked to the Möbius μ-Function (soumis à Maths of computation).

[2] F. Dress et M. El Marraki, Fonction sommatoire de la fonction de Möbius 2. Majorations asymptotiques élémentaires, Experimental Mathematics, 2 (1993), n^o 2, p. 99-112.

[3] M. El Marraki, Majorations effectives de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius, Thèse Univ. Bordeaux (1991).

[4] A. F. Möbius, Uber eine besondere Art von Untersuchrung des Reihen, J. reine Angew. Math. 9 (1832), p. 105-123.

[5] L. Schoenfeld, An improved estimate for the summatory function of the Möbius function, Acta Arithmetica 15 (1960), p. 221-233.

[6] L. Schoenfeld, Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\Psi(x)$. II mathematics of computation, volume 30, number 134 april (1976), p. 337-360.

M. El MARRAKI
Laboratoire D'Algorithmique
Arithmétique Expérimentale
U.M.R. du C.N.R.S. 9936
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE Cedex