Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **8** *(1996), 47–73*

Finitude de tours et p-tours T-ramifiées modérées, S-décomposées

par Christian MAIRE

Résumé. Soit k un corps de nombres et soient T et S deux ensembles finis de places de k ; on peut définir la tour de Hilbert de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée. Ceci permet d'obtenir, par exemple, la notion de tour de Hilbert au sens classique et de tour de Hilbert au sens restreint.

On donne alors d'une part, un critère de finitude de cette nouvelle tour, critère construit à partir d'un résultat d'Odlyzko, puis d'autre part deux critères de non-finitude, le premier étant une conséquence d'un résultat de Golod-Safarevic de théorie des p-groupes, le second provenant d'un résultat de Jaulent dans le cadre de la théorie des genres.

Abstract. Let k be a number field and T and S two sets of places of k ; we can define the T-tamely ramified and S-decomposed Hilbert tower of k. In particular, we have the notion of Hilbert tower in the classical sense and Hilbert tower in the narrow sense.

We give a criterion of finiteness which is a consequence of a Odlyzko's result and two criteria of non-finiteness, the first coming from the theorem of Golod-Safarevic in the theory of p-groups and the second from a work of Jaulent in genus theory.

Introduction

A un corps de nombres k et deux ensembles finis de places de k, T et S, disjoints, non archimédiennes pour T et quelconques pour S, on peut associer $k^S_{1,T}$, l'extension abélienne maximale de k, T-ramifiée modérée et S-décomposée ; dans ce cas on sait que le groupe de Galois de $k^S_{1,T}/k$ s'identifie au groupe des S-classes $\mathrm{cl}^S_{k,m}$ de rayon $m = \prod_{v\in T} v$.

Si l'on note par induction $k^S_{i+1,T}$ l'extension abélienne maximale de $k^S_{i,T}$, T_i-ramifiée modérée, S_i-décomposée ($i \geq 1$), où $T_i = \{w \in pl_{k^S_{i,T}},\ w|v,\ v \in T\}$ et où $S_i = \{w \in pl_{k^S_{i,T}},\ w|v,\ v \in S\}$, on definit une suite de corps $k^S_{i,T}$ et ainsi la T-S tour de k, notée k^S_T, vue comme réunion des $k^S_{i,T}$. Pour p

Manuscrit reçu le 25 mars 1995.

premier, $k_T^S(p)$ designera la p-extension maximale de k contenue dans k_T^S, extension appelée p-T-S tour de k.

On peut alors se poser les questions suivantes : les extensions galoisiennes k_T^S/k ou $k_T^S(p)/k$ sont-elles finies ?

Une reponse positive est immédiate pour la p-T-S tour lorsque $\mathrm{cl}_{k,m}^S(p)$, i.e le p-Sylow de $\mathrm{cl}_{k,m}^S$, est cyclique (cf. partie 1). D'autre part on peut remarquer que si $k_T^S(p)/k$ est non finie, il en est de même pour k_T^S/k (bien entendu la réciproque est fausse, certains contre-exemples ont été donnés par Matsumura [Mat, théorème 2] pour T vide, S égal à l'ensemble des places réelles et p égal à 2) ; par conséquent l'étude de la non-finitude de la T-S tour de k peut se faire à travers celle de la p-T-S tour, notamment en utilisant un résultat classique sur les p-groupes finis ; dans la partie 2, on donnera alors un critère de non-finitude de la p-T-S tour d'un corps de nombres k (theorème 2.1). Perret a abordé ce problème de construction de p-tours ramifiées et a conjecturé le résultat précédent [Pe, conjecture1].

A travers la partie 3, nous établirons une formule des S-T genres qui permet d'obtenir la suite exacte des S-T genres (partie 4) analogue pour T vide à la suite exacte établie par Jaulent [Ja, théorème III.2.7, page 211] ; ainsi, si K/k désigne une extension galoisienne, nous donnerons un second critère de non-finitude de la p-T-S tour de K en utilisant la suite exacte établie précédemment, dans lequel intervient le comportement des places de k dans K/k (partie 5, théorème 5.1).

La partie 6 est consacrée aux exemples de corps ayant une tour infinie au sens restreint, i.e pour T vide et S vide, et une tour finie au sens ordinaire, i.e pour T vide et S égal à l'ensemble des places réelles ; on donnera de même des corps ayant une 2-tour infinie au sens restreint et une 2-tour finie au sens ordinaire.

Enfin, dans la partie 7, nous définirons pour un corps de nombres k son "discriminant étendu" qui permettra d'introduire la constante $\alpha(m, r_1, r_2)$; on verra alors que le rôle de la T-S tour de k lorsque celle-ci est infinie, joue le même rôle vis-à-vis de cette constante que le rôle joué par la tour de Hilbert au sens ordinaire vis-à-vis de $\alpha(r_1, r_2)$ [Mar].

0. Remarques préliminaires.

Par la suite k désignera un corps de nombres, T un ensemble fini de places non archimédiennes de k et S un ensemble fini de places de k, disjoint de T ; S est la réunion de S_0 et de S_∞, où S_0 contient uniquement des places non-archimédiennes et S_∞ des places archimédiennes.

Notons par $\mathrm{cl}_{k,m}^S$, $m = \prod_{v \in T} v$, le quotient $I_{k,T}/R_{k,m}^S$, où $I_{k,T}$ désigne le groupe des idéaux de k étrangers à T, $R_{k,m}^S$ le sous-groupe $P_{k,m}^{S_\infty}\langle S_0\rangle$ de

$I_{k,T}$, $\langle S_0\rangle$ le sous-groupe de $I_{k,T}$ construit sur les places de S_0, et $P^{S_\infty}_{k,m}$ le sous-groupe des idéaux principaux (x), $x \equiv 1\ (m)$, et v(x)=0 pour toute place $v \in\ pl^{re}_{k,\infty} \setminus S_\infty$ ($pl^{re}_{k,\infty}$ est l'ensemble des places réelles de k) ; on sait alors que le groupe de Galois de $k^S_{1,T}/k$ s'identifie à $\mathrm{cl}^S_{k,m}$ [Mai, proposition 1.2]. Si pour p premier, $k^S_{1,T}(p)$ désigne la p-extension abélienne maximale de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée, alors il vient immédiatement que le groupe de Galois de $k^S_{1,T}(p)/k$ s' identifie au p-Sylow de $\mathrm{cl}^S_{k,m}$; si de nouveau l'on note par induction $k^S_{i+1,T}(p)$ la p-extension abélienne maximale de $k^S_{i,T}(p)$, T_i-ramifiée modérée, S_i-décomposée ($i \geq 1$), où $T_i = \{w \in pl_{k^S_{i,T}(p)}, w|v, v \in\ T\}$ et où $S_i = \{w \in\ pl_{k^S_{i,T}(p)}, w|v, v \in\ S\}$, alors la réunion des $k^S_{i,T}(p)$ correspond à la p-T-S tour de k définie dans l'introduction et de plus $k^S_T(p)$ est la p-extension maximale de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée ; on peut noter que seules les places vérifiant $\mathrm{N}v \equiv 1$ *modulo* p interviennent lors de l'étude de la p-T-S tour de k, $\mathrm{N}v$ étant le cardinal du corps résiduel de k_v [Mai, remarque 1.1] ; ainsi pour p premier, on suppose que les places v de T vérifient la relation de conguence $\mathrm{N}v \equiv 1\ (p)$. D'autre part on peut remarquer que les plongements complexes sont trivialement décomposés dans toute sur-extension de k ; par conséquent on peut supposer que S_∞ ne contient que des places réelles. Enfin au corps k et aux ensembles T et S, on adjoindra $E^S_{k,m}$, le groupe des S-unités de k congrues à 1 *modulo* m, i.e $E^S_{k,m} = \{x \in k^\times,\ x \equiv 1\ (m),\ v(x) = 0\ \forall\ v \notin S\}$.

1. Cas où $\mathrm{cl}^S_{k,m}(p)$ est cyclique.

Nous allons montrer que si $\mathrm{cl}^S_{k,m}(p)$ est cyclique alors $\mathrm{cl}^{S(K)}_{K,m(K)}(p)$, que l'on peut noter par abus $\mathrm{cl}^S_{K,m}(p)$, est trivial, où $K = k^S_{1,T}(p)$, $m(K) = \prod_{w\in T(K)} w$, $T(K)$ et $S(K)$ étant les ensembles de places de K contenant exactement et respectivement les places au-dessus de T et de S ; il viendra alors que la p-T-S tour de k est finie et de plus que $k^S_T(p) = k^S_{1,T}(p)$. Tout d'abord deux lemmes classiques :

LEMME 1.1.

Soit Γ un groupe, H son groupe des commutateurs ; supposons que :

- *H est abélien,*
- *Γ/H est un groupe cyclique engendré par $\sigma \in \Gamma$;*

alors $H^{1-\sigma} = H$.

Démonstration.

• $H^{1-\sigma}$ est distingué dans Γ (l'action étant la conjugaison) : tout élément de Γ peut s'écrire sous la forme $\sigma^i h$ avec h dans H. Ainsi pour $h_0^{1-\sigma} = [h_0, \sigma]$ de $H^{1-\sigma}$ nous avons :

$$\begin{array}{rcl}(\sigma^i h)h_0^{1-\sigma}(h^{-1}\sigma^{-i}) & = & \sigma^i(hh_0^{1-\sigma}h^{-1})\sigma^{-i}\\ & = & \sigma^i(h_0^{1-\sigma})\sigma^{-i}\\ & = & (h_0^{\sigma^i})^{1-\sigma}\subset H^{1-\sigma}\ ;\end{array}$$

• $\Gamma/H^{1-\sigma}$ est abélien : soient $\bar{\tau}$, $\bar{\tau'}$ éléments de $\Gamma/H^{1-\sigma}$, leurs représentants peuvent s'écrire sous la forme $h_0\sigma^i$ pour $\bar{\tau}$ et $h_0'\sigma^j$ pour $\bar{\tau'}$, avec h_0, h_0' dans H ; ainsi

$$h_0\sigma^i h_0'\sigma^j\sigma^{-i}h_0^{-1}\sigma^{-j}{h_0'}^{-1} = h_0{h_0'}^{\sigma^i}h_0^{-\sigma^j}h_0'^{-1}.$$

Comme h_0 et h_0' sont stables par l'action de σ *modulo* $H^{1-\sigma}$, on obtient :
$\bar{\tau}\bar{\tau'}\bar{\tau}^{-1}\bar{\tau'}^{-1} = \bar{h_0}\bar{h_0'}\bar{h_0}^{-1}\bar{h_0'}^{-1} = \bar{1}$, car H est abélien.
De ces deux points, on en déduit l'égalité entre $H^{1-\sigma}$ et H. □

Lemme 1.2. ([Se, chapitre IX, §4, lemme 4, page 149])

Soient G' un p-groupe fini et H' un $\mathbb{F}_p[G']$-module ; on a alors l'équivalence suivante :

$$H' = 1 \Longleftrightarrow H' = I_{G'}H',$$

où $I_{G'}$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{F}_p[G']$.

De ces deux lemmes , on peut en déduire le résultat principal de cette partie :

Proposition 1.1.

Supposons $cl^S_{k,m}(p)$ cyclique, alors k admet une p-T-S tour finie et de plus $k^S_T(p) = k^S_{1,T}(p)$.

Démonstration.

Notons par H le groupe de Galois de $k^S_{2,T}(p)/k^S_{1,T}(p)$, et par Γ celui de $k^S_{2,T}(p)/k$. Par le lemme 1.1 nous avons $H = H^{1-\sigma}$, σH étant un générateur de Γ/H, σ dans Γ ; en particulier $H' = H/H^p$ est un $\mathbb{F}_p[G']$-module et $H' = {H'}^{1-\sigma}$, G' étant le sous-groupe de Γ engendré par σ. Comme $I_{G'}$ est engendré par $1-\sigma$, on en déduit alors que $I_{G'}H' = H'$, i.e par le lemme 1.2, $H' = 1$; H étant un p-groupe, sa trivialité est immédiate. □

2. Reprise du résultat de Golod-Safarevic.

Si l'on note par $E^{\bar S}_{k,m}$ le groupe des S_0-unités au sens ordinaire de k congrues à 1 *modulo* m ($\bar S = S_0 \cup pl^{re}_{k,\infty}$), et par $d_p(A)$ le p-rang de $A/A^p[A,A]$, pour A un groupe quelconque, nous obtenons alors le premier critère de non-finitude d'une p-T-S tour d'un corps de nombres k :

Théorème 2.1. Premier critère de non-finitude
Si k est tel que

$$d_p(cl^S_{k,m}) \geq 2 + 2\sqrt{d_p(E^{\bar S}_{k,m}) + 1},$$

alors k admet une p-T-S tour infinie.

Démonstration.
Cette preuve est l'adaptation d'un résultat de Roquette [Ro, p.235].
Notons par L la p-T-S tour de k et supposons L/k finie de groupe de Galois G^S_T ; on peut remarquer que le groupe de Galois de $k^S_{1,T}(p)$ s'identifie alors à $G^S_T/[G^S_T, G^S_T]$, $[G^S_T, G^S_T]$ désignant le groupe des commutateurs de G^S_T.
Nous allons montrer en fait que :

$$d_p(\mathrm{cl}^S_{k,m}) < 2 + 2\sqrt{d_p(E^S_{L,m} \cap k) + 1},$$

où $E^S_{L,m}$ correspond aux $S(L)$-unités de L congrues à 1 modulo $m(L) = \prod_{w \in T(L)} w$ ($S(L)$ et $T(L)$ sont les ensembles des places de L au-dessus de S et de T), i.e

$$E^S_{L,m} = \{x \in L^\times, x \equiv 1\ (m(L)), w(x) = 0\ \forall w \in pl_L \backslash S(L)\}.$$

Bien entendu $(E^S_{L,m} \cap k) \subset E^{\bar S}_{k,m}$; en fait si l'on note par $\gamma(L/k)$ (=γ) l'ensemble des places réelles de k se compléxifiant dans L/k, nous avons exactement

$$E^S_{L,m} \cap k \ = \ E^{S\cup\gamma}_{k,m}.$$

Parce que $d_p(G^S_T) = d_p(\mathrm{cl}^S_{k,m})$, il suffit alors de montrer que

$$\frac{1}{4}(d_p G^S_T)^2 - d_p(G^S_T) < d_p \hat H^0(G^S_T, E^S_{L,m}).$$

Soit $\mathcal{U}^S_{L,m}$ le sous-groupe du groupe des idèles $\mathcal{J}_L$ de L suivant :

$$\mathcal{U}^S_{L,m} = \prod_{v \in T}\prod_{w|v} U^1_{L_w} \ \prod_{v \in S}\prod_{w|v} L^\times_w \ \prod_{v \notin S\cup T}\prod_{w|v} U_{L_w}$$

où

- L_w est le complété de L en w,
- U_{L_w} est le groupe des unités de $L_w^\times$,
- $U_{L_w}^1$ est le sous-groupe de U_{L_w} formé des x tels que $w(x-1)>0$.

On peut noter que pour une place infinie w, si celle-ci est réelle alors $L_w = \mathbb{R}$,

$U_{L_w} = \mathbb{R}^{\times +}$, $U_{L_w}^1 = \mathbb{R}^{\times +}$; par contre si elle est complexifiée, on a $L_w^\times = U_{L_w} = U_{L_w}^1 = \mathbb{C}^\times$.

On a pour tout entier relatif impair n [Mai, lemme 4.2] :

$$\hat{H}^n(G_T^S, \mathcal{U}_{L,m}^S) = 1.$$

Ainsi de la suite exacte :

$$1 \longrightarrow E_{L,m}^S \longrightarrow \mathcal{U}_{L,m}^S \longrightarrow \frac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S} \longrightarrow 1 \ ,$$

il vient l'injection suivante :

$$\hat{H}^{-1}(G_T^S, \frac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S}) \hookrightarrow \hat{H}^0(G_T^S, E_{L,m}^S) \ .$$

Ces deux derniers groupes étant abéliens finis, on a alors :

$$d_p \hat{H}^{-1}(G_T^S, \frac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S}) \leq d_p \hat{H}^0(G_T^S, E_{L,m}^S) \ .$$

Ainsi il suffit de montrer que

$$\frac{1}{4}(d_p G_T^S)^2 - d_p G_T^S < d_p \hat{H}^{-1}(G_T^S, \frac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S}).$$

On rappelle la suite exacte [Mai proposition 1.3] :

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S} \longrightarrow \mathcal{C}_L \longrightarrow \mathrm{cl}_{L,m}^S \longrightarrow 1$$

où $\mathrm{cl}_{L,m}^S$ correspond à $\mathrm{cl}_{L,m(L)}^{S(L)}$, et où $\mathcal{C}_L = \mathcal{J}_L / L^\times$.

En remarquant que $\mathrm{cl}_{L,m}^S$ est G_T^S-cohomologiquement trivial, on en déduit l'isomorphisme :

$$\hat{H}^{-1}(G_T^S, \frac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S}) \simeq \hat{H}^{-1}(G_T^S, \mathcal{C}_L) \ ;$$

Par un résultat de Tate [Ta, §11, page 197], on sait que $\hat{H}^{-1}(G_T^S, \mathcal{C}_L)$ est isomorphe à $\hat{H}^{-3}(G_T^S, \mathbb{Z})$; ainsi tout revient à montrer que $\frac{1}{4}(d_p G_T^S)^2 - d_p G_T^S$

est strictement inférieur à $d_p\hat{H}^{-3}(G_T^S,\mathbb{Z})$; cette inégalité est un résultat classique sur les p-groupes finis [Ro, §2, page 235].

La démonstration s'ensuit. $\square$

Remarque 2.1.

Si la p-torsion de $E_{k,m}^S$ est triviale, alors

$$d_2E_{k,m}^S = r_1 + r_2 - 1 + |S_0|,$$

sinon

$$d_2E_{k,m}^S = r_1 + r_2 + |S_0|.$$

Remarque 2.2.

L'injection $\hat{H}^{-1}(G_T^S, \dfrac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S}) \hookrightarrow \hat{H}^0(G_T^S, E_{L,m}^S)$ est un isomorphisme si et seulement si :

$$E_{k,m}^{S\cup\gamma} = E_{k,m}^S \qquad \text{[Mai, §4, remarque 4.6].}$$

On peut remarquer que si $E_{k,m}^{S\cup\gamma} = E_{k,m}^S$, alors :

i) l'extension $k_{1,T}^S(2)/k$ est γ-complexifiée,

ii) $\mathrm{Gal}(k_{1,T}^S(2)/k_{1,T}^{S\cup\gamma}(2)) = \bigoplus_{v\in\gamma} D_v(k_{1,T}^S(2)/k)$,

où $D_v(k_{1,T}^S(2)/k)$ désigne le groupe de décomposition dans $k_{1,T}^S(2)/k$ d'une place w de $k_{1,T}^S(2)$ quelconque au-dessus de v.

Pratiquement, on a isomorphisme entre $\hat{H}^{-1}(G_T^S, \dfrac{\mathcal{U}_{L,m}^S}{E_{L,m}^S})$ et $\hat{H}^0(G_T^S, E_{L,m}^S)$ dans les cas suivants :

- p$\neq$2 ;
- $E_{k,m}^S = E_{k,m}^{\bar{S}}$, où $\bar{S} = S_0 \cup pl_{k,\infty}^{re}$.

Remarque 2.3.

Notons par $\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}[p]$ l'ensemble des classes h de $\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}$ telles que $h^p = 1$; on peut remarquer que $\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}$ est associé à l'extension abélienne maximale de k, S_0-décomposée et non-complexifiée.

$\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}[p]$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension le p-rang de $\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}$;

$$\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}[p]{=}\mathbb{F}_p\langle h_1, h_2, \ldots, h_r\rangle,$$

ainsi il existe une famille α_i d'éléments de $k^\times$ tels que :

$$\mathcal{Q}_i^{\,p} = (\alpha_i)\mathcal{Q}_{S_0,i},$$

où $\mathrm{cl}_k^{\bar{S}}(\mathcal{Q}_i) = h_i$, $\mathcal{Q}_i \in I_{k,T}$, $\alpha_i \in k^\times$, $\mathcal{Q}_{S_0,i} \in \langle S_0\rangle$, $\langle S_0\rangle$ étant le sous-groupe de $I_{k,T}$ construit sur les places de S_0.

On définit alors A_{S_0} par :

$$A_{S_0} = E_k^{\bar{S}}\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \rangle,$$

où $E_k^{\bar{S}} = \{x \in k^\times,\ v(x) = 0\ \forall x \in pl_{k,0} \setminus S_0\}$.

Rappelons l'homomorphisme θ_m^S de "T-signatures partielles" de A_{S_0} :

$$\theta_m^S :\ A_{S_0} \longrightarrow \prod_{v \in T} \left(\frac{F_v^\times}{F_v^{\times p}}\right) \prod_{v \in\ pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty} \left(\frac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}^{\times p}}\right)$$

où F_v désigne le corps résiduel de k_v.

On a alors une formule de calcul du p-rang de $\mathrm{cl}_{k,m}^S$ [Mai, théorème 1.1] :

$$d_p \mathrm{cl}_{k,m}^S = d_p \mathrm{cl}_k^{\bar{S}} + |T| + \delta_p^2 . |pl_{k,\infty}^{re} \setminus S_\infty| - d_p \theta_m^S(A_{S_0}),$$

où $\delta_p^2 = 1$ si $p = 2$, 0 sinon.

Par cette formule, on remarque alors que pour k donné, S fixé et $|T|$ assez grand, k admet une p-T-S tour infinie.

Corollaire 2.1.

i) Pour $p \neq 2$, $\mathbb{Q}$ admet une p-T tour infinie ($S_0 = \emptyset$) dès que $|T| \geq 4$,

ii) $\mathbb{Q}$ admet une 2-T tour infinie au sens restreint, i.e pour $S_\infty = \emptyset$, dès que $|T| \geq 4$,

iii) $\mathbb{Q}$ admet une 2-T tour infinie au sens ordinaire, i.e pour $S_\infty = Id_{\mathbb{Q}}$, dès que $|T| \geq 5$ et même dès que $|T| \geq 4$ si toutes les places v de T vérifient la relation $v \equiv 1\ (4)$.

Corollaire 2.2.

Soit l un nombre premier tel que $n_l \geq 2 + 2\sqrt{l+1}$, où n_l est l'ordre du groupe de décomposition de 2 dans $\mathbb{Q}(\mu_l)/\mathbb{Q}$ (par exemple 11, 13, 19 ...); alors toute extension cyclique de degré l sur $\mathbb{Q}$ a soit une 2-tour au sens ordinaire triviale ou soit une 2-tour au sens ordinaire infinie.

Démonstration.

Notons par K le corps de degré l sur $\mathbb{Q}$.

Il faut remarquer que le 2-rang de $\mathrm{cl}_K^{\mathrm{ord}}$ est un multiple de n_l, ceci par action de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{cl}_K^{\mathrm{ord}}(2)$; par le théorème 2.1, la conclusion en découle. $\square$

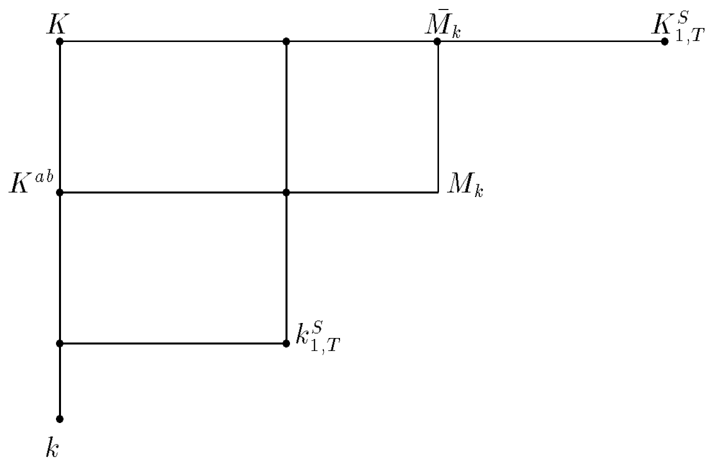
Remarque 2.4.

On peut adapter le corollaire précédent en se plaçant sur un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$, q premier ; il suffit de s'assurer que $\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-q})}(2) = 1$, i.e il faut prendre q congru à 3 *modulo* 4.

3. Formule des S-T genres.

Cette partie est une généralisation au cas modéré d'un travail de Jaulent [Ja, chapitre III].

On se fixe le cadre suivant :



où :

i) K/k est une extension galoisienne finie,
ii) $K^S_{1,T}$ est l'extension abélienne maximale de K, $T(K)$-ramifiée modérée, $S(K)$-décomposée,
iii) K^{ab} est l'extension abélienne maximale de k contenue dans K,
iv) M_k est l'extension abélienne maximale de k contenue dans $K^S_{1,T}$,
v) $\bar{M}_k$ est le corps des S-T genres de K/k, i.e la plus grande extension de K dans $K^S_{1,T}$ provenant, par composition, d'une extension abélienne de k, ici M_k.

Rappelons la définition de $\mathcal{U}^S_{K,m}$, sous-groupe du groupe des idèles de K :

$$\mathcal{U}^S_{K,m} = \prod_{v\in T}\prod_{w|v} U^1_{K_w}\cdot \prod_{v\in S}\prod_{w|v} K^\times_w\cdot \prod_{v\notin S\cup T}\prod_{w|v} U_{K_w}\ .$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.1.
$$N_{K^S_{1,T}/K}(\mathcal{J}_{K^S_{1,T}}).K^\times = \mathcal{U}^S_{K,m}.K^\times$$

$\mathcal{J}_{K^S_{1,T}}$ étant le groupe des idèles de $K^S_{1,T}$.

Démonstration.

i) On peut remarquer que $\mathcal{U}^S_{K,m} \subset N_{K^S_{1,T}/K}(\mathcal{J}_{K^S_{1,T}})$; en effet pour :

. $v \in T,\ w|v,\ w \in pl_K$: l'extension $K^S_{1,T}/K$ étant T-ramifiée modérée en w, alors tout élément de $U^1_{K_w}$ est norme locale en w dans $K^S_{1,T}/K$ [Fr, §8, proposition 2, page 32],

. $v \in S,\ w|v,\ w \in pl_K$: w est totalement décomposée dans $K^S_{1,T}/K$, ainsi tout élément de $K_w^\times$ est trivialement norme locale en w dans $K^S_{1,T}/K$,

. $v \notin S \cup T, w|v,\ w \in pl_{K,0}$: w étant non ramifiée dans $K^S_{1,T}/K$, toute unité de $K_w^\times$ est norme locale en w dans $K^S_{1,T}/K$,

. $v \notin S \cup T,\ w|v,\ w \in pl_{K,\infty}$:

$*$ si $U_{K_w} = \mathbb{C}^\times$, alors tout élément de U_{K_w} est trivialement norme locale,

$*$ si $U_{K_w} = \mathbb{R}^{\times +}$, alors tout élément de $\mathbb{R}^{\times +}$ est soit trivialement norme locale ou soit norme dans $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

ii) On rappelle la suite exacte [Mai, proposition 1.3] :

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}} \longrightarrow \frac{\mathcal{J}_K}{K^\times} \longrightarrow \mathrm{cl}^S_{K,m} \longrightarrow 1,$$

où $E^S_{K,m} = K^\times \cap \mathcal{U}^S_{K,m}$, et où $\mathrm{cl}^S_{K,m} = \mathrm{cl}^{S(K)}_{K,m(K)}$.

De plus, par la théorie du corps de classe, nous avons :

$$\mathrm{Gal}(K^S_{1,T}/K) \simeq \frac{\mathcal{J}_K}{N_{K^S_{1,T}/K}(\mathcal{J}_{K^S_{1,T}}).K^\times} \ ;$$

ainsi, de l'inclusion du point i) et de ces deux derniers rappels, on en déduit l'égalité désirée. □

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(M_k/k) &\simeq \frac{\mathcal{J}_k}{N_{M_k/k}(\mathcal{J}_{M_k}).k^\times} \\
&= \frac{\mathcal{J}_k}{N_{K^S_{1,T}/k}(\mathcal{J}_{K^S_{1,T}}).k^\times} \text{ (ceci par maximalité de } M_k\text{)} \\
&= \frac{\mathcal{J}_k}{N_{K/k}(N_{K^S_{1,T}/K}(\mathcal{J}_{K^S_{1,T}})).k^\times} \\
&= \frac{\mathcal{J}_k}{N_{K/k}(N_{K^S_{1,T}/K}(\mathcal{J}_{K^S_{1,T}}).K^\times).k^\times} \\
&= \frac{\mathcal{J}_k}{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}.K^\times).k^\times} \text{ (ceci par le lemme 3.1)} \\
&= \frac{\mathcal{J}_k}{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times}.
\end{aligned}$$

De la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \frac{(\mathcal{U}^S_{k,m}.k^\times)(N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times)}{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times} \longrightarrow \frac{\mathcal{J}_k}{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times} \longrightarrow \frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{U}^S_{k,m}.k^\times} \longrightarrow 1,$$

où $\mathcal{U}^S_{k,m} = \prod_{v\in T} U^1_{k_v}.\prod_{v\in S} k_v^\times.\prod_{v\notin S\cup T} U_{k_v}$ et où $\dfrac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{U}^S_{k,m}.k^\times} \simeq \mathrm{Gal}(k^S_{1,T}/k)$, on en déduit l'égalité suivante :

$$\left|\mathrm{Gal}(M_k/k^S_{1,T})\right| = \left|\frac{\mathcal{U}^S_{k,m}.k^\times}{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times}\right|.$$

Enfin, on peut évaluer ce dernier quotient par la suite exacte

$$1 \longrightarrow \frac{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times \cap \mathcal{U}^S_{k,m}}{N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m}} \longrightarrow \frac{\mathcal{U}^S_{k,m}}{N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m}} \longrightarrow \frac{\mathcal{U}^S_{k,m}.k^\times}{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times} \longrightarrow 1,$$

et par l'isomorphisme

$$\frac{N_{K/k}(\mathcal{U}^S_{K,m}).k^\times \cap \mathcal{U}^S_{k,m}}{N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m}} \simeq \frac{\mathcal{U}^S_{k,m} \cap k^\times}{N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m} \cap k^\times} = \frac{E^S_{k,m}}{E^S_{k,m} \cap N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m}}.$$

Ainsi, il vient :

$$\left|\mathrm{Gal}(M_k/k^S_{1,T})\right| = \frac{\left|(\mathcal{U}^S_{k,m}/N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m})\right|}{\left|(E^S_{k,m}/E^S_{k,m} \cap N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m})\right|}.$$

LEMME 3.2.

Soit $v \in T, w/v$, avec $w \in pl_K$, et soit ε élément de $U^1_{k_v}$; supposons que ε soit norme dans K_w/k_v, i.e $\varepsilon = N_{K_w/k_v}\alpha_w$, $\alpha_w \in K_w^\times$; alors on peut prendre $\alpha_w \in U^1_{K_w}$.

Démonstration.

ε étant unité locale de k_v, alors $\alpha_w \in U_{K_w}$. D'autre part, on sait que le groupe des unités locales U_{K_w} se décompose en somme directe de la manière suivante :

$$U_{K_w} = \Lambda_{K_w} \bigoplus U^1_{K_w}$$

où Λ_{K_w} est le groupe de torsion modérée de U_{K_w}, i.e $|\Lambda_{K_w}|$ est étranger à la caractéristique du corps résiduel de K_w.

Ainsi, $\alpha_w = \zeta_w.\xi_w$ avec ζ_w dans Λ_{K_w} et ξ_w dans $U^1_{K_w}$; par conséquent :

$$\varepsilon = N_{K_w/k_v}\alpha_w = N_{K_w/k_v}\zeta_w.N_{K_w/k_v}\xi_w \ .$$

Or ε, $N_{K_w/k_v}\xi_w$ sont dans $U^1_{k_v}$, ainsi $N_{K_w/k_v}\zeta_w$ est également dans $U^1_{k_v}$; $N_{K_w/k_v}\zeta_w$ étant de plus élément de Λ_{k_v}, alors il vient immédiatement que $N_{K_w/k_v}\zeta_w = 1$. $\square$

Finalement, on a :

$$k^\times \cap N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m} = E^S_{k,m} \cap N_{K/k}\mathcal{U}^S_{K,m} = E^S_{k,m} \cap \mathcal{N}_{K/k},$$

où $E^S_{k,m} \cap \mathcal{N}_{K/k}$ est constitué des éléments de $E^S_{k,m}$ qui sont partout norme locale dans K/k.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette partie, on peut faire quelques rappels de théorie du corps de classe :

REMARQUE 3.1.

Pour $w|v$, $v \in pl_k$, $w \in pl_K$, on note par $D_w(K/k)$ (ou encore $D_v(K/k)$) le groupe de décomposition de w dans K/k : ce groupe s'identifie au groupe de Galois de l'extension K_w/k_v ; $I_w(K/k)$, ou encore $I_v(K/k)$, désignera le groupe d'inertie de w dans K/k et $I^1_v(K/k)$ le groupe de ramification sauvage de w dans K/k ; en particulier I_v/I^1_v est cyclique. Si l'on note par $D^{ab}_v(K/k)$ l'abélianisé de $D_v(K/k)$, alors ce groupe est égal au groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de k_v contenue dans K_w ; $I^{ab}_v(K/k)$ désignera alors le groupe d'inertie de l'extension K^{ab}_w/k_v et

$I^{1\ ab}_v(K/k)$ son groupe de ramification sauvage ; de plus ces deux derniers groupes sont respectivement égaux à $\dfrac{I_v(K/k).[D_v(K/k),D_v(K/k)]}{[D_v(K/k),D_v(K/k)]}$ et à $\dfrac{I^1_v(K/k).[D_v(K/k),D_v(K/k)]}{[D_v(K/k),D_v(K/k)]}$ [Se, chapitre IV, §3, proposition 4, page 181].

On sait que $k_v^\times / N_{K_w/k_v} K_w^\times$ s'identifie, par le symbole de réciprocité local $(\,.\,, K_w/k_v)$, à $D_v^{ab}(K/k)$ [Ko, chapitre 1, paragraphe 6, page 98]; ce symbole est égal par définition à $(\,.\,, K_w^{ab}/k_v)$, ainsi $I_v^{ab}(K/k)$ est engendré par les symboles des unités locales et $I_v^{1\ ab}(K/k)$ par les symboles des éléments de $U_{k_v}^1$ [Se, chapitre XV, §2, théorème 2, page 235]. De plus par ce symbole nous avons les trois isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} D_v^{ab}(K/k) &\simeq \frac{k_v^\times}{N_{K_w/k_v} K_w^\times}, \\ I_v^{ab}(K/k) &\simeq \frac{U_{k_v}}{N_{K_w/k_v} U_{K_w}}, \\ \text{et } I_v^{1\ ab}(K/k) &\simeq \frac{U_{k_v}^1}{N_{K_w/k_v} U_{K_w}^1}. \end{aligned}$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3.1. Formule des S-T genres :

On a :

$$\left| Gal(M_k/k_{1,T}^S) \right| = \frac{\prod_{v \in T} |I_v^{1\ ab}(K/k)| \prod_{v \in S} |D_v^{ab}(K/k)| \prod_{\substack{v \notin S \cup T \\ v \in pl_{k,0}}} |I_v^{ab}(K/k)|}{\left(E_{k,m}^S \ : \ E_{k,m}^S \cap \mathcal{N}_{K/k} \right)}.$$

Lemme 3.3.

Pour $v \in pl_k$, nous avons les trois égalités suivantes :

$$* \prod_{w|v} N_{K_w/k_v} K_w^\times = N_{K_{w_0}/k_v} K_{w_0}^\times$$

$$* \prod_{w|v} N_{K_w/k_v} U_{K_w} = N_{K w_0/k_v} U_{K_{w_0}}$$

$$* \prod_{w|v} N_{K_w/k_v} U_{K_w}^1 = N_{K_{w_0}/k_v} U_{K_{w_0}}^1$$

où les complétés de K sont pris dans une même clôture algébrique de k_v, et où w_0 est une place quelconque de K au-dessus de v.

Démonstration.

Par le lemme 3.2, on voit qu'il suffit de montrer la première égalité.

Rappelons l'isomorphisme suivant, donné par la théorie de Galois :

$$\frac{k_v^\times}{\prod_{w|v} N_{K_w/k_v} K_w^\times} \simeq \mathrm{Gal}\left(\bigcap_{w|v}(K_w^{ab})/k_v\right).$$

Remarquons ensuite que $\bigcap_{w|v}(K_w^{ab}) = \left(\bigcap_{w|v} K_w\right)^{ab}$; ainsi par unicité de la correspondance du corps de classe, il vient :

$$\prod_{w|v} N_{K_w/k_v} K_w^\times = N_{K_v/k_v} K_v^\times, \text{ où } K_v = \bigcap_{w|v} K_w .$$

Finalement, l'extension K/k étant galoisienne, alors tous les corps complétés en w sont identiques et ainsi $\bigcap_{w|v} K_w = K_{w_0}$, avec $w_0|v$ quelconque. □

4. Suite exacte des S-T genres.

On conserve les notations introduites dans la partie 3.

PROPOSITION 4.1. Suite exacte des S-T genres :

On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \frac{E_{k,m}^s}{E_{k,m}^S \cap \mathcal{N}_{K/k}} \xrightarrow{\Psi_m^S} \bigoplus_{v\in T} I_v^{1\ ab}(\bar{M}_k/k) \bigoplus_{v\in S} D_v^{ab}(\bar{M}_k/k) \bigoplus_{\substack{v\notin S\cup T\\ v\in pl_{k,0}}} I_v^{ab}(\bar{M}_k/k)$$
$$\xrightarrow{\Pi_m^S} Gal(M_k/k_{1,T}^S) \longrightarrow 1.$$

Démonstration.

i) Construction de Ψ_m^S et de Π_m^S :

$\bullet \Psi_m^S \ : \ \varepsilon \in E_{k,m}^S \mapsto \Psi_m^S(\varepsilon) = \bigoplus_{v\in pl_{k,0}\cup S_\infty} (\varepsilon \ , \bar{M}_{k,w}/k_v)$,

où $(.\ , \bar{M}_{k,w}/k_v)$ est le symbole de réciprocité associé à une place quelconque w de $\bar{M}_k$ au-dessus de v, et à valeurs dans $D_v^{ab}(\bar{M}_k/k)$;

$$\bullet \Pi_m^S \ : \ \oplus_v(\sigma_v) \in \bigoplus_{v\in T} I_v^{1\ ab} \bigoplus_{v\in S} D_v^{ab}(\bar{M}_k/k) \bigoplus_{\substack{v\notin S\cup T\\ v\in pl_{k,0}}} I_v^{ab}(\bar{M}_k/k)$$
$$\mapsto \prod_{v\in pl_{k,0}\cup S_\infty} (\sigma_v|_{M_k}) \in \mathrm{Gal}(M_k/k),$$

où $\sigma_v|_{M_k}$ est la restriction de σ_v à $M_{k,w}$, $w|v$, $w \in pl_{M_k}$.

Ce dernier produit peut donc être vu dans $\mathrm{Gal}(M_k/k)$; en effet pour $\sigma_v \in D_v^{ab}(\bar{M}_k/k)$, on prend sa restriction à $M_{k,w}$, ce qui donne un élément de $D_v(M_k/k)$ car M_k/k est abélienne ; l'extension $k_{1,T}^S/k$ étant T-ramifiée modérée, S-décomposée, alors $k_{1,T}^S$ est fixe par les groupes de décomposition dans M_k/k des places v de S , par les groupes d'inertie dans M_k/k des places v finies en dehors de $S \cup T$ et par les groupes $I_v^1(M_k/k)$ pour v dans T.

A l'aide de la remarque 3.1, on en déduit que $k_{1,T}^S$ est stable par $\mathrm{Im}(\Pi_m^S)$, ainsi $\mathrm{Im}(\Pi_m^S) \subseteq \mathrm{Gal}(M_k/k_{1,T}^S)$; toujours par la même remarque et par maximalité de $k_{1,T}^S$, Π_m^S est de plus surjectif.

ii) Identification de $\ker(\Psi_m^S)$:

Soit $x \in \ker(\Psi_m^S)$, alors x est norme locale partout dans $\bar{M}_k/k$, donc norme locale dans K/k ;

réciproquement, soit $x \in E_{k,m}^S \cap \mathcal{N}_{K/k}$, alors il existe $\mathcal{Y} \in \mathcal{U}_{K,m}^S$, ceci par le lemme 3.2, tel que $x = N_{K/k}\mathcal{Y}$; par le lemme 3.1, $\mathcal{Y}$ est norme dans $K_{1,T}^S/K$ et par conséquent x est norme dans $\bar{M}_k/k$.

iii) Pour $\varepsilon \in E_{k,m}^S$,

$$\begin{aligned}
\Pi_m^S\,(\Psi_m^S(\varepsilon)) &= \prod_{v \in pl_{k,0} \cup S_\infty} (\varepsilon\ ,\bar{M}_{k,w}/k_v)\,|_{M_k} \\
&= \prod_{v \in pl_{k,0} \cup S_\infty} (\varepsilon\ , M_{k,w}/k_v) \\
&= \prod_{v \in pl_k} (\varepsilon\ , M_{k,w}/k_v) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

ceci par la formule du produit dans une extension abélienne.

Ainsi $\mathrm{Im}(\Psi_m^S) \subseteq \ker(\Pi_m^s)$.

iv) Exactitude de la suite exacte : il faut remarquer que $|D_v^{ab}(K/k)| = |D_v^{ab}(\bar{M}_k/k)|$ pour $v \in S$, $|I_v^{ab}(K/k)| = |I_v^{ab}(\bar{M}_k/k)|$ pour $v \notin S \cup T$, et $|I_v^{1\ ab}(K/k)| = |I_v^{1\ ab}(\bar{M}_k/k)|$ pour $v \in T$; en utilisant alors la proposition 3.1, on en déduit que $|\mathrm{Im}(\Psi_m^S)| = |\ker(\Pi_m^S)|$; d'où l'égalité entre $\mathrm{Im}(\Psi_m^S)$ et $\ker(\Pi_m^S)$. □

5. Second critère de non-finitude.

On se réfère toujours au schéma de la partie 3 ; notons par p-T-S, la p-$T(K)$-$S(K)$ tour de K et par $E_{K,m}^{\bar{S}}$ le groupe des $S(K)$-unités de K au sens ordinaire congrues à 1 *modulo* $m(K)$; il vient alors le résultat suivant :

Théorème 5.1. Second critère de non finitude :

Soit K/k une extension galoisienne finie ; alors si

$\displaystyle\sum_{v \in S} d_p\,(D_v^{ab}(K/k)) + \sum_{\substack{v \notin S \cup T \\ v \in pl_{k,0}}} d_p\,(I_v^{ab}(K/k))$

$$\geq 2+2\sqrt{d_p(E_{K,m}^{\bar{S}})+1}+d_p\left(\frac{E_{k,m}^S}{E_{k,m}^S\cap\mathcal{N}_{K/k}}\right)+d_p\,\mathrm{Gal}(K/k),$$

K admet une p-T-S tour infinie.

Démonstration.

Il faut noter que $d_p\mathrm{Gal}(M_k/k_{1,T}^S)\leq d_p\mathrm{cl}_{K,m}^S+d_p\mathrm{Gal}(K/k)$; ainsi par le théorème 2.1 si

$$d_p\mathrm{Gal}(M_k/k_{1,T}^S)-d_p\mathrm{Gal}(K/k)\geq 2+2\sqrt{d_pE_{K,m}^{\bar{S}}+1},$$

alors K admet une p-T-S tour infinie.

Par la proposition 4.1, on conclut alors facilement ; on peut remarquer que $d_pI_v^{1\ ab}(K/k)$ n'intervient pas puisque pour $v\in T$, $Nv\equiv 1\ (p)$, et ainsi p est étranger à la caractéristique du corps résiduel F_v. □

COROLLAIRE 5.1.

Prenons K/k cyclique de degré p ; si

$$r_T+i_S\geq 3+2\sqrt{d_pE_{K,m}^{\bar{S}}+1}+d_p\left(\frac{E_{k,m}^S}{E_{k,m}^S\cap\mathcal{N}_{K/k}}\right),$$

où

- *r_T est le nombre de places finies, en dehors de T, se ramifiant dans K/k,*
- *i_S est le nombre de places de S inertes dans K/k,*

alors K admet une p-T-S tour infinie.

On peut énoncer un second corollaire en remarquant que celui-ci a été établi par Schoof [Scho, §3, proposition 3.3] :

COROLLAIRE 5.2.

Soit K/k cyclique de degré p ; désignons par ρ_0 le nombre de places finies de k se ramifiant dans K/k, et par ρ_∞ le nombre de places infinies de k inertes dans K/k (i.e le nombres de places infinies se complexifiant dans K/k).

Ainsi si

$$\rho_0+\rho_\infty\geq 3+2\sqrt{d_pE_K^{\mathrm{ord}}+1}+d_p\left(\frac{E_k^{\mathrm{ord}}}{E_k^{\mathrm{ord}}\cap\mathcal{N}_{K/k}}\right),$$

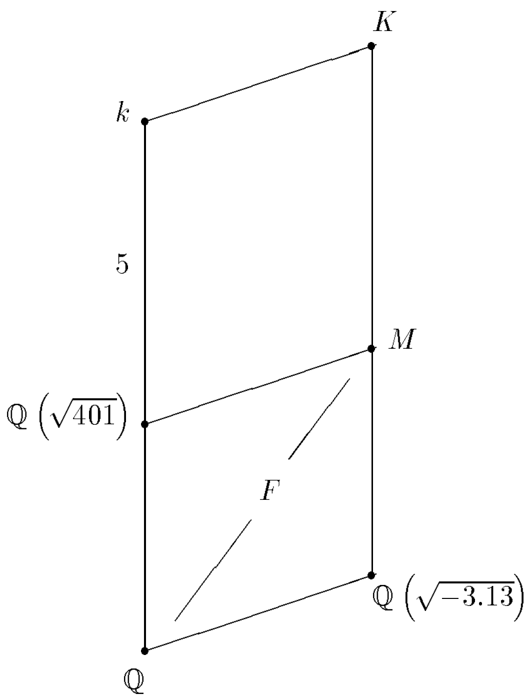
où E_K^{ord} et E_k^{ord} désignent les groupes d'unités au sens ordinaire de K et de k, alors K admet une p-tour au sens ordinaire infinie ($T=\emptyset,\ S=pl_{K,\infty}^{re}$).

Remarque 5.1.

Si K est une extension quadratique totalement imaginaire sur un corps k totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$, alors avec $p = 2$, si $\rho_0 \geq 3 + 2\sqrt{n+1}$, K admet une 2-tour infinie (ici le sens restreint équivaut au sens ordinaire), où ρ_0 est égal au nombre de places finies se ramifiant dans K/k.

On retrouve ici un résultat de Martinet [Mar, §3, page 68] ; de plus, comme l'observe Martinet, si $n = 10$ l'inégalité est satisfaite dès que $\rho_0 = 10$.

Observons le schéma suivant :



où $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-3.13.401}\right)$ et k est le corps de Hilbert au sens ordinaire de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{401}\right)$.

On peut mettre en parallèle cette construction avec celles de Schoof [Scho] et de Matsumura [Mat] ; on remarque que 3 et 13 sont inertes dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{401}\right)/\mathbb{Q}$, par conséquent ces deux places se décomposent totalement dans $k/\mathbb{Q}\left(\sqrt{401}\right)$; en observant que de plus ces places se ramifient dans K/k, alors on a $\rho_0 = 10$, et ainsi K admet une 2-tour infinie.

Il vient alors que F a une tour infinie au sens ordinaire (= au sens restreint) ; on peut à ce propos noter que $|D_{F/\mathbb{Q}}|^{1/2} \simeq 125.05$, i.e $\alpha(0,1) \leq 125.05\ldots$ [Mar §1] ; on trouve ici un exemple établi par B. Schmithals [Schm, exemple 2]. Par une construction identique, on peut également retrouver l'exemple 1 de B. Schmithals [Schm, exemple 1], i.e que le corps

$\mathbb{Q}(\sqrt{-3.5.7.127})$ a une tour de Hilbert infinie au sens ordinaire ; cet exemple permet de majorer $\alpha(0,1)$ par $115.47\ldots$ et améliore le plus petit majorant de $\alpha(0,1)$ pour un corps quadratique, établi précédemment par Martinet, et qui était de $139,21\ldots$ pour $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-3.5.17.19}\right)$ [Mar, §5, exemple 5.3].

EXEMPLE 5.2. On peut reprendre le schéma précédent avec $\mathbb{Q}\left(\sqrt{577}\right)$ et $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-5.11}\right)$; dans ce cas, $\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{577})} = C_7$, $d_2\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_M = 1$ et ainsi par action de $\mathrm{Gal}(K/M)$ sur $\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_M(2)$,

$$d_2\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_K \equiv 1\ (3)\ .$$

Par le théorème 3.1, on sait que K a une 2-tour infinie si $d_2\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_K \geq 10$, par conséquent si $d_2\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_K \geq 8$.

Lors de la démonstration du théorème 5.1, on voit que $d_2\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_K \geq \rho_0 - 1$; ici $\rho_0 = 9$.

Ainsi M admet une tour de Hilbert infinie ; dans ce cas, nous avons $\alpha(0,1) < 179$. On peut noter qu'une utilisation directe du corollaire 5.2 ne permet pas de conclure.

REMARQUE 5.2.

Avec un schéma identique, on peut avoir une meilleur majoration de $\alpha(0,1)$ avec le corps $\mathbb{Q}\left(\sqrt{577}\right)$ si on le compose avec $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-5.7}\right)$.

EXEMPLE 5.3.

Désormais on considère K/k une extension cyclique de degré 2 ; on désire etudier la 2-$T(K)$-$S(K)$ tour de K, où $T(K)$ et $S(K)$ sont des ensembles de places de K stables par $\mathrm{Gal}(K/k)$; $S(K)$ est la réunion de $S_0(K)$, ensemble de places finies, et de $S_\infty(K)$, ensembles de places archimédiennes.

A ces ensembles, on peut associer des ensembles de places de k, $S_0(k)$ et $S_\infty(k)$ tel que $S_0(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in S_0(k)\}$ et $S_\infty(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in S_\infty(k)\}$.

Il faut remarquer que la 2-tour $T(K)$-ramifiée modérée, $S(K)$-décomposée de K est la même que sa 2-tour $T(K)$-ramifiée modérée, $\widehat{S(K)}$-décomposée, où $\widehat{S(K)}$ est l'ensemble des places de K au-dessus de $S(k) \cup \gamma$, et où γ est l'ensemble des places de k se complexifiant dans K/k.

Dans l'inégalité du corollaire 5.1, $r_T + i_S$ devient $r_T + i_S + |\gamma|$, par contre intervient à droite de l'inégalité $d_2\left(\dfrac{E^{S(k)\cup\gamma}_{k,m}}{E^{S(k)\cup\gamma}_{k,m} \cap \mathcal{N}_{K/k}}\right)$ à la place de

$d_2\left(\dfrac{E_{k,m}^{S(k)}}{E_{k,m}^{S(k)} \cap \mathcal{N}_{K/k}}\right)$.

Cette remarque est intéressante si

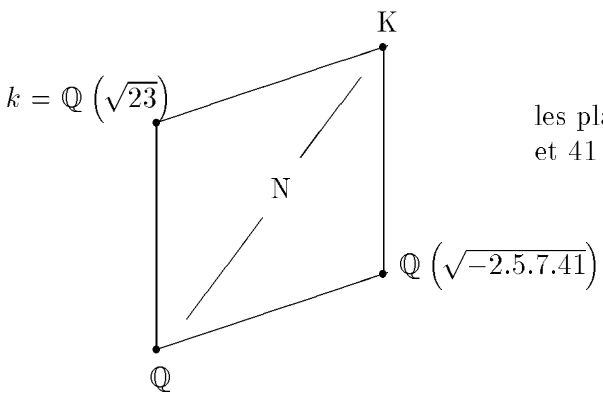
$$d_2\left(\frac{E_{k,m}^{S(k)\cup\gamma}}{E_{k,m}^{S(k)\cup\gamma} \cap \mathcal{N}_{K/k}}\right) - d_2\left(\frac{E_{k,m}^{S(k)}}{E_{k,m}^{S(k)} \cap \mathcal{N}_{K/k}}\right) < |\gamma|\ ;$$

lorsque K/k est peu connue, on remplace $\left(\dfrac{E_{k,m}^{S(k)}}{E_{k,m}^{S(k)} \cap \mathcal{N}_{K/k}}\right)$ par $E_{k,m}^{S(k)}$; la diffèrence $d_2E_{k,m}^{S(k)\cup\gamma} - d_2E_{k,m}^{S}$ étant majorée par 1, on voit alors qu'il est préfèrable d'utiliser $S(k)\cup\gamma$ au lieu de $S(k)$ dès que $|\gamma| \geq 1$.

Illustration numérique :

Dans l'extension quadratique $\mathbb{Q}\left(\sqrt{23}\right)/\mathbb{Q}$, se ramifient les places au-dessus de 2 et de 23 ; 5 est inerte dans cette extension, par contre 7 et 41 se décomposent respectivement en v_7, v'_7, v_{41} et v'_{41}. On peut également noter que le groupe des unités au sens ordinaire de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{23}\right)$ est engendré par $\langle -1,\ \varepsilon_0\rangle$, où $\varepsilon_0 = 24 + 5\sqrt{23}$.

Considérons alors le schéma suivant :



les places au-dessus de 2, 5, 7 et 41 se ramifient dans K/k.

Nous allons montrer que ε_0 est partout norme locale dans K/k :

• ε_0 étant totalement positive, ε_0 est norme locale dans les différents plongements archimédiens de K/k ;

• pour une place $v|2.5.7.41$, v finie, l'extension K/k étant non ramifiée en v alors tout unité locale de k_v (et donc ε) est norme dans K_w/k_v ;

• pour $v = 5$ (5 inerte dans $k/\mathbb{Q}$) :

on utilise l'expression du symbole modéré [Se, chapitre XIV, §3] ;

$$\varepsilon_k \in N_{K_w/k_v} U_{K_w} \iff (\varepsilon_0, -2.5.7.41)_5 = 1 \ ,$$

avec ici $(\varepsilon_0, -2.5.7.41)_5 = \left(\dfrac{\varepsilon_0}{5}\right)$; il suffit ensuite de remarquer que $\varepsilon_0 \equiv 4 \ (5)$.

• en appliquant la démarche précédente aux places divisant 7 et 41 puis en remarquant que $\varepsilon_0 \equiv 4 \ (v_7)$, $\varepsilon_0 \equiv 9 \ (v_7')$, $\varepsilon_0 \equiv 49 \ (v_{41})$, $\varepsilon_0 \equiv 25 \ (v_{41}')$, alors on conclut que ε_0 est partout norme locale dans K/k, sauf éventuelement en $v|2$.

On récupère le cas où $v = v_2$ par la formule du produit.

A présent, on désire étudier la finitude de la 2-tour de Hilbert de K (ici sens restreint = sens classique).

1) On prend $S_\infty(k) = \emptyset$: l'inégalité du corollaire 5.1 indique que si

$$\rho_0 \geq 3 + 2\sqrt{3} + d_2\left(\frac{E_k^+}{E_k^+ \cap N_{K/k}}\right),$$

K a une 2-tour infinie au sens restreint, i.e pour $\rho_0 \geq 7$.

2) On prend $\widehat{S_\infty(k)} = pl_{k,\infty}^{re}$; ici l'inégalité donne :

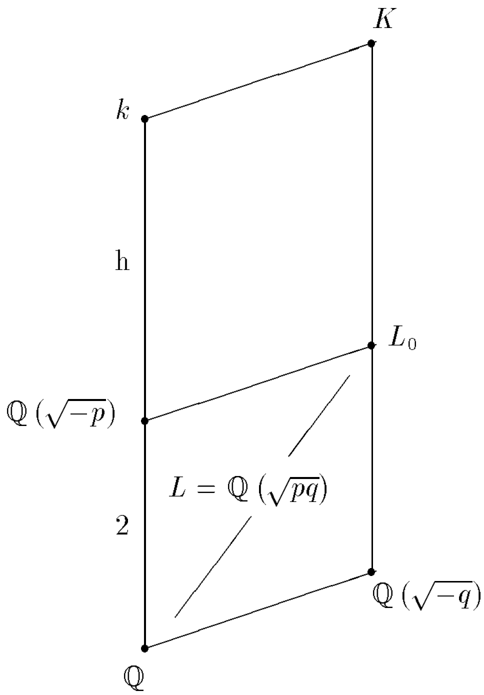
$$\rho_0 + 2 \geq 3 + 2\sqrt{3} + 1 \ , \qquad \text{i.e } \rho_0 \geq 6.$$

Par construction $\rho_0 = 6$, ainsi seul le second cas permet d'affirmer que K a une 2-tour infinie.

6. Tour infinie au sens restreint et finie au sens ordinaire.

1) Exemples de corps ayant une tour infinie au sens restreint ($T = S = \emptyset$) et une tour finie au sens ordinaire ($T = \emptyset, \ S = pl_{k,\infty}^{re}$).

Prenons le schéma suivant :



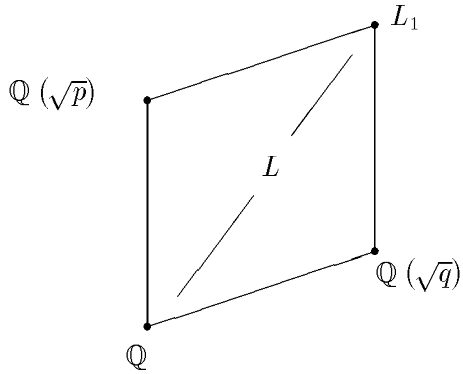
où:
k est le corps de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$;
p et q sont premiers ;
$p \equiv 3\ (8)$;
$q \equiv 1\ (4)$ est de la forme $X^2 + XY + Y^2.\dfrac{p+1}{4}$,
X, Y entiers
(i.e q se décompose totalement dans $k/\mathbb{Q}$).

Ainsi, les places au-dessus de q et de 2 se ramifient dans K/k ; elles sont au nombre de $3h$. En appliquant le corollaire 5.2, on en déduit que pour $h \geq 5$, K a une 2-tour infinie.

En remarquant que K/L_0 est non ramifiée, puis que L_0/L est non ramifiée pour les idéaux, alors il en résulte que L a une tour infinie au sens restreint dès que $h \geq 5$.

Finitude de la tour au sens ordinaire de L :

Le corps L apparait dans le schéma suivant :



Si $\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} = \mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})} = 1$, et si de plus $\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{L} = \mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{L}(2)$, alors :

i) L_1 est le corps de Hilbert au sens ordinaire de L ;
ii) par la proposition 1.1, $\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{L_1}(2) = 1$;
iii) pour l premier, $l \neq 2$, $\mathrm{cl}^{\mathrm{ord}}_{L_1}(l) = 1$.

Ainsi sous les conditions précédentes, L_1 est la tour de Hilbert au sens ordinaire de L.

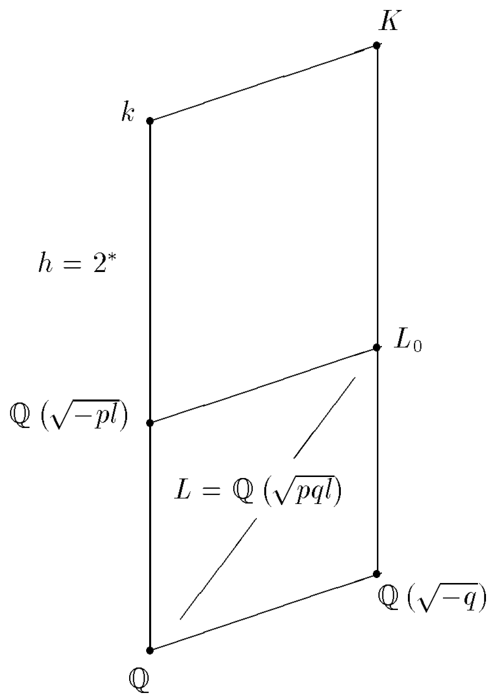
On peut remarquer, par la formule du paragraphe 2, que le 2-rang du groupe des classes au sens restreint de L est égal à 2.

EXEMPLES 6.1.

Le corps $\mathbb{Q}\left(\sqrt{53.131}\right)$ a une tour infinie au sens restreint et une tour finie au sens ordinaire ($p = 131,\ q = 4^2 + 4 + \dfrac{131+1}{4} = 53,\ h = 5$ [Or]).

2) Exemples de corps ayant une 2-tour infinie au sens resteint et une 2-tour finie au sens ordinaire.

On part du schéma suivant :



où :
k est le corps de Hilbert de $\mathbb{Q}\,(\sqrt{-pl})$;
$p \equiv 1\ (4),\ l \equiv q \equiv 3\ (4)$,
q de la forme
$X^2 + XY + Y^2.\dfrac{pl+1}{4}$.

Pour $h = 16$ et en appliquant le corollaire 5.2, alors K a une 2-tour infinie et par conséquent L a une 2-tour infinie au sens restreint ; on peut remarquer que le 2-rang du groupe des classes au sens restreint de L vaut 2.

De plus $\left|\dfrac{\mathrm{cl}_L^{\mathrm{ord}}}{\left(\mathrm{cl}_L^{\mathrm{ord}}\right)^2}\right| = 2$ ici ; $\mathrm{cl}_L^{\mathrm{ord}}(2)$ est donc cyclique, ainsi par la proposition 1.1, L a une 2-tour finie au sens ordinaire.

Exemple 6.2.

Les corps $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3.157.571}\right)$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5.179.911}\right)$ ont une 2-tour infinie au sens restreint et une 2-tour finie au sens ordinaire.

A l'aide des tables numériques de B. Oriat [Or], pour le premier exemple, on prend $p = 157,\ l = 3,\ q = 9^2 + 9.2 + 2^2\dfrac{157.3+1}{4} = 571$, puis

$p = 5,\ l = 179,\ q = 3^2+3.2+2^2\dfrac{1+5.179}{4} = 911$, pour le second exemple.

7. Introduction d'une constante $\alpha(m, r_1, r_2)$.

a) Quelques calculs.

Dans ce paragraphe, k désigne un corps de nombres et T un ensemble de places finies de k ; K est une extension finie de k. On suppose que l'extension K/k est T-ramifiée modérée.

Pour L une extension finie de K, également T-ramifiée modérée, nous désirons évaluer le discriminant $\mathcal{D}_{L/k}$ de l'extension L/k en fonction du discriminant $\mathcal{D}_{K/k}$ de K/k.

Notons $n = [L : k]$, $n_0 = [K : k]$, et $n_1 = [L : K]$; $T(K)$, $T(L)$ désigneront les ensembles de places de K et de L au-dessus de T. Pour une place v de T, w désignera une place de K au-dessus de v ; $\mathcal{W}$ sera une place de L au-dessus de w.

Il vient immédiatement la relation suivante :

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{D}_{L/k}\right| &= \left|\mathcal{D}_{K/k}\right|^{n_1} . N_{K/k}(\mathcal{D}_{L/K}) \\ &= \left|\mathcal{D}_{K/k}\right|^{n_1} . N_{K/k}\left(\prod_{w\in T(K)} w^{\sum_{\mathcal{W}|w}(e_{\mathcal{W}}(L/K)-1).f_{\mathcal{W}}(L/K)}\right), \end{aligned}$$

où $e_{\mathcal{W}}(L/K)$ désigne l'indice de ramification de $\mathcal{W}$ dans L/K et $f_{\mathcal{W}}(L/K)$ le degré résiduel de $\mathcal{W}$ dans L/K.

Cette égalité provient du fait que L/k est T-ramifiée modérée [Fr, théorème 2, page 21].

On rappelle les points suivants :

- $n_1 = \sum_{\mathcal{W}|w} e_{\mathcal{W}}(L/K).f_{\mathcal{W}}(L/K)$, $\forall w \in pl_K$;
- $N_{L/K}\mathcal{W} = w^{f_{\mathcal{W}}(L/K)}$, $\forall \mathcal{W} \in pl_L$.

Ceci permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{D}_{L/k}\right| &= \left|\mathcal{D}_{K/k}\right|^{n_1} .\ N_{K/k}\left(\prod_{w\in T(K)} w^{n_1}.w^{-\sum_{\mathcal{W}|w} f_{\mathcal{W}}(L/K)}\right) \\ &= \left|\mathcal{D}_{K/k}\right|^{n_1} .\ N_{K/k}\left(\prod_{w\in T(K)} w^{n_1}\right) .\ N_{K/k}\left(\prod_{\mathcal{W}\in T(L)} (N_{L/K}\mathcal{W})\right)^{-1} . \end{aligned}$$

On a alors la proposition

Proposition 7.1.

Sous les hypothèses de la partie a), on a la formule :

$$|\mathcal{D}_{L/k}|^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\prod_{\mathcal{W}\in T(L)} N_{L/k}\mathcal{W}\right)^{\frac{1}{n}} = |\mathcal{D}_{K/k}|^{\frac{1}{n_0}} \cdot \left(\prod_{w\in T(K)} N_{K/k}w\right)^{\frac{1}{n_0}} .$$

Remarque 7.1.

Si les extensions sont non ramifiées, il vient :

$$|\mathcal{D}_{L/k}|^{\frac{1}{n}} = |\mathcal{D}_{L/k}|^{\frac{1}{n_0}} .$$

b) Définition de $\alpha(m, r_1, r_2)$.

Dorénavant posons $k = \mathbb{Q}$ et soit $\mathcal{D}_K$ la valeur absolue du discriminant absolu d'un corps de nombres K, i.e $\mathcal{D}_K = |\mathcal{D}_{K/\mathbb{Q}}|$.

Soit m un produit de nombres premiers distincts ; notons par T l'ensemble des places de $\mathbb{Q}$ divisant m ; alors $\Delta_K(m)$ désignera, pour un corps de nombres K, la valeur absolue du discriminant étendu, défini comme suit :

$$\Delta_K(m) = \mathcal{D}_K . \prod_{w\in T(K)} N_{K/\mathbb{Q}}w.$$

Pour r_1, r_2 deux entiers positifs, et pour $n_0 = r_1 + 2r_2$, définissons alors $\Delta_{n_0,n}(m)$ comme étant le minimum des $\Delta_K(m)$ lorsque K parcourt l'ensemble des corps de degré n multiple de n_0, pour lesquels $r_1(K)$ et $r_2(K)$ sont dans les mêmes proportions que r_1 et r_2.

On peut alors définir $\alpha(m, r_1, r_2)$:

$$\alpha(m, r_1, r_2) = \liminf_n \Delta_{n,n_0}(m)^{1/n}.$$

c) Propriétés.

i) $\alpha(1, r_1, r_2)$ coincide avec la constante classique $\alpha(r_1, r_2)$ étudiée notamment dans [Mar].

ii) Soit K un corps de degré n multiple de $n_0 = r_1 + 2r_2$, respectant r_1 et r_2 ; supposons que K admette une tour $T(K)$-ramifiée modérée, $pl_{K,\infty}$-décomposée infinie, alors par la proposition 7.1, on a l'inégalité suivante :

$$\alpha(m, r_1, r_2) \leq \Delta_K(m)^{\frac{1}{n}}.$$

iii) On a pour tout corps K, $\mathcal{D}_K \leq \Delta_K(m)$; ainsi si l'on note par $d_{n_0,n}$ le minimum de $\mathcal{D}_K$ lorsque K parcourt les corps de degré n multiple de $n_0 = r_1 + 2r_2$, pour lesquels $r_1(K)$ et $r_2(K)$ sont dans les mêmes proportions que r_1 et r_2, on a

$$d_{n,n_0} \leq \Delta_{n_0,n}(m) \ ;$$

par conséquent, $\liminf_n d_{n_0,n}^{1/n} \leq \liminf_n \Delta_{n_0,n}(m)^{1/n}$.

On en déduit que $\alpha(r_1, r_2) \leq \alpha(m, r_1, r_2)$ et de manière plus générale $\alpha(m', r_1, r_2) \leq \alpha(m, r_1, r_2)$ pour $m'|m$.

iv) Si on remarque que $\Delta_K(m) \leq m^n.\mathcal{D}_K$, alors l'inégalité

$$\alpha(m, r_1, r_2) \leq m.\alpha(r_1, r_2).$$

est immédiate.

d) Utilisation "grossière" des bornes d'Odlysko.

On connait par les travaux d'Odlysko, Poitou et Serre, une minoration de $\mathcal{D}_K$, qui se traduit pour $\Delta_K(m)$ de la manière suivante :

$$\Delta_K(m)^{1/n} \geq \left(\prod_{w \in T(K)} N_{K/\mathbb{Q}} w \right)^{\frac{1}{n}} (60.83)^{\frac{r_1(K)}{n}} (22.38)^{\frac{2r_2(K)}{n}} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \right) \ ,$$

où n est le degré de K, avec $n = r_1(K) + 2r_2(K)$.

Il vient alors :

$$\alpha(m, r_1, r_2) \geq (60.83)^{\frac{r_1}{n_0}} (22.38)^{\frac{2r_2}{n_0}}, \text{ où } n_0 = r_1 + 2r_2.$$

PROPOSITION 7.2 :

Si un corps K de degré n ($n = r_1(K) + 2r_2(K)$), vérifie

$$\Delta_K(m)^{\frac{1}{n}} < (60.83)^{\frac{r_1(K)}{n}} (22.38)^{\frac{2r_2(K)}{n}},$$

alors K a une tour T-ramifiée modérée, non complexifiée, finie.

EXEMPLES 7.1.

1) Tout corps quadratique réel K tel que $\Delta_K(m)^{\frac{1}{2}}$ soit strictement inférieur à 60.83 admet une T-$pl_{K,\infty}$ tour finie.

Par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ a une T-$pl_{K,\infty}$ tour finie, avec $T = \{2,\ 3\}$.

2) Tout corps quadratique réel K tel que $\Delta_K(m)^{\frac{1}{2}}$ soit strictement inférieur à 22.38, admet une T-tour finie au sens restreint.

3) Pour $K = \mathbb{Q}$, $\Delta_{\mathbb{Q}}(m) = m$, et ainsi pour $m \leq 60, \mathbb{Q}$ a une T-tour finie au sens large, et pour $m \leq 22, \mathbb{Q}$ a une T-tour finie au sens restreint.

4) Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension T-ramifiée modérée tel que $m < (60.83)^{\frac{r_1(K)}{[K:\mathbb{Q}]}} (22.38)^{\frac{2r_2(K)}{[K:\mathbb{Q}]}}$, où $m = \prod_{v \in T(\mathbb{Q})} v$, alors K admet une T-$pl_{K,\infty}$ tour finie.

Bibliographie

[Fr] A. Fröhlich, *Local fields*, dans "J.-W.-S. Cassels et A. Fröhlich, Algebraic number theory", Academic Press London, 1967.

[Jau] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des l-extensions*, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Fascicule 1 (1986).

[Ko] H. Koch, *Number theory II*, EMS 62, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Mai] C. Maire, *Extensions T-ramifiées modérées, S-décomposées*, à paraitre.

[Mar] J. Martinet, *Tours de corps de classes et estimations de discriminants*, Invent. Math., 44 (1978), p. 65–73.

[Mat] N. Matsumura, *On the class field tower of an imaginary quadratic number field*, Mem. Fac. Sci. Kyushu University, 31 (1977), p. 165–171.

[Or] B. Oriat, *Groupes des classes d'idéaux des corps quadratiques imaginaires* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $-24572 < d < 0$, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Fascicule 2 (1988).

[Pe] M. Perret, *Tours ramifiées infinies de corps de classes*, Journal of Number Theory, 38 (1991), p. 300–322.

[Ro] P. Roquette, *On class field towers*, dans "J.-W.-S. Cassels et A. Fröhlich, Algebraic number theory", Academic Press London, 1967.

[Schm] B. Schmithals, *Konstruktion imaginärquadratischer Körper mit unendlichem Klassenkörperturm*, Arch. Math., 34 (1980), p. 307–312.

[Scho] R. Schoof, *Infinite class field towers of quadratic fields*, J. reine angew. Math., 372 (1986), p. 209–220.

[Se] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[Ta] J.T. Tate, *Global class field theory*, dans "J.-W.-S. Cassels et A. Fröhlich, Algebraic number theory", Academic Press London, 1967.

Christian Maire
Université de Franche-Comté
Laboratoire de mathématiques
16, route de Gray
25000 Besançon, France
e-mail : maire@math.univ-fcomte.fr

Christian Maire
Université de Franche-Comté
Laboratoire de mathématiques
16, route de Gray
25000 Besançon, France
e-mail: mairemath.univ-fcomte.fr