Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **10** (1998), 85–105

Polynômes de Lagrange sur les entiers d'un corps quadratique imaginaire

par M. ABLY et M. M'ZARI

RÉSUMÉ. L'objet de ce texte est de donner une estimation arithmétique des valeurs prises par les polynômes de Lagrange sur les entiers d'un corps quadratique imaginaire en des points de ce corps. Ces polynômes interviennent dans l'étude des fonctions entières arithmétiques et dans les minorations de formes linéaires de Logarithmes.

ABSTRACT. The aim of this paper is to give an arithmetic estimate of the values of Lagrange polynomials over the integers of an imaginary quadratic number field at the points of this field. This polynomials are used in the study of integer valued entire functions and lower bounds for linear forms in Logarithms.

1. INTRODUCTION

Les polynômes d'interpolation sur les entiers ou les entiers de Gauss interviennent dans de nombreux problèmes en arithmétique. Les polynômes binômiaux ont été utilisés par Pòlya [9] pour démontrer qu'une fonction entière de type exponentiel inférieur à $\log 2$ et envoyant $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$ est un polynôme et par Fel'dman [3] pour les minorations de formes linéaires de logarithmes. Les polynômes de Lagrange sur $\mathbf{Z}[i]$ ont été introduits par L. Gruman [7] et F. Gramain [5] pour améliorer un résultat de A. Gel'fond [4] qui étend le résultat de Pòlya aux fonctions entières d'ordre 2 de type fini envoyant $\mathbf{Z}[i]$ dans $\mathbf{Z}[i]$.

Dans [8], P. Philippon démontre des propriétés analytiques et arithmétiques vérifiées par ces polynômes ainsi que leurs dérivés. Essentiellement, ces polynômes ont une croissance plus faible que les monômes X^n et les polynômes de Lagrange sur $\mathbf{Z}[i]$ envoient $\mathbf{Z}[i]$ dans $\mathbf{Q}(i)$ avec un dénominateur "pas trop grand", le logarithme du dénominateur étant de l'ordre du degré du polynôme. Alors, par rapport aux monômes X^n, l'utilisation de ces polynômes d'interpolation permet de gagner en croissance au niveau analytique sans perdre au niveau arithmétique en taille.

Manuscrit reçu le 30 juin 1997.

Pour démontrer l'estimation arithmétique, les auteurs utilisaient le fait que $\mathbf{Z}[i]$ est principal.

L'objet de ce texte est d'étendre ces estimations aux polynômes d'interpolation de Lagrange sur les entiers d'un corps quadratique imaginaire.

Comme conséquence de ces estimations, au paragraphe 5 nous étendons un résultat de M. Waldschmidt (cf. [12]) aux anneaux d'entiers de corps quadratiques imaginaires.

Ce résultat généralise celui de Pòlya, cité plus haut, au sens suivant : une fonction $\frac{f}{g}$ méromorphe, avec f et g d'ordre ≤ 2 et de type assez "petit", envoyant un sous-ensemble S de l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire dans un corps de nombres, avec S vérifiant une propriété de "densité" arithmétique, est une fraction rationnelle.

Dans un autre texte, nous montrerons que l'utilisation de ces polynômes de Lagrange sur l'anneau des endomorphismes d'une courbe elliptique à multiplication complexe, permet d'améliorer les minorations de formes linéaires de Logarithmes elliptiques de points algébriques de cette courbe.

Nous tenons à remercier Patrice Philippon pour ses remarques et sa lecture minutieuse de ce texte.

2. Notations et énoncés des résultats.

Soient K un corps quadratique imaginaire, $K = \mathbf{Q}(i\sqrt{d})$ (où d est un entier > 0, sans facteur carré), $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K, $\omega = i\sqrt{d}$ (resp. $\frac{1+i\sqrt{d}}{2}$) si $d \equiv 1$ ou 2 (4) (resp. si $d \equiv 3(4)$) ; $\{1, \omega\}$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{O}$.

Notons D le discriminant de K ; $|D| = 4d$ si $d \equiv 1$ ou 2 (4), $|D| = d$ si $d \equiv 3(4)$.

On note h l'ordre du groupe des classes d'idéaux de K et on choisit un système de représentants dans $\mathcal{O}$ $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_h\}$ de ce groupe tel que $\max N(\mathcal{B}_i) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{|D|}$; cela est possible grâce au lemme de Minkowski pour un ensemble convexe (cf. [1], Chap. III, § 7, remarque 2).
Pour un idéal fractionnaire I de K et $y \in K$, on notera $N(I)$ la norme de I, $|y|$ le module de $\sigma(y)$ où σ est l'injection canonique de K dans $\mathbf{C}$.

Si v est une place de K, on note K_v le complété de K pour la valeur absolue $|\cdot|_v$ associée à v et normalisée de sorte qu'on ait la formule du produit :
$\prod_v |\lambda|_v^{d_v} = 1$ pour tout $\lambda \in K^*$, où $d_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$ est le degré local en v.

Pour R un réel > 0, notons les polynômes de Lagrange sur $\mathcal{O}$ sous la forme

$$P_R(z) = \prod_{\substack{\alpha \in \mathcal{O}\setminus\{0\} \\ |\alpha| \leq R}} \left(\frac{z+\alpha}{\alpha}\right)$$

et notons δ_R le degré de P_R.

Pour $R > 1$, on a $\frac{2(\pi-2)R^2}{\sqrt{|D|}} \leq \delta_R \leq \frac{2(\pi+2)R^2}{\sqrt{|D|}}$, (cf. remarque 3.1 de ce texte).

Le dénominateur d'un nombre algébrique (resp. le dénominateur commun d'une famille de nombres algébriques) sera désigné par den. (resp. den.com).

On obtient le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Pour tout $t \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$ et $R > 1$, on a :*

1. *Pour tout $z \in \mathbf{C}$,* $\quad \log |\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_R^l(z)| \leq l\delta_R \log\left(1+\frac{|z|}{R}\right) + c_0 l\delta_R,$
   avec $c_0 = 6\sqrt{|D|} + 3\log 2$.
2. *Pour tout $(y_1, ..., y_n) \in \mathcal{O}^n$,*

$$\log \text{ den.com}\left\{\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P_\rho^k(y_i); \tau = 0, ..., t; k = 0, ..., l; \rho \leq R; i = 1, ..., n\right\}$$
$$\leq c_1 l\delta_R \max(0, \log\frac{(1+t)}{l}) + c_2 l\delta_R + c_3 l\sqrt{\delta_R}\log\, \delta_R,$$

où $\quad c_1 = 10\sqrt{|D|} + 6$, $c_2 = 62\sqrt{|D|} + 28$ *et* $c_3 = 15\sqrt{|D|}$.

3. Estimations analytiques et arithmétiques.

3.1. **Estimations analytiques.** Les estimations analytiques de [8] ont été établies dans le cadre d'un corps quadratique, nous nous permettons ici d'en donner les énoncés et pour cela on reprend les notations de [8].

Soient K un corps de nombre, v une place de K, $y \in K_v$, S un ensemble fini de δ éléments de K_v non nuls et $t \in \mathbf{N}$;
on pose $S' = S$, $t' = t$, $\delta' = \delta$ si $-y \notin S$ et $S' = S \setminus \{-y\}$, $t' = t-1$, $\delta' = \delta - 1$ si $-y \in S$.

On note : $\sum(0, t', S') = \sum_{\underline{s}} \frac{1}{s_1 \times \ldots \times s_{t'}}$ où $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_{t'})$ parcourt l'ensemble des suites de t' éléments distincts dans S' et $P_S(y) = \prod_{s\in S}\frac{(y+s)}{s}$.

Nous appliquerons essentiellement ces estimations analytiques quand S est l'ensemble $S_R = \{x \in \mathcal{O}\setminus\{0\}, |x| \leq R\}$, les polynômes P_{S_R} étant les polynômes de Lagrange définis au paragraphe 2 et notés P_R.

Avec ces notations, d'après [8], on a le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Pour tout $R > 1$ et tout $t \in \mathbf{N}$ on a :*

(3.1.1) $$\log |\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_S(y)|_v$$
$$\leq (\delta - t)\log\left(1+\frac{|y|_v}{R}\right) + \sum_{s\in S}\log(1+\frac{R}{|s|_v}) + \log|\sum(0, t', S')|_v$$

$$\log |\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_S(y)|_v \leq \sum_{s\in S'} \log |(1+\frac{y}{s})|_v + \log |\sum(0,t',S')|_v. \tag{3.1.2}$$

Dans le cas où v est la valeur absolue archimédienne et $S = S_R$, on a :

$$\log |\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_R(y)| \leq (\delta_R - t)\log(1+\frac{|y|}{R}) + c_4\delta_R + \log \begin{pmatrix} \delta'_R \\ t' \end{pmatrix}, \tag{3.1.3}$$

avec $c_4 = 6\sqrt{|D|}$.

Preuve. Pour les inégalités (3.1.1) et (3.1.2), voir la preuve du lemme 1 de [8] et pour l'inégalité (3.1.3) voir celle du lemme 3 de [8] en tenant compte de la majoration : $R^2 \leq \frac{\sqrt{|D|}}{2(\pi-2)}\delta_R$. □

3.2. **Estimations arithmétiques.** Si I est un idéal fractionnaire non nul de K, $y \in K$ et R un réel > 0, on note $A_I(y,R) = \{x \in I, |x-y| \leq R\}$ et card $A_I(y,R)$ le nombre d'éléments de $A_I(y,R)$.

Lemme 3.2. *Pour tout $y \in K$, tout réel $R > 0$ et tout idéal fractionnaire non nul I de K vérifiant $N(I) \leq R^2$, on a :*

$$|\mathrm{card} A_I(y,R) - \frac{2\pi R^2}{\sqrt{|D|}N(I)}| \leq c_5 \frac{R}{\sqrt{N(I)}} \tag{i}$$

où $c_5 = 2 + 8\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{|D|}}}$

$$|\mathrm{card} A_I(y,R) - \mathrm{card} A_I(0,R)| \leq c_6 \frac{R}{\sqrt{N(I)}} \tag{ii}$$

où $c_6 = 2c_5$.

Preuve. Soit I un idéal fractionnaire non nul de K ; il existe $\mathcal{B} \in \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_h\}$ et $b \in K^*$ tel que : $bI = \mathcal{B}$. Or, K est quadratique imaginaire donc on a $|b| = \sqrt{N(b)}$, comme : $N(b) = \frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}$, on obtient :

$$\text{card } A_I(y,R) = \text{card } A_{\mathcal{B}}\left(by, R\sqrt{\frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}}\right).$$

Notons $L_{\mathcal{B}}$ le réseau de $\mathbf{R^2}$ image de $\mathcal{B}$ par le plongement canonique

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ & K \to \mathbf{R^2} \\ & x \to (\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x)), \end{aligned}$$

où $\mathrm{Re}(x)$, (resp. $\mathrm{Im}(x)$) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) de x, B le disque de $\mathbf{R}^2$ de centre $\sigma(by)$ et de rayon $R\sqrt{\frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}}$ et ∂B son bord.

On a évidemment card $A_{\mathcal{B}}\left(by, R\sqrt{\frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}}\right) =$ card $L_{\mathcal{B}} \cap B$.

Rappelons que $\{1, \omega\}$ est la base de $\mathcal{O}$ définie au début du paragraphe 2.

Il existe $a_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, 2, 3$ avec $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ tel que $\{a_1, a_2 + a_3\omega\}$ soit une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{B}$; on a évidemment $N(\mathcal{B}) = a_1 a_3$.

Si (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbf{R^2}$,
$\{a_1 e_1, (a_2 + a_3 \mathrm{Re}(\omega))e_1 + a_3 \mathrm{Im}(\omega) e_2\}$ est une base du réseau $L_{\mathcal{B}}$.

Posons $\zeta_1 = a_1 e_1$, $\zeta_2 = (a_2 + a_3\mathrm{Re}(\omega))e_1 + a_3\mathrm{Im}(\omega)e_2$ et notons P la matrice de passage de (ζ_1, ζ_2) à (e_1, e_2), F le domaine fondamental de $L_{\mathcal{B}}$ relatif à la base (ζ_1, ζ_2), F_x le translaté de F par x,

$$n = \mathrm{card}\{x \in L_{\mathcal{B}}, F_x \subset B\} \text{ et } m = \mathrm{card}\{x \in L_{\mathcal{B}}, F_x \cap \partial B \neq \emptyset\}.$$

Si $x \in L_{\mathcal{B}} \cap B$, on a : $F_x \subset B$ ou $F_x \cap \partial B \neq \emptyset$, d'où

$$n \leq \mathrm{card} L_{\mathcal{B}} \cap B \leq n + m.$$

D'autre part, on a : $n \times \text{Aire } (F) \leq \text{Aire } (B) \leq (n+m)\text{Aire } (F)$,
on en déduit que :

$$|\mathrm{card}\ L_{\mathcal{B}} \cap B - \frac{\text{Aire } (B)}{\text{Aire } (F)}| \leq m.$$

On a : Aire $(F) = a_1 a_3 \mathrm{Im}(\omega) = \frac{N(\mathcal{B})}{2}\sqrt{|D|}$.
Pour terminer la preuve du lemme, nous allons majorer m.
Soit $x =: x_1'\zeta_1 + x_2'\zeta_2 \in L_{\mathcal{B}}$, tel que $F_x \cap \partial B \neq \emptyset$; il existe $z = z_1'\zeta_1 + z_2'\zeta_2$, $z \in \partial B$ tel que $x_1' = [z_1']$ et $x_2' = [z_2']$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière.
On a alors, la majoration :

$$m \leq \mathrm{card}\{([z_1'], [z_2'])\, ;\, z_1'\zeta_1 + z_2'\zeta_2 \in \partial B\}$$

Ecrivons le centre $\sigma(by)$ de B dans les bases (e_1, e_2) et (ζ_1, ζ_2) ;
$\sigma(by) = y_1 e_1 + y_2 e_2 = y_1'\zeta_1 + y_2'\zeta_2$.

Remarquons que quitte à faire une translation par un élément du réseau $L_{\mathcal{B}}$, on peut supposer que $0 \leq y_i' \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Soit $z \in \partial B$; $z = z_1 e_1 + z_2 e_2$. Par définition de B, on a :

$$(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 = R^2 \frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}.$$

Les coordonnées z_1', z_2' de z dans la base (ζ_1, ζ_2) vérifient :

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

où
$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + a_3 Re\ (\omega) \\ 0 & a_3 Im\ (\omega) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{N(\mathcal{B})\sqrt{|D|}} \begin{pmatrix} \frac{a_3\sqrt{|D|}}{2} & -a_2 - a_3 Re\ (\omega) \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $|z_2'| \leq \frac{2a_1}{N(\mathcal{B})\sqrt{|D|}}|z_2|$, comme $|z_2| \leq |y_2| + R\sqrt{\frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}}$, $|y_2| \leq \frac{a_3\sqrt{|D|}}{2}|y_2'|$ et $0 \leq y_2' < \frac{1}{2}$, on en déduit que

$|z_2'| \leq \frac{1}{2} + \frac{2a_1 R}{\sqrt{|D|N(\mathcal{B})N(I)}} \leq \frac{1}{2} + 2R\sqrt{\frac{N(\mathcal{B})}{|D|N(I)}}$.

Or $N(I) \leq R^2$ donc $|z_2'| \leq c_7\frac{R}{\sqrt{N(I)}}$, où $c_7 = \frac{2}{\sqrt{|D|}}\sqrt{N(\mathcal{B})} + \frac{1}{2}$.

D'où : $m \leq 4c_7\frac{R}{\sqrt{N(I)}}$, comme $\mathrm{Aire}(B) = \pi R^2\frac{N(\mathcal{B})}{N(I)}$, $\mathrm{Aire}(F) = \frac{N(\mathcal{B})\sqrt{|D|}}{2}$ et $N(\mathcal{B}) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{|D|}$, on obtient le lemme 3.2.(i).

L'inégalité (ii) résulte de (i). $\square$

Remarque 3.1 : Pour l'estimation de card $A_{\mathcal{O}}(y,R)$, il suffit de remarquer, en suivant la preuve du lemme 3.2.(i), que

$$\left|\text{card } A_{\mathcal{O}}(y,R) - \frac{2\pi R^2}{\sqrt{|D|}}\right| \leq \text{card } \{x \in L_{\mathcal{O}}, F_x \cap \partial B \neq \emptyset\},$$

où B est le disque de centre $\sigma(y)$ et de rayon R et F le domaine fondamental de $\mathcal{O}$ relatif à la base $\{\sigma(1), \sigma(\omega)\}$, et que

$$\text{card } \{x \in L_{\mathcal{O}}, F_x \cap \partial B \neq \emptyset\} \leq \frac{4R}{\sqrt{|D|}}.$$

On a donc l'estimation :

$$\frac{2(\pi-2)}{\sqrt{|D|}}R^2 \leq \text{card } A_{\mathcal{O}}(y,R) \leq \frac{2(\pi+2)}{\sqrt{|D|}}R^2 \quad (\text{pour } R \geq 1).$$

Remarque 3.2 : Si $\mathcal{O}$ est un anneau principal, le groupe des classes d'idéaux de K est trivial, la constante c_5 du lemme 3.2 (i) peut être remplacée dans ce cas par $4 + \frac{8}{\sqrt{|D|}}$.

L'anneau $\mathcal{O}$ est un anneau de Dedekind ; soit v une place ultramétrique de K,$\mathcal{P}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}$ associé à v. Rappelons que la valeur absolue $|\cdot|_v$ associée à v est normalisée par $|p|_v = \frac{1}{p}$; p étant le nombre premier tel que $\mathcal{P} \cap \mathbf{Z} = (p)$.

Pour $x \in K$, $|x|_v = N(\mathcal{P})^{-\frac{v_{\mathcal{P}}(x)}{d_v}}$, où $v_{\mathcal{P}}(x)$ désigne la valuation $\mathcal{P}$-adique de x.

Rappelons les notations $S_R = \{x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}, |x| \leq R\}$, pour $y \in K$ et $t \in \mathbf{N}$, $S_R' = S_R$, $t' = t$ si $-y \notin S_R$ et $S_R' = S_R \setminus \{-y\}$, $t' = t-1$ si $-y \in S_R$, $\Sigma(0,t',S_R') = \Sigma_{\underline{S}}\frac{1}{s_1 \times \ldots \times s_{t'}}$, où $\underline{S} = (s_1, \ldots, s_{t'})$ parcourt l'ensemble des suites de t' éléments distincts de S_R'.

Lemme 3.3. *Soient v une place ultramétrique, $\mathcal{P}$ l'idéal premier associé et $y \in \mathcal{O}$. Alors, on a :*

$$\sum_{s \in S'_R} \log |\frac{s+y}{s}|_v \leq c_6 \frac{R \log N(\mathcal{P})}{d_v(\sqrt{N(\mathcal{P})}-1)}.$$

Preuve. On a :

$$v_{\mathcal{P}}\big(\prod_{s \in S'_R}(s+y)\big) \geq \sum_{k=1}^{[2\log R/\log N(\mathcal{P})]} \operatorname{card}\{s \in S'_R, s+y \in \mathcal{P}^k\}$$

$$\text{et} \quad v_{\mathcal{P}}\big(\prod_{s \in S'_R} s\big) = \sum_{k=1}^{[2\log R/\log N(\mathcal{P})]} \operatorname{card}\{s \in S'_R, s \in \mathcal{P}^k\}.$$

Rappelons que $A_{\mathcal{P}^k}(y,R)$ désigne $\{x \in \mathcal{P}^k, |x-y| \leq R\}$. Vue la définition de S'_R, on a :

$$\operatorname{card}\{s \in S'_R, s \in \mathcal{P}^k\} - \operatorname{card}\{s \in S'_R, s+y \in \mathcal{P}^k\} = \operatorname{card}\ A_{\mathcal{P}^k}(0,R) - \operatorname{card}\ A_{\mathcal{P}^k}(y,R).$$

On a donc :

$$-v_{\mathcal{P}}\left(\prod_{s \in S'_R} \frac{s+y}{s}\right) \leq \sum_{k=1}^{[2\log R/\log N(\mathcal{P})]} \operatorname{card}\ A_{\mathcal{P}^k}(0,R) - \operatorname{card}\ A_{\mathcal{P}^k}(y,R),$$

le lemme 3.2 (ii) entraîne que :

$$-v_{\mathcal{P}}\left(\prod_{s \in S'_R} \frac{s+y}{s}\right) \leq \sum_{k=1}^{[2\log R/\log N(\mathcal{P})]} c_6 \frac{R}{(N(\mathcal{P}))^{k/2}}.$$

D'où, $\quad -v_{\mathcal{P}}\left(\prod_{s \in S'_R} \frac{s+y}{s}\right) \leq c_6 \frac{R}{\sqrt{N(\mathcal{P})}-1}$

et
$$\sum_{s \in S'_R} \log |\frac{s+y}{s}|_v \leq c_6 \frac{R \log N(\mathcal{P})}{d_v(\sqrt{N(\mathcal{P})}-1)}.$$

□

Lemme 3.4. *Pour toute place ultramétrique v de K d'idéal associé $\mathcal{P}$ et pour tout réel $R > 1$, on a les deux types d'estimation suivantes :*

$$\log |\sum(0,t',S'_R)|_v \leq \frac{2t'}{d_v} \log R \tag{3.4.1}$$

et

$$\log |\sum(0,t',S'_R)|_v \leq c_8 \frac{R^2 \log N(\mathcal{P})}{d_v(N(\mathcal{P})-1)} \tag{3.4.2}$$

avec $c_8 = \frac{2\pi}{\sqrt{|D|}} + 8$.

Preuve. On a : $|\sum(0,t',S'_R)|_v \leq (\min_{s\in S'_R}|s|_v)^{-t'}$. Soit s_0 un élément de S'_R réalisant ce minimum. Comme $s_0 \in S'_R$, on a $|s_0| \leq R$ et $N(s_0) \leq R^2$, d'où $N(\mathcal{P})^{v_\mathcal{P}(s_0)} \leq R^2$, or $|s_0|_v^{-1} = N(\mathcal{P})^{v_\mathcal{P}(s_0)/d_v}$ donc $|s_0|_v^{-t'} \leq R^{\frac{2t'}{d_v}}$, d'où l'estimation (3.4.1).

Pour démontrer l'estimation (3.4.2), remarquons que : $(\prod_{s\in S'_R} s)\sum(0,t',S'_R)$ est un entier de K. Donc pour toute place ultramétrique v de K, on a :

$$|\sum(0,t',S'_R)|_v \leq |\prod_{s\in S'_R} s^{-1}|_v.$$

Or, $v_\mathcal{P}(\prod_{s\in S'_R} s) \leq \sum_{k=1}^{[2\log R/\log N(\mathcal{P})]} \text{card } A_{\mathcal{P}^k}(0,R)$ et le lemme 3.2.(i) montre que, si $N(\mathcal{P}^k) \leq R^2$, on a card $A_{\mathcal{P}^k}(0,R) \leq c_8 \frac{R^2}{N(\mathcal{P}^k)}$,
avec $c_8 = \frac{2\pi}{\sqrt{|D|}} + 8$.

On en déduit que :

$$v_\mathcal{P}\left(\prod_{s\in S'_R} s\right) \leq c_8 \frac{R^2}{N(\mathcal{P})-1} \text{ et } \log|\prod_{s\in S'_R} s^{-1}|_v \leq c_8 \frac{R^2 \log N(\mathcal{P})}{d_v(N(\mathcal{P})-1)},$$

d'où l'estimation (3.4.2). $\square$

Pour les polynômes de Lagrange P_R, nous avons les estimations suivantes :

Lemme 3.5. *Pour toute place ultramétrique v d'idéal associé $\mathcal{P}$, tout $R > 1$, tout $t \in \mathbf{N}$ et tout $y \in \mathcal{O}$, on a :*

$$\log|\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_R(y)|_v \leq c_6 \frac{R\log N(\mathcal{P})}{d_v(\sqrt{N(\mathcal{P})}-1)} + \frac{2t}{d_v}\log R \tag{3.5.1}$$

$$\log|\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_R(y)|_v \leq c_6 \frac{R\log N(\mathcal{P})}{d_v(\sqrt{N(\mathcal{P})}-1)} + c_8 \frac{R^2\log N(\mathcal{P})}{d_v(N(\mathcal{P})-1)} \tag{3.5.2}$$

Preuve. L'inégalité (3.5.1) résulte de l'estimation (3.1.2) du lemme 3.1 avec $S = S_R$ jointe au lemme 3.3 et à l'inégalité (3.4.1) du lemme 3.4.

Quant à l'inégalité (3.5.2), elle résulte de l'estimation (3.1.2) du lemme 3.1, avec $S = S_R$, jointe au lemme 3.3 et à l'inégalité (3.4.2). $\square$

Enfin, un lemme sur l'estimation de certaines sommes portant sur les nombres premiers.

Lemme 3.6. *Soient X et Y deux nombres réels ≥ 2, on a :*

$$\sum_{\substack{p\leq X \\ p \text{ premier}}} 1 \leq 1,26X/\log X, \tag{3.6.1}$$

$$\sum_{\substack{p\leq X \\ p \text{ premier}}} \frac{\log p}{\sqrt{p}-1} \leq 2,04\sqrt{X} + 1,02\log X + 4,08 \tag{3.6.2}$$

$$\sum_{\substack{Y<p\leq X \\ p \text{ premier}}} \frac{\log p}{p-1} \leq 1,02\log\left(\frac{X}{Y}\right) + 3,06 \tag{3.6.3}$$

$$\sum_{\substack{Y<p\leq X \\ p \text{ premier}}} \frac{\log p}{p^2-1} \leq 2 \tag{3.6.4}$$

Preuve. L'inégalité (3.6.1) est classique (cf. [10], corollaire 1 du théorème 2). Par ailleurs, en posant $\theta(X) = \sum_{\substack{Y<p\leq X \\ p \text{ premier}}} \log p$, on a, d'après la formule sommatoire d'Abel (cf. [2], § 5, théorème 1.6) pour toute fonction f continûment dérivable sur $]1,+\infty[$:

$$\sum_{Y<p\leq X} (\log p)f(p) = \theta(X)f(X) - \int_Y^X \theta(t)f'(t)dt.$$

Les estimations (3.6.2), (3.6.3) et (3.6.4) s'en déduisent en utilisant l'inégalité classique : $\theta(X) \leq 1,02X$ (cf. [10], théorème 9) et l'estimation de l'intégrale dans les cas $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (resp. $f(x) = \frac{1}{x-1}$), (resp. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$). $\square$

4. Preuve du théorème.

On a, d'après la formule de Leibniz

$$\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_R^l(z) = \sum_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_l) \\ \sigma_1+\dots+\sigma_l=t}} \Pi_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_i!}\frac{d^{\sigma_i}}{dz^{\sigma_i}}P_R(z).$$

En majorant chaque terme de cette somme à l'aide de l'inégalité (3.1.3) du lemme 3.1, on obtient dans le cas archimédien :

$$\begin{aligned}\log|\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}P_R^l(z)| &\leq l\delta_R\log(1+\frac{|z|}{R}) + (c_4+\log 2)l\delta_R + (t+l)\log 2 \\ &\leq l\delta_R\log(1+\frac{|z|}{R}) + (c_4+3\log 2)l\delta_R,\end{aligned}$$

d'où l'estimation analytique 1) du théorème.

Montrons maintenant l'estimation arithmétique.

Rappelons que pour $\alpha \in K$, on a :

$$\log \operatorname{den}(\alpha) = \sum_v d_v \max(0, \log |\alpha|_v),$$

où la somme porte sur toutes les places ultramétriques de K.

Soit $(y_1, ..., y_n) \in \mathcal{O}^n$,pour estimer le dénominateur commum de $\frac{1}{\tau!} \ \frac{d^\tau}{dz^\tau} P^k_\rho(y_i), \tau = 0, ..., t; k = 0, ..., l; \rho \leq R; i = 1, ..., n$, nous sommes amenés à estimer $|\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P^k_\rho(y_i)|_v$, pour les places ultramétriques v de K.

On déduit de la formule de Leibniz précédente que, pour toute place ultramétrique v de K et $y_i \in \mathcal{O}$, on a :

$$\log |\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P^k_\rho(y_i)|_v \leq \max_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_k)\\ \sigma_1+\dots+\sigma_k=\tau}} \sum_{j=1}^k \log |\frac{1}{\sigma_j!}\frac{d^{\sigma_j}}{dz^{\sigma_j}}P_\rho(y_i)|_v.$$

Cette inégalité jointe aux estimations du lemme 3.5 entraînent en notant $\mathcal{P}$ l'idéal premier associé à v, que pour tout (k, τ, ρ, i); $k = 0, \dots, l$; $\tau = 0, \dots, t$; $\rho \leq R$ et $i = 1, \dots, n$, on a :

$$\log |\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P^k_\rho(y_i)|_v \leq c_6 \frac{Rl \log N(\mathcal{P})}{d_v(\sqrt{N(\mathcal{P})}-1)} + \frac{2t}{d_v}\log R, \tag{4.1.1}$$

$$\log |\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P^k_\rho(y_i)|_v \leq c_6 \frac{Rl \log N(\mathcal{P})}{d_v(\sqrt{N(\mathcal{P})}-1)} + c_8\frac{R^2 l \log N(\mathcal{P})}{d_v(N(\mathcal{P})-1)}. \tag{4.1.2}$$

Remarquons que si $N(\mathcal{P}) > R^2$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, tout $\rho, \rho \leq R$, et tout $\tau \in \mathbf{N}$: $|\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P^k_\rho(y_i)|_v = 1$.

D'autre part, si $t > l\delta_R$, on a pour tout $k \leq l$ et $\rho \leq R$, $\frac{d^t}{dz^t}P^k_\rho \equiv 0$;

Posons alors : $R_0 = \min\left(R, \sqrt{\frac{l}{(t+1)}}R\right)$.

En tenant compte de ces remarques et en utilisant l'inégalité (4.1.1), si $N(\mathcal{P}) \leq R_0^2$ (resp. (4.1.2) si $N(\mathcal{P}) > R_0^2$), on obtient:

$$\begin{aligned}
\log \text{ den.com}\left\{\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P^k_\rho(y_i); \tau, k, \rho, i\right\} &\leq 2t\log(R) \sum_{\substack{\mathcal{P}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O})\\ N(\mathcal{P})\leq R_0^2}} 1 \\
&+ c_6 lR \sum_{\substack{\mathcal{P}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O})\\ N(\mathcal{P})\leq R_0^2}} \frac{\log N(\mathcal{P})}{\sqrt{N(\mathcal{P})}-1} + c_6 Rl \sum_{\substack{\mathcal{P}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O})\\ R_0^2<N(\mathcal{P})\leq R^2}} \frac{\log N(\mathcal{P})}{\sqrt{N(\mathcal{P})}-1} \\
&+ c_8 R^2 l \sum_{\substack{\mathcal{P}\in\operatorname{Spec}(\mathcal{O})\\ R_0^2<N(\mathcal{P})\leq R^2}} \frac{\log N(\mathcal{P})}{N(\mathcal{P})-1},
\end{aligned}$$

K étant un corps quadratique, on a : $N(\mathcal{P}) = p$ ou p^2 si p est le nombre premier tel que $\mathcal{P} \cap \mathbf{Z} = (p)$ et il existe au plus deux idéaux premiers au-dessus d'un nombre premier p.

D'où, $\displaystyle\sum_{\substack{\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\\ N(\mathcal{P})\leq R_0^2}} 1 \leq 2 \sum_{\substack{p \text{ premier}\\ p\leq R_0^2}} 1,$

l'estimation (3.6.1) du lemme 3.6 entraîne que : $\displaystyle\sum_{\substack{\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\\ N(\mathcal{P})\leq R_0^2}} 1 \leq 2\frac{R_0^2}{\log R_0}.$

Comme $N(\mathcal{P}) \geq 2$ pour $\mathcal{P} \in Spec(\mathcal{O})$, cette somme est évidemment nulle si $R_0 < \sqrt{2}$.

D'autre part, en notant $(\frac{\cdot}{p})$ le symbole de Legendre, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\\ N(\mathcal{P})\leq R^2}} \frac{\log N(\mathcal{P})}{\sqrt{N(\mathcal{P})}-1} &\leq 2 \sum_{\substack{p\leq R^2,\ p \text{ premier}\\ \left(\frac{D}{p}\right)=0 \text{ ou } 1}} \frac{\log p}{\sqrt{p}-1} + 2 \sum_{\substack{p\leq R,\ p \text{ premier}\\ \left(\frac{D}{p}\right)=-1}} \frac{\log p}{p-1}\\ &\leq 2 \sum_{\substack{p\leq R^2\\ p \text{ premier}}} \frac{\log p}{\sqrt{p}-1}.\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3.6.2) du lemme 3.6, on obtient :

$$\sum_{\substack{\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\\ N(\mathcal{P})\leq R^2}} \frac{\log N(\mathcal{P})}{\sqrt{N(\mathcal{P})}-1} \leq 4,08R + 4,08\log R + 8,16.$$

Des inégalités (3.6.3) et (3.6.4) du lemme 3.6, on tire les majorations :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\\ R_0^2<N(\mathcal{P})\leq R^2}} \frac{\log N(\mathcal{P})}{N(\mathcal{P})-1} &\leq 2 \sum_{\substack{R_0^2<p\leq R^2\\ p \text{ premier}}} \frac{\log p}{p-1} + 2 \sum_{\substack{R_0^2<p\leq R^2\\ p \text{ premier}}} \frac{\log p}{p^2-1}\\ &\leq 4,08\log\left(\frac{R}{R_0}\right) + 10,12.\end{aligned}$$

On en déduit que si $R_0 \geq \sqrt{2}$, on a :

$$\begin{aligned}\log \text{den.com}\left\{\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P_\rho^k(y_i); \tau,k,\rho,i\right\} &\leq 4t\ R_0^2\frac{\log R}{\log R_0} + (4,08c_6 + 10,12c_8)lR^2\\ &+ 4,08c_6 lR\log R + 8,16c_6 lR\\ &+ 4,08c_8 lR^2\log\left(\frac{R}{R_0}\right)\end{aligned}$$

et si $R_0 < \sqrt{2}$,on a la majoration plus simple :

$$\log \text{ den.com}\left\{\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P_\rho^k(y_i); \tau, k, \rho, i\right\} \leq (4,08c_6 + 10,12c_8)lR^2 + 4,08c_6 lR\log R + 8,16c_6 lR + 4,08c_8 lR^2 \log\left(\frac{R}{R_0}\right).$$

Vue la définition de R_0, on a :

$\log \frac{R}{R_0} \leq \frac{1}{2}\log^+\left(\frac{t+1}{l}\right)$, où $\log^+|\alpha| = \max(0, \log|\alpha|)$

et si $R_0 \geq \sqrt{2}$, on a :

$R \geq \sqrt{\frac{2(1+t)}{l}}$ et $t\ R_0^2 \frac{\log R}{\log R_0} \leq l\ R^2\left(1 + \frac{1}{\log 2}\log^+(\frac{1+t}{l})\right)$.
Or $R^2 \leq \frac{\sqrt{|D|}}{2(\pi-2)}\delta_R$, on en déduit que :

$$\log \text{ den.com}\left\{\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}P_\rho^k(y_i); \tau, k, \rho, i\right\} \leq c_9 l\delta_R \log^+\frac{(t+1)}{l} + c_{10} l\delta_R + c_{11} l\sqrt{\delta_R}\log\delta_R,$$

où $c_9 = 10\sqrt{|D|} + 6$, $c_{10} = 62\sqrt{|D|} + 28$ et $c_{11} = 15\sqrt{|D|}$.

5. Application du théorème 1.

Le théorème suivant est une extension du théorème de Pòlya dans le sens suivant : étant donnée une fonction f/g méromorphe non rationnelle, avec f et g d'ordre ≤ 2, qui envoie un sous-ensemble S de l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire dans un corps de nombres, avec S vérifiant une propriété de "densité" arithmétique ; alors le type de f ou g est minoré. Pour l'estimation de ce minorant, on utilise la méthode de M. Waldschmidt (cf. [11]) basée sur les techniques des alternants de M. Laurent.
Ce théorème répond à une question posée par M. Waldschmidt dans [11].

Notons pour $R > 0$ et f une fonction entière, $B(0, R) = \{z \in \mathbf{C}/|z| \leq R\}$ et $|f|_R = \sup_{|z|=R}|f(z)|$.
On note h la hauteur logarithmique absolue de Weil, h est définie sur $\mathbf{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$ de la façon suivante : pour $P = (x_0, \ldots, x_N) \in \mathbf{P}^N(K)$, où K est un corps de nombres de degré d sur $\mathbf{Q}$,

$$h(P) = \frac{1}{d}\sum_v d_v \log\max(|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v)$$

où v décrit l'ensemble des places de K, normalisées de telle sorte qu'on ait la formule du produit : pour tout $x \in K$, $x \neq 0$, $\prod_v |x|_v^{d_v} = 1$.
Si α est un nombre algébrique, on désigne par $h(\alpha)$ la hauteur $h(1,\alpha)$ du point $(1,\alpha)$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}(\alpha))$.

Théorème 5.1. *Soient k un corps quadratique imaginaire de discriminant D, $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k, K une extension finie de k de degré d sur $\mathbf{Q}$ que l'on considère plongé dans $\mathbf{C}$, γ_0 et γ_1 deux réels positifs.*

Soient S un sous-ensemble de $\mathcal{O}_k$, f et g deux fonctions entières d'ordre ≤ 2, vérifiant :

$$g(s) \neq 0 \text{ et } \frac{f(s)}{g(s)} \in K, \text{ pour tout } s \in S \tag{5.1}$$

et pour tout R suffisamment grand,

$$\text{card } S \cap B(0,R) \geq \gamma_0 R^2 \tag{5.2}$$

et

$$\max_{s \in S \cap B(0,R)} \left(\log \frac{1}{|g(s)|}, h\Big(\frac{f(s)}{g(s)}\Big) \right) \leq \gamma_1 R^2. \tag{5.3}$$

Alors il existe un réel $\theta > 0$ calculable en fonction de γ_0, γ_1, D et d tel que si

$$\max\{\log |f|_R, \log |g|_R\} \leq \theta R^2, \text{ pour tout } \textit{R suffisamment grand,} \tag{5.4}$$

alors $\frac{f}{g}$ est une fonction rationnelle.

Preuve. Soient L_0 et B des entiers > 1. On pose :

$$I := \{\lambda_0 \in \mathcal{O}_k / 0 < |\lambda_0| \leq L_0\} \text{ et } L := B \cdot \text{card } (I).$$

On a : card $(I) = \delta_{L_0}$, avec $\frac{2(\pi-2)}{\sqrt{|D|}} \leq \frac{\delta_{L_0}}{L_0^2} \leq \frac{2(\pi+2)}{\sqrt{|D|}}$ (cf. remarque 3.1) et $L = B\delta_{L_0}$.

On considère les L fonctions : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définies par :

$$P_{L_0}(z+\lambda_0) f(z)^{\lambda_1} g(z)^{B-\lambda_1}, \lambda_0 \in I,\ 0 \leq \lambda_1 < B,$$

où
$$P_{L_0}(z) = \prod_{\alpha \in I} \left(\frac{z+\alpha}{\alpha} \right).$$

On note ces L fonctions : $\varphi_\lambda(z)$, $1 \leq \lambda \leq L$.

Soit la fonction $\phi : \mathbf{C}^L \to \mathbf{C}$ définie par :

$$\phi(z_1, \ldots, z_L) = \det\left(\varphi_\lambda(z_\mu)\right)_{1 \leq \lambda, \mu \leq L},$$

(λ (resp. μ) est l'indice de ligne (resp. colonne)).
ϕ est une fonction entière sur $\mathbf{C}^L$.
On ordonne les éléments de S par module, puis argument croissant. On notera "$<$" cette relation d'ordre.

1er pas : On suppose que l'hypothèse (**H**) suivante est vérifiée.
(**H**): Pour tout L_0 assez grand il existe L éléments de S : $s_1 < s_2 < \ldots < s_L$, tels que : $\phi(s_1, \ldots, s_L) \neq 0$.

On choisit le L-uplet $(s_1, \ldots, s_L)$ minimal pour l'ordre lexicographique dans S^L, vérifiant : $\phi(s_1, \ldots, s_L) \neq 0$, et on note

$$\Delta := \phi(s_1, \ldots, s_L).$$

Remarquons que pour tout $1 \leq \mu \leq L$, $|s_\mu| \geq 1$; en effet, comme pour tout $\lambda_0 \in I$, $P_{L_0}(\lambda_0) = 0$, s'il existe μ dans l'ensemble $\{1, \ldots, L\}$ tel que $s_\mu = 0$, alors $\phi(s_1, \ldots, s_L) = 0$. Donc pour tout $1 \leq \mu \leq L$, $s_\mu \in \mathcal{O}_k \setminus \{0\}$, d'où $|s_\mu| \geq 1$. Pour donner une majoration de $|\Delta|$, nous allons utiliser le lemme de Schwarz.
On pose $n_0 = 0$ et $n_\mu = \operatorname{card}\{s \in S / s < s_\mu\}$,pour $\mu = 1, \ldots, L$.
On note $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n_L}$ les éléments de l'ensemble $\{s \in S / s \leq s_L\}$ ordonnés de manière à avoir $\xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n_L}$.

Soit A un réel > 1. On pose : $R_\mu = A|s_\mu|$ et $E = \frac{A^2+1}{2A}$,
alors, on a : $0 \leq n_1 < n_2 \ldots < n_L$ et pour tout $1 \leq \mu \leq L$; $\xi_{n_\mu} = s_\mu$, $\max_{0 \leq i \leq n_\mu} |\xi_i| = |s_\mu| \leq R_\mu$ et $\min_{0 \leq i < n_\mu} \frac{R_\mu^2 + |\xi_i \xi_{n_\mu}|}{R_\mu(|\xi_i| + |\xi_{n_\mu}|)} \geq E \geq 1$.

D'autre part, on a pour tout $0 \leq \mu < L$ et $n_\mu \leq i < n_{\mu+1}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(s_1) & \ldots & \varphi_1(s_\mu) & \varphi_1(\xi_i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_L(s_1) & \ldots & \varphi_L(s_\mu) & \varphi_L(\xi_i) \end{pmatrix}$$

est de rang μ, sinon il existe $\mu; 0 \leq \mu < L$, des éléments $s'_{\mu+1}, ..., s'_L$ de S et un entier j avec $\mu + 1 \leq j \leq L$ tels que $s'_j < s_j$ et $\phi(s_1, \ldots, s_\mu, s'_{\mu+1}, s'_{\mu+2}, \ldots, s'_L) \neq 0$; cela contredit la minimalité du L-uplet $(s_1, ..., s_L)$. Par conséquent, pour tout $0 \leq \nu < L$, la fonction

$\phi(s_1, \ldots, s_\nu, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) / \prod_{\mu=\nu+1}^{L} \prod_{n_\nu \leq i < n_{\nu+1}} (z_\mu - \xi_i)$ en les $L-\nu$ variables $z_{\nu+1}, \ldots, z_L$ est analytique ; cela permet d'écrire (cf. proposition 2 de [11]) que :

$$|\phi(s_1, \ldots, s_L)| \leq L! \prod_{\mu=1}^{L} \max_\lambda |\varphi_\lambda|_{R_\mu} E^{-n_\mu},$$

car $\quad |\phi(z_1,\ldots,z_L)| \leq L!\prod_{\mu=1}^{L} \max_{\lambda} |\varphi_\lambda|_{R_\mu}, \quad$ si $|z_j| = R_j$,

$j = 1,\ldots,L$.

Majoration de $|\varphi_\lambda|_{R_\mu}$, $1 \leq \mu \leq L$.

D'après le théorème 2.1, pour tout $\lambda_0 \in I$, on a :

$$|P_{L_0}(z+\lambda_0)|_{R_\mu} \leq \left(\frac{A|s_\mu|}{L_0}+2\right)^{\delta_{L_0}} e^{c_0\delta_{L_0}}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (5.4), il existe un réel $R_2 > 0$ tel que :

$\max\{|f|_R, |g|_R\} \leq e^{\theta R^2}$, pour tout $R \geq R_2$.

On en déduit que pour tout $0 \leq \lambda_1 < B$, on a :

$|f(z)^{\lambda_1} g(z)^{B-\lambda_1}|_{R_\mu} \leq k_2^B e^{A^2 B\theta |s_\mu|^2}$, où $k_2 = \max(1, |f|_{R_2}, |g|_{R_2})$.

Grâce à ces majorations, on obtient :

$$\begin{aligned} |\Delta| \quad &\leq \quad \exp\{L(\mathrm{Log}\ L + c_0\delta_{L_0} + B\mathrm{Log}\ k_2)\} \\ &\times \quad \prod_{\mu=1}^{L}\left(\exp\{-n_\mu \mathrm{Log}\ E + A^2 B\theta|s_\mu|^2\}\left(\frac{A}{L_0}|s_\mu|+2\right)^{\delta_{L_o}}\right). \end{aligned}$$

Minoration de $|\Delta|$.

Notons Ω le dénominateur commun des $P_{L_0}(s_\mu+\lambda_0)$, $1 \leq \mu \leq L, \lambda_0 \in I$ et pour $1 \leq \mu \leq L$, Λ_μ le dénominateur de $\frac{f}{g}(s_\mu)$.

On pose :

$$\Delta' = \det\left(\Omega\Lambda_\mu^B g(s_\mu)^{-B}\varphi_\lambda(s_\mu)\right)_{1\leq\lambda,\mu\leq L},$$

on a : $\Delta = \left(\Omega^{-L}\prod_{\mu=1}^{L}(\Lambda_\mu^{-1} g(s_\mu))^B\right)\Delta'$.

D'aprés l'hypothèse (5.1) $\ \Delta' \in K$, comme $\Delta \neq 0$, alors $\Delta' \in K \setminus \{0\}$, et par suite l'inégalité de Liouville entraîne :

$$\mathrm{Log}|\Delta'| \geq -dh(\Delta'), \tag{5.5}$$

d étant le degré de K sur $\mathbf{Q}$.

Pour $1 \leq \lambda,\mu \leq L \ \ (\lambda = (\lambda_0,\lambda_1), \lambda_0 \in I,\ 0 \leq \lambda_1 < B)$, posons :

$$\psi_\lambda(s_\mu) := \Omega\Lambda_\mu^B g(s_\mu)^{-B}\varphi_\lambda(s_\mu) = \Omega\Lambda_\mu^B P_{L_0}(s_\mu+\lambda_0)\left(\frac{f(s_\mu)}{g(s_\mu)}\right)^{\lambda_1}.$$

On a:

$$h(\Delta') \leq \mathrm{Log}(L!) + h\left(1, \prod_{\mu=1}^{L}\psi_1(s_\mu), ..., \prod_{\mu=1}^{L}\psi_L(s_\mu)\right).$$

Comme $\psi_\lambda(s_\mu)$ est un entier algébrique de K pour $1 \leq \lambda, \mu \leq L$ on a:

$$h\left(1, \prod_{\mu=1}^{L} \psi_1(s_\mu), ..., \prod_{\mu=1}^{L} \psi_L(s_\mu)\right) \leq \frac{1}{d} \sum_{v \in M_{K,\infty}} d_v \max_j \ (0, \log | \prod_{\mu=1}^{L} \psi_j(s_\mu)|),$$

où $M_{K,\infty}$ désigne l'ensemble des places archimédiennes de K,
or $\sum_{v \in M_{K,\infty}} d_v = d$,on en déduit que:

$$h\left(1, \prod_{\mu=1}^{L} \psi_1(s_\mu), ..., \prod_{\mu=1}^{L} \psi_L(s_\mu)\right) \leq d \max_{1 \leq \lambda \leq L} h\left(\prod_{\mu=1}^{L} \psi_\lambda(s_\mu)\right)$$

D'où:

$$\begin{aligned} h(\Delta') &\leq \operatorname{Log}(L!) + d \max_{1 \leq \lambda \leq L} h\left(\prod_{\mu=1}^{L} \psi_\lambda(s_\mu)\right) \\ &\leq \operatorname{Log}(L!) + d \sum_{\mu=1}^{L} \max_{1 \leq \lambda \leq L} h\left(\psi_\lambda(s_\mu)\right) \\ &\leq \operatorname{Log}(L!) + d \sum_{\mu=1}^{L} \left\{ \max_{\lambda_0 \in I} h(\Omega P_{L_0}(s_\mu + \lambda_0)) + Bh\left(\Lambda_\mu \frac{f(s_\mu)}{g(s_\mu)}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Comme $\Omega P_{L_0}(s_\mu + \lambda_0)$ $(1 \leq \lambda, \mu \leq L)$ est un entier d'un corps quadratique imaginaire, on a : $h(\Omega P_{L_0}(s_\mu + \lambda_0)) \leq \operatorname{Log}|\Omega P_{L_0}(s_\mu + \lambda_0)|$
et grâce au théorème 2.1, on obtient :

$$h(\Omega P_{L_0}(s_\mu + \lambda_0)) \leq \delta_{L_0} \operatorname{Log}\left(\frac{|s_\mu|}{L_0} + 2\right) + \delta_{L_0}(c_0 + c_2) + c_3 \sqrt{\delta_{L_0}} \operatorname{Log} \delta_{L_0}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (5.3), il existe $R_1 > 0$ tel que :

$$\max_{s \in S \cap B(0,R)} \left(-\operatorname{Log}|g(s)|, h(\frac{f(s)}{g(s)}) \right) \leq \gamma_1 R^2, \text{ pour tout } R \geq R_1.$$

On en déduit que pour tout $1 \leq \mu \leq L$, $\operatorname{Log}|g(s_\mu)| \geq -\gamma_1 |s_\mu|^2 - k_1$
et $h\left(\frac{f(s_\mu)}{g(s_\mu)}\right) \leq \gamma_1 |s_\mu|^2 + k_1$, où $k_1 = \max_{s \in S \cap B(0,R_1)} \left(-\operatorname{Log}|g(s)|, h(\frac{f(s)}{g(s)}) \right)$.

Rappelons que $\Lambda_\mu = den(\frac{f}{g}(s_\mu))$ et $\Lambda_\mu \frac{f}{g}(s_\mu) \in K$ pour $1 \leq \mu \leq L$, donc

on a : $\log \Lambda_\mu \leq dh(\frac{f}{g}(s_\mu))$ et $h(\Lambda_\mu \frac{f}{g}(s_\mu)) \leq (1 + d)h(\frac{f}{g}(s_\mu))$.

Comme $\Delta = \left(\Omega^{-L}\prod_{\mu=1}^{L}(\Lambda_\mu^{-1}g(s_\mu))^B\right)\Delta'$, l'inégalité (5.5) jointe aux estimations précédentes entraînent que :

$$\begin{aligned}|\Delta| \quad &\geq \quad \exp\Big\{-L\Big(d\mathrm{Log}\ L+\delta_{L_0}(c_0d^2+c_2(d^2+1))+c_3(1+d^2)\sqrt{\delta_{L_0}}\mathrm{Log}\delta_{L_0}\Big)\Big\}\\ &\times \quad \exp\Big(-L(1+d)(1+d^2)Bk_1\Big)\\ &\times \quad \prod_{\mu=1}^{L} e^{-(1+d)(1+d^2)B\gamma_1|s_\mu|^2}\left(\frac{|s_\mu|}{L_0}+2\right)^{-d^2\delta_{L_0}}\end{aligned}$$

Rappelons que $E=\frac{A^2+1}{2A}$ (A étant un réel >1).
De la majoration et la minoration de $|\Delta|$, il résulte :

$$\begin{aligned}&\exp\Big\{L\Big((1+d)\mathrm{Log}L+(c_0+c_2)(1+d^2)\delta_{L_0}+c_3(1+d^2)\sqrt{\delta_{L_0}}\mathrm{Log}\ \delta_{L_0}\Big)\Big\}\\ \times\ &\exp\Big\{L\Big((1+d)(1+d^2)k_1B+B\mathrm{Log}k_2\Big)\Big\}\\ \times\ &\prod_{\mu=1}^{L}\exp\{-n_\mu\mathrm{Log}\left(\frac{A^2+1}{2A}\right)+(A^2B\theta+(1+d)(1+d^2)B\gamma_1)|s_\mu|^2\}\left(\frac{A}{L_0}|s_\mu|+2\right)^{(1+d^2)\delta_{L_0}}\\ \geq\ & 1.\end{aligned}$$

Dans cette inégalité, pour $1\leq\mu\leq L$, on va majorer $|s_\mu|$ en fonction de n_μ.

D'après l'hypothèse (5.2), il existe un réel $R_0>0$ tel que :

$$\mathrm{card}\ S\cap B(0,R)\geq\gamma_0R^2,\ \text{pour tout}\ \ R\geq R_0,$$

il en résulte que pour tout $R\geq 1$,

$$\mathrm{card}\ S\cap B(0,R)\geq\gamma_0R^2-\gamma_0R_0^2.$$

Rappelons que pour $1\leq\mu\leq L$, $|s_\mu|\geq 1$ et $n_\mu=\mathrm{card}\{s\in S/s<s_\mu\}$. Donc $n_\mu\geq\mathrm{card}\ \{s\in S/|s|<|s_\mu|\}\geq\gamma_0|s_\mu|^2-\gamma_0R_0^2$.

En prenant L_0 suffisamment grand, on peut supposer que $R_0^2\leq L_0$, par conséquent, on a la majoration :

$$|s_\mu|^2\leq\frac{n_\mu}{\gamma_0}+L_0,\ 1\leq\mu\leq L.$$

En reportant cette majoration dans l'inégalité obtenue à partir de la majoration et la minoration de $|\Delta|$, et en posant :

$$\omega:=\mathrm{Log}\left(\frac{A^2+1}{2A}\right)-(A^2B\theta+(1+d)(1+d^2)B\gamma_1)\gamma_0^{-1}$$

et
$$T:=\prod_{\mu=1}^{L}e^{-\omega n_\mu}\left(\frac{A}{L_0}\sqrt{n_\mu\gamma_0{}^{-1}+L_0}+2\right)^{(1+d^2)\delta_{L_0}},$$

on obtient :

$$\exp\left\{L\left((1+d)\mathrm{Log}L+(c_0+c_2)(1+d^2)\delta_{L_0}+c_3(1+d^2)\sqrt{\delta_{L_0}}\mathrm{Log}\delta_{L_0}\right)\right\}$$
$$\exp\Big\{L\Big((1+d)(1+d^2)k_1B+B\mathrm{Log}k_2+L_0(A^2B\theta+(1+d)(1+d^2)B\gamma_1)\Big)\Big\}\cdot T\geq 1.$$

Nous allons montrer que si θ est “assez petit” en fonction de d, D, γ_0 et γ_1 alors l'inégalité précédente ne peut avoir lieu.

On suppose que :

$$\omega>0. \tag{5.6}$$

On va donner une majoration de T :

Considérons la fonction :

$$f(x)=e^{-\omega x}\left(\frac{A}{L_0}\sqrt{\frac{x}{\gamma_0}+L_0}+2\right)^{(1+d^2)\delta_{L_0}},\ x>-\gamma_0L_0.$$

Rappelons que $\delta_{L_0}\leq c_{12}L_0^2$, avec $c_{12}=\frac{2(\pi+2)}{\sqrt{|D|}}$.
En étudiant la fonction f, on vérifie qu'il existe un réel $x_0>-\gamma_0L_0$ tel que f est croissante sur $]-\gamma_0L_0,x_0]$ et décroissante sur $[x_0,+\infty[$, et comme pour $1\leq\mu\leq L$ les entiers positifs n_μ sont distincts, on en déduit :

$$\begin{aligned}T &\leq \max_{n\in\mathbf{N}}\prod_{\mu=0}^{L-1}e^{-\omega(n+\mu)}\left(\frac{A}{L_0}\sqrt{\frac{n+\mu}{\gamma_0}+L_0}+2\right)^{(1+d^2)\delta_{L_0}}\\ &\leq e^{-\omega\frac{L(L-1)}{2}}\max_{n\in\mathbf{N}}e^{-\omega nL}\left(\frac{A}{L_0}\sqrt{\frac{n+L}{\gamma_0}+L_0}+2\right)^{(1+d^2)L\delta_{L_0}}.\end{aligned}$$

Soit la fonction g définie par :

$$g(x)=e^{\omega L}f(x+L)$$

Rappelons que $L=B\delta_{L_0}=B\alpha L_0^2$. On vérifie facilement que si $\omega B\geq\frac{1+d^2}{2}$, alors g est décroissante sur $[0,+\infty[$.

On suppose que :

$$\omega B\geq\frac{1+d^2}{2}. \tag{5.7}$$

Donc, on a :

$$T\leq e^{-\omega\frac{L(L-1)}{2}}\left(A\sqrt{Bc_{12}\gamma_0^{-1}}+\frac{A}{\sqrt{L_0}}+2\right)^{(1+d^2)L\delta_{L_0}}.$$

Par conséquent, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \exp\Big\{L\Big((1+d)\mathrm{Log}L+(c_0+c_2)(1+d^2)\delta_{L_0}+c_3(1+d^2)\sqrt{\delta_{L_0}}\mathrm{Log}\delta_{L_0}\Big)\Big\} \\ \times\ & \exp\Big(L(1+d)(1+d^2)k_1B\Big) \\ \times\ & \exp\Big\{L\Big(B\mathrm{Log}k_2+L_0(A^2B\theta+(1+d)(1+d^2)B\gamma_1)\Big)\Big\} \\ \times\ & e^{-\omega\frac{L(L-1)}{2}}\left(A\sqrt{\frac{Bc_{12}}{\gamma_0}}+\frac{A}{\sqrt{L_0}}+2\right)^{(1+d^2)L\delta_{L_0}}\geq 1 \end{aligned}$$

En prenant le logarithme de chaque membre de cette inégalité, en divisant par L^2, et en faisant tendre L_0 vers l'infini, on obtient :

$$\frac{1+d^2}{B}\left\{c_0+c_2+\mathrm{Log}(A\sqrt{Bc_{12}\gamma_0^{-1}}+2)\right\}-\frac{\omega}{2}\geq 0.$$

Par conséquent, en supposant que

$$\begin{aligned} \gamma_0\mathrm{Log}\left(\frac{A^2+1}{2A}\right) &> A^2B\theta+(1+d)(1+d^2)\gamma_1B+ \\ &+\frac{2\gamma_0}{B}(1+d^2)\left\{c_0+c_2+\mathrm{Log}(A\sqrt{Bc_{12}\gamma_0^{-1}}+2)\right\} \end{aligned} \tag{5.8}$$

l'hypothèse (**H**) ne peut se produire ; en effet, l'inégalité (5.8) entraîne (5.7) et (5.6) par suite, on a une contradiction.
En conclusion du premier pas, sous les hypothèses du théorème (5.1) et l'inégalité (5.8),il existe un entier L assez grand tel que la fonction ϕ s'annule sur S^L.

2ème pas : On suppose alors qu'il existe L assez grand tel que la fonction ϕ s'annule sur l'ensemble S^L. Par conséquent, il existe des nombres complexes a_λ, $\lambda=1,\ldots,L$, non tous nuls, tels que la fonction :

$$\Psi(z):=\sum_{\lambda=1}^{L}a_\lambda\varphi_\lambda(z),$$

s'annule sur S.

Si Ψ est identiquement nulle, puisque les polynômes $P_{L_0}(X+\lambda_0)$, $|\lambda_0|\leq L_0$ sont linéairement indépendants, $\frac{f}{g}$ est une fonction algébrique, et comme elle est méromorphe dans $\mathbf{C}$, il en résulte que $\frac{f}{g}$ est une fonction rationnelle.

Si Ψ est non identiquement nulle, en utilisant le théorème 2 et l'hypothèse (5.4), pour tout R assez grand, $\lambda_0\in I$ et $0\leq\lambda_1<B$, on a :

$$|f(z)^{\lambda_0}g(z)^{B-\lambda_1}|_R\leq e^{B\theta R^2}$$

et

$$|P_{L_0}(z+\lambda_0)|_R \leq \left(\frac{R}{L_0}+2\right)^{\delta_{L_0}} e^{c_0\delta_{L_0}}.$$

Donc pour tout R suffisamment grand,

$$|\Psi|_R \leq \sum_{\lambda=1}^{L} |a_\lambda| \left(\frac{R}{L_0}+2\right)^{\delta_{L_0}} e^{c_0\delta_{L_0}+B\theta R^2}.$$

On en déduit que pour $\varepsilon > 0$, il existe un réel $R_0 > 0$, tel que si $R \geq R_0$, on a :

$$|\Psi|_R \leq \sum_{\lambda=1}^{L} |a_\lambda| e^{c_0\delta_{L_0}} e^{B\theta(1+\varepsilon)R^2}.$$

Comme Ψ est non identiquement nulle et qu'elle s'annule sur S, elle est non constante et puisqu'elle est entière, elle n'est pas bornée. Alors, il existe un réel $R_1 \geq R_0$ tel que : $|\Psi|_{R_1} \geq M$, où $M = \sum_{\lambda=1}^{L} |a_\lambda| e^{c_0\delta_{L_0}}$.

Ψ étant nulle sur S, le lemme de Schwarz en une variable (cf. proposition 2 [11]), entraîne :

$$|\Psi|_{R_1} \leq |\Psi|_{AR_1} \times \left(\frac{A^2+1}{2A}\right)^{-\text{card } S\cap B(0,R_1)}.$$

Comme card $S \cap B(0,R_1) \geq \gamma_0 R_1^2$ d'après l'hypothèse (5.2), on en déduit que : $|\Psi|_{R_1} \leq |\Psi|_{AR_1} \times \left(\frac{A^2+1}{2A}\right)^{-\gamma_0 R_1^2}$.

D'où

$$M \leq |\Psi|_{R_1} \leq M e^{A^2 B\theta(1+\varepsilon)R_1^2} \times \left(\frac{A^2+1}{2A}\right)^{-\gamma_0 R_1^2},$$

en prenant le logarithme de chaque membre et en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$A^2 B\theta - \gamma_0 \text{Log}\left(\frac{A^2+1}{2A}\right) \geq 0,$$

ce qui contredit l'inégalité (5.8).

En conclusion, sous les hypothèses du théorème 5.1, si

$$\theta < \max_{\substack{A>1 \\ B \text{ entier}>1}} \Big\{ \frac{1}{A^2B^2}\Big(\gamma_0 B \text{Log}\big(\frac{A^2+1}{2A}\big) - (1+d)(1+d^2)\gamma_1 B^2 - -2\gamma_0(1+d^2)\big(c_0+c_2+\log(A\sqrt{Bc_{12}\gamma_0^{-1}}+2)\big)\Big)\Big\}$$

alors $\frac{f}{g}$ est une fonction rationnelle.

On vérifie que ce maximum est strictement positif ; il suffit de prendre $B > 2(1+d^2)$ et A assez grand. □

Remarques :

1. Dans [12], M. Waldschmidt a démontré un résultat analogue au théorème 5.1, dans le cas où $S \subset \mathbf{Z}$, en utilisant la méthode de Schneider.

2. En prenant $K = k$, $d = 2$, $g \equiv 1$, $S = \mathcal{O}_k$, $\gamma_0 = \frac{2(\pi-2)}{\sqrt{|D|}}$ et f une fonction entière non polynômiale qui envoie $\mathcal{O}_k$ dans $\mathcal{O}_k$ et vérifiant $\log |f|_R \leq \gamma_1 R^2$,alors le théorème 5.1 montre que γ_1 est minoré en fonction du discriminant de k.

Signalons que dans ce cas particulier F. Gramain (cf.[6]) a obtenu la minoration optimale ($\gamma_1 \leq \frac{\pi}{e\sqrt{|D|}}$).

Bibliographie

[1] Z.I. Borevitch, I.R.Chafarevitch, *Théorie des nombres*, Ed. Gauthier-Villars, Paris.

[2] W. Ellison, M. Mendès France, *Les nombres premiers*, Pub. de l'Institut de Math. de l'Univ. de Nancago, IX, Ed. Hermann, 1975.

[3] N.I. Fel'dman, Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers, *Math. Sbornik* **77**, (119), 1968 ; 423–436 = *Math. USSR Sbornik* **6**, 1968, pp. 393–406.

[4] A. Gel'fond, Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières, *Tôhoku Math. J.*, t. **30** ; 1929, pp. 280–285.

[5] F. Gramain, Polynômes d'interpolation sur $\mathbf{Z}[i]$, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique, no 16, 1978/79, 13p.

[6] F. Gramain, Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond, *Invent. Math.* **63** (1981), 495–506.

[7] L. Gruman, Propriétés arithmétiques des fonctions entières, *Bull. Soc. Math. de France* **108** (1980), 421–440.

[8] P. Philippon, Polynômes d'interpolation sur $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}[i]$, dans Lecture Notes in Mathematics no 1415, cinquante ans de polynômes,
Proceedings, Paris, 1988, eds M. Langevin, M. Waldschmidt, Springer-Verlag.

[9] G. Pòlya, Über ganzwertige ganze Funktionen, *Rend. Circ. Math. Palermo*, t. **40** (1915), 1–16.

[10] J.B. Rosser, L.Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 64–94.

[11] M. Waldschmidt, Extrapolation et Alternants, *Pub. Math. de l'Univ. Pierre et Marie Curie* no 108, groupe d'étude sur les problèmes diophantiens, 92–93, exposé no 11.

[12] M. Waldschmidt, Pòlya's theorem by Schneider's method, *Acta Mathematica Acad. Scien. Hung.* **31** (1-2) (1978), 21–25.

UFR de Mathématiques - URA CNRS 751, Bât. M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)
E-mail : `ably@gat.univ-lille1.fr`, `mzary@gat.univ-lille1.fr`