*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **11** (1999), 231–246

# Équations différentielles sur un corps de fonctions algébriques

par Alain SALINIER

Résumé. On étend une partie de la théorie de la structure de Frobenius faible des équations différentielles $p$-adiques au cas où les coefficients sont des fonctions algébriques.

Abstract. The theory of the weak Frobenius structure of $p$-adic differential equations is partially extended to the case of differential equations with algebraic functions as coefficients.

La structure de Frobenius des équations différentielles $p$-adiques est un outil fondamental dans l'étude de ces équations, traitée sur divers espaces de fonctions $p$-adiques. En particulier, la théorie de la structure de Frobenius faible consiste à établir que le foncteur dit de Frobenius est une équivalence de la catégorie des modules différentiels solubles sur elle-même. Ce résultat a été établi en particulier sur l'espace des éléments analytiques dans le disque générique [4].

On se propose ici d'établir des résultats analogues à ceux qui constituent cette théorie de la structure de Frobenius faible, dans le cas où les équations ont des coefficients dans un corps d'éléments algébriques, c'est-à-dire dans le complété d'un corps de fonctions algébriques relativement à une valeur absolue $p$-adique. Une telle généralisation doit pouvoir en particulier être utilisée pour tester les conjectures de Dwork et Bombieri sur certaines équations différentielles qu'on n'a pas su traiter jusqu'à présent.

De façon précise, les résultats que nous présentons ici concernent deux aspects de la structure de Frobenius faible : d'une part, l'étude de la pleine fidélité du foncteur de Frobenius, d'autre part un théorème "d'invariance" qui prouve que ce foncteur de Frobenius est indépendant dans une certaine mesure de l'endomorphisme de Frobenius utilisé pour sa définition. Le troisième aspect de la structure de Frobenius faible, à savoir le problème de la descente par Frobenius des modules différentiels, fera l'objet d'une étude ultérieure.

Un aspect important du présent travail est qu'il ne se limite pas au foncteur de Frobenius au sens strict, mais qu'il s'efforce aussi de traiter des changements de variable plus généraux. En effet, il apparait immédiatement que, si on se place par exemple sur un corps de fonctions elliptiques, il y a des endomorphismes de multiplication plus naturels que le changement de variable qui sert à définir l'endomorphisme de Frobenius. Dans ce but, la première section est consacrée entiérement à ces changements de variable.

## 1. Changements de variable

1.1. **Définitions et rappels.** Soit $(A, \partial_A)$ et $(B, \partial_B)$ deux anneaux différentiels (c'est-à-dire des anneaux unifères commutatifs munis d'une dérivation). On appelera *changement de variable* de $A$ dans $B$ tout morphisme d'anneaux unifères $\phi : A \to B$ tel que

$$\partial_B(\phi(a)) = \gamma\phi(\partial_A(a)) \tag{1}$$

pour tout $a$ de $A$, $\gamma$ étant un élément *inversible* de $B$. Quand $\gamma = 1$, on dit que $\phi$ est un morphisme d'anneaux différentiels ou encore un morphisme horizontal.

A partir de l'anneau différentiel $(A, \partial_A)$, on construit un *anneau d'opérateurs différentiels* noté $A[x; \partial_A]$, qu'on peut définir comme l'anneau unifère pointé (c'est-à-dire muni d'un élément distingué, ici noté $x$) représentant le foncteur qui à tout anneau unifère pointé $(C, x)$ associe l'ensemble des morphismes horizontaux de $(A, \partial_A)$ dans l'anneau différentiel $(C, [x, -])$ où $[x, -]$ est la dérivation intérieure de $C$ associée à $x$. En particulier, on sait qu'il existe un morphisme injectif de $A$ dans $A[x; \partial_A]$ qui permet de définir sur $A[x; \partial_A]$ deux structures de $A$-modules. Pour l'une ou l'autre de ces deux structures, $A[x; \partial_A]$ est un $A$-module libre de base $(x^n)_n$.

Soit $\phi$ un changement de variable de $(A, \partial_A)$ dans $(B, \partial_B)$ avec $A$ et $B$ commutatifs. Notons $C = A[x; \partial_A]$ et $D = B[y; \partial_B]$. La définition même de l'anneau $A[x; \partial_A]$ permet de prolonger $\phi$ en un morphisme, également noté $\phi$, de $C$ dans $D$ en posant

$$\phi(x) = \gamma^{-1}y \ , \tag{2}$$

où $\gamma$ est l'élément inversible de $B$ satisfaisant la relation (1).

A l'aide de ce morphisme $\phi$ ainsi prolongé, on peut définir sur $D$ une structure de $C$-module à droite et une structure de $C$-module à gauche. Lorsqu'il sera utile de distinguer ces deux structures, nous les noterons respectivement $D_r$ et $D_l$.

1.2. **Changement de variable dans les équations différentielles.** Reprenons les notations précédentes. On va définir un *foncteur changement de variable* de la catégorie des $C$-modules à gauche dans la catégorie des $D$-modules à gauche. Cette définition n'est qu'un cas particulier de la construction bien connue sous le nom d'*extension des scalaires* [2, Chapitre II, ğ5, pages 81-88].

**Définition 1.** Soit $\phi$ un changement de variable de $(A, \partial_A)$ dans $(B, \partial_B)$ avec $A$ et $B$ commutatifs. On pose $C = A[x; \partial_A]$ et $D = B[y; \partial_B]$. Le foncteur changement de variable $\phi^*$ défini par $\phi$ est le foncteur qui au $C$-module à gauche $M$ associe le $D$-module à gauche $\phi^*(M) = D_r \otimes_C M$ et à l'application $C$-linéaire $u : M_1 \to M_2$ entre $C$-modules à gauche associe l'application $D$-linéaire $\phi^*(u) = \mathrm{Id}_D \otimes u$.

### 1.3. **Transfert.**

**Définition 2.** Soient $(A, \partial_A)$ et $(B, \partial_B)$ deux anneaux différentiels commutatifs. Soit $\phi$ un changement de variable de $A$ dans $B$, prolongé par l'égalité (2) en un morphisme de $C = A[x; \partial_A]$ dans $D = B[y; \partial_B]$. On appelle $\phi$-transfert toute application $\psi$ $C$-linéaire à gauche et à droite de $D$ dans $C$ telle que $\psi(B) \subseteq A$ et $\psi(1)$ est inversible dans $A$.

On remarque que si $\psi$ est un $\phi$-transfert, la double linéarité de ce transfert implique que *si $c \in C$ et $d \in D$ sont tels que $\phi(c)$ et $d$ commutent dans $D$, alors $c$ et $\psi(d)$ commutent dans $C$.* En particulier, $\psi(1)$ doit commuter à tout élément de $C$ et est donc un élément de $A$ dont la dérivée est nulle.

Supposons que $\phi$ est un changement de variable de $A$ dans $B$, prolongé par l'égalité (2) en un morphisme de $C = A[x; \partial_A]$ dans $D = B[y; \partial_B]$ et que l'application $\psi : D \to C$ est un $\phi$-transfert. Soit $M$ un $C$-module à gauche. Nous définissons alors la *$\psi$-contraction $co_M$* comme l'application $C$-linéaire du $C$-module à gauche sous-jacent à $\phi^*(M) = D_r \otimes_C M$ dans $M$ définie par

$$co_M(d \otimes m) = \psi(d)m \tag{3}$$

pour tout $d \in D$ et pour tout $m \in M$. La collection de ces morphismes $co_M$ est un morphisme du foncteur $\phi_* \circ \phi^*$ dans le foncteur identité de la catégorie des $C$-modules à gauche (ici, la notation $\phi_*$ désigne le foncteur de "restriction des scalaires" [2, Chapitre II, page 30] qui, à tout $D$-module à gauche $N$ associe le $C$-module à gauche ayant même groupe additif sous-jacent que $N$ et où les éléments de $C$ agissent via le morphisme $\phi$). Etant donnés deux $C$-modules à gauche $M_1$ et $M_2$ et $v$ une application $D$-linéaire de $\phi^*(M_1)$ dans $\phi^*(M_2)$, on appelle *morphisme contracté* de $v$ l'application $C$-linéaire $\Psi(v)$ de $M_1$ dans $M_2$ telle que

$$\Psi(v)(m) = co_{M_2}(v(1 \otimes m)) \tag{4}$$

pour tout $m$ de $M_1$.

On vérifie aisément que, pour tout couple $(M_1, M_2)$ de $C$-modules à gauche, on a la formule

$$\Psi(\phi^*(u)) = \psi(1)u \tag{5}$$

pour toute application $C$-linéaire $u$ de $M_1$ dans $M_2$. Ceci établit la propriété suivante.

**Proposition 1.** *Soient $(A, \partial_A)$ et $(B, \partial_B)$ deux anneaux différentiels commutatifs. Soit $\phi$ un changement de variable de $A$ dans $B$, prolongé par l'égalité (2) en un morphisme de $C = A[x; \partial_A]$ dans $D = B[y; \partial_B]$ et tel qu'il existe un $\phi$-transfert $\psi : D \to C$.*
*Alors le foncteur changement de variable $\phi^*$ est fidèle.*

1.4. **Cas particulier d'un endomorphisme de corps.** Dans ce qui suit, on s'intéresse au cas où $A$ et $B$ sont égaux à un corps $K$, muni d'une dérivation $\partial$. Alors $\phi$ est un endomorphisme de $K$ (donc en particulier est injectif). On a $C = D$ et $\phi$ se laisse prolonger par la formule (2) en un endomorphisme de $C$. Si $K$ est une extension finie de $\phi(K)$, il existe une application trace de $K$ dans $\phi(K)$, qu'on convient de noter tr. On définit alors l'application $\psi : K \to K$ par la formule

$$\phi(\psi(a)) = \mathrm{tr}(a) \tag{6}$$

pour tout élément $a$ de $K$. En particulier $\psi(1) = [K : \phi(K)]$.

**Propriété 1.** *L'application $\psi$ vérifie l'identité*

$$\psi(\phi(a)b) = a\psi(b) \tag{7}$$

*pour tous éléments $a$ et $b$ de $K$.*

*Preuve :* Ceci résulte en effet facilement de la $\phi(K)$-linéarité de l'application tr. □

**Propriété 2.** *Si l'extension $K/\phi(K)$ est galoisienne, on a l'identité*

$$\psi(\gamma^{-1}(\partial a)) = \partial(\psi(a)) \tag{8}$$

*pour tout élément $a$ de $K$.*

*Preuve :* Par définition de l'application $\psi$ et grâce à la formule (1), la formule à justifier équivaut à

$$\mathrm{tr}(\gamma^{-1}(\partial a)) = \gamma^{-1}(\partial(\mathrm{tr}(a))) \tag{9}$$

pour tout $a \in K$. Utilisant l'hypothèse que l'extension $K/\phi(K)$ est galoisienne, on voit que la formule (9) est elle-même conséquence de la formule

$$\sigma(\gamma^{-1}(\partial a)) = \gamma^{-1}(\partial(\sigma(a)) \tag{10}$$

pour tout $a \in K$ et tout automorphisme $\sigma$ de $K$ laissant fixes tous les éléments de $\phi(K)$.

La formule (10) exprime que les dérivations $\partial$ et

$$a \mapsto \gamma\sigma(\gamma^{-1})\sigma(\partial(\sigma^{-1}a))$$

coïncident sur $K$, ce qui, puisque l'extension $K/\phi(K)$ est algébrique séparable, est vrai dès qu'elles coïncident sur $\phi(K)$. Or la formule (10) est évidente si $a$ est élément de $\phi(K)$, car alors la formule (1) montre que $\gamma^{-1}(\partial a)$ est aussi élément de $\phi(K)$. □

Il est facile de voir que la famille des puissances $(\gamma^{-1}x)^n$ de $\gamma^{-1}x$ forme une $A$-base de $C$ pour l'une ou l'autre de ses deux structures de $A$-module. On utilise cette remarque pour prolonger $\psi$ en une application de $C$ dans lui-même en posant

$$\psi(\sum_n a_n(\gamma^{-1}x)^n)) = \sum_n \psi(a_n)x^n \tag{11}$$

L'identité (8) peut alors être utilisée pour démontrer que l'application $\psi$ est $\phi(C)$-linéaire aussi bien à gauche qu'à droite. Par conséquent, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.** *Soit $(K, \partial)$ un corps différentiel muni d'un changement de variable $\phi : K \to K$ tel que l'extension $K/\phi(K)$ soit finie et galoisienne. On suppose en outre que la caractéristique de $K$ ne divise pas le degré de $K$ sur $\phi(K)$. Alors il existe un $\phi$-transfert de l'anneau $C := K[x; \partial]$ dans lui-même. En particulier, le foncteur de changement de variable $\phi^*$ est fidèle.*

## 2. Plénitude du foncteur changement de variable

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $A$ et $B$ sont des anneaux ultramétriques pour des valeurs absolues notées $|.|$. On supposera qu'il existe un changement de variable $\phi : A \to B$ satisfaisant l'égalité (1) et faisant de $B$ un $A$-module libre ayant une base finie $(1, t_2, \cdots, t_r)$ telle que

$$(\forall j \in \{2, \cdots, r\}) \quad \gamma^{-1}\partial_B(t_j) = \phi(\lambda_j)t_j \ , \tag{12}$$

où les $\lambda_j (j = 2, \cdots, r)$ sont des éléments de $A$. On fera également l'hypothèse de l'existence d'un $\phi$-transfert $\psi$ de $D = B[y; \partial_B]$ dans $C = A[x; \partial_A]$. Soient par ailleurs $M_1$ et $M_2$ deux $C$-modules à gauche satisfaisant l'hypothèse

(**) $\quad M$ est un $A$-module normé où $x \in C$ agit par un opérateur dont la norme est $< |\lambda_j|$ pour tout $j = 2, \cdots, r$ .

Nous allons montrer que, sous ces hypothèses, l'application $\Psi$ définie par la formule (4) est injective, de sorte qu'on a l'énoncé suivant.

**Proposition 3.** *Soient $A$ et $B$ deux anneaux ultramétriques et $\phi : A \to B$ un changement de variable satisfaisant l'égalité (1) et faisant de $B$ un $A$-module libre ayant une base finie $(1, t_2, \cdots, t_r)$ telle qu'on ait la relation (12). On suppose en outre l'existence d'un $\phi$-transfert $\psi$ de $D = B[y; \partial_B]$ dans $C = A[x; \partial_A]$.*

*Alors le foncteur changement de variable $\phi^*$ est pleinement fidèle de la catégorie des $C$-modules à gauche satisfaisant la condition (**) dans la catégorie des $D$-modules à gauche.*

**Lemme 1.** *Soient deux $C$-modules à gauche $M_1$ et $M_2$ qui sont des $A$-modules normés. Soit le $A$-module $M_3 = \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$, muni de la* *structure de $C$-module à gauche déterminée par la dérivation qui à $u : M_1 \to M_2$ associe $u' : M_1 \to M_2$ défini par*

$$u'(m) = x.(u(m)) - u(x.m) \tag{13}$$

*pour tout $m \in M_1$. Alors on a l'inégalité $\|x\|_{M_3} \leq \max(\|x\|_{M_1}, \|x\|_{M_2})$*

*Preuve :* Posons $S = \max(\|x\|_{M_1}, \|x\|_{M_2})$. Il s'agit simplement de vérifier qu'avec la définition (13), on a $\|u'\| \leq S\|u\|$. Or, pour un quelconque $m \in M_1$, on a $\|u'(m)\| \leq \max(\|x.u(m)\|, \|u(x.m)\| \leq S\|u\|\|m\|$, d'où le résultat. □

**Lemme 2.** *Les sous-groupes $t_j \otimes M_2$ sont des sous-$C$-modules à gauche de $\phi_*(\phi^*(M_2))$ qui sont en somme directe et dont la somme est $\phi_*(\phi^*(M_2))$.*

*Preuve :* Vérification facile. □

**Démonstration de l'injectivité de $\Psi$.** Il suffit de montrer que si $co_{M_2} \circ w = 0$, où $w$ est un morphisme $C$-linéaire de $M_1$ dans $\phi_*(\phi^*(M_2))$, alors $w = 0$ (compte tenu de l'injectivité de l'application $m \mapsto 1 \otimes m$ qu'on établit en remarquant que la $\psi$-contraction donne à $1 \otimes m$ la valeur $\psi(1)m$). Or, d'après le lemme 2, un tel morphisme $w$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$w = \sum_{j=1}^{r} t_j \otimes w_j \ , \tag{14}$$

où les $w_j$ sont des applications $A$-linéaires de $M_1$ dans $M_2$. Un facile calcul déduit de la $C$-linéarité de $w$ et des formules (12) et (13) que $w_j' = -\lambda_j w_j$ pour $j \geq 2$, ce qui en vertu du lemme 1, implique, puisque $|\lambda_j| > \max(\|x\|_{M_1}, \|x\|_{M_2})$, que $w_j = 0$ pour $j = 2, \cdots, r$. On a donc $w = 1 \otimes w_1$ et $co_{M_2} \circ w = 0$ donne $w_1 = 0$. □

## 3. Corps d'éléments algébriques

3.1. **Résultats préliminaires.** On désigne par $\mathbb{E}$ le corps des éléments analytiques dans le disque générique de $\mathbb{C}_p$, muni de la valeur absolue prolongeant la norme de Gauss. Le corps résiduel de $\mathbb{E}$ est noté $\widetilde{\mathbb{E}}$. Un *corps d'éléments algébriques* est une extension finie de $\mathbb{E}$, muni de l'unique valeur absolue prolongeant celle de $\mathbb{E}$.

**Théorème 1.** *Soit $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{E}$, de corps résiduel $\widetilde{\mathbb{K}}$. Alors on a $\left[\widetilde{\mathbb{K}} : \widetilde{\mathbb{E}}\right] = [\mathbb{K} : \mathbb{E}]$.*

*Preuve :* Ceci vient [1, Proposition 3.6.2.11] de ce que le corps $\mathbb{E}$ est stable [1, Theorem 5.3.2.1]. □

On en déduit le résultat suivant:

**Théorème 2.** *Soit $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{E}$ de degré $d$. Si l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}} \mid \widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable, il existe dans $\mathbb{K}$ un élément $v$ tel que :*

*i)* $\mathbb{K} = \mathbb{E}(v)$.

*ii) Pour toute suite* $(a_0, a_1, \ldots, a_{d-1})$ *de $d$ éléments de $\mathbb{E}$, on a*

$$\left|\sum_{j=0}^{d-1} a_j v^j\right| = \max_{0\leq j\leq d-1} |a_j| \ . \tag{15}$$

*Preuve :* Soit en effet $\widetilde{v}$ un élément primitif de l'extension résiduelle qui existe puisque l'extension résiduelle est supposée séparable. Il existe un élément $v$ de $\mathbb{K}$ qui relève cet élément de $\widetilde{\mathbb{K}}$. Par le théorème 1, on voit que

$$[\mathbb{K} : \mathbb{E}] \geq [\mathbb{E}(v) : \mathbb{E}] = \left[\widetilde{\mathbb{E}(v)} : \widetilde{\mathbb{E}}\right] \geq \left[\widetilde{\mathbb{K}} : \widetilde{\mathbb{E}}\right] = [\mathbb{K} : \mathbb{E}] \ ,$$

d'où $\mathbb{K} = \mathbb{E}(v)$. Pour vérifier le point ii), il suffit de considérer le cas où $\max_{0\leq j\leq d-1} |a_j| = 1$. Or dans ce cas, nous avons par passage au corps résiduel $\sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{a_j}\widetilde{v}^j \neq 0$ (en effet le degré de $\widetilde{v}$ sur $\widetilde{\mathbb{E}}$ est $d$ en vertu du théorème 1). Ceci signifie justement que $\left|\sum_{j=0}^{d-1} a_j v^j\right| = 1$. □

### 3.2. **Frobenius et dérivation.**

**Définition 3.** Un endomorphisme de Frobenius du corps $\mathbb{K}$ est un endomorphisme $\varphi$ du corps $\mathbb{K}$ tel que pour tout élément $u$ de $\mathbb{K}$, on ait

$$|u| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |u^p - \varphi(u)| < 1. \tag{16}$$

Nous savons [4] qu'il existe des endomorphismes de Frobenius de $\mathbb{E}$. D'autre part, la dérivation $\frac{d}{dt}$ de $\mathbb{C}_p[t]$ s'étend en une unique dérivation continue de $\mathbb{E}$, qui admet elle-même un unique prolongement, encore noté $\frac{d}{dt}$, en une dérivation de l'extension finie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{E}$. Nous nous intéresserons aux deux questions suivantes :

*Question 1 :* L'inégalité

$$\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n u}{dt^n}\right| \leq |u| \tag{17}$$

est-elle vraie pour tout $u$ de $\mathbb{K}$ et tout $n$ de $\mathbb{N}$ ?

*Question 2 :* Etant donné un endomorphisme de Frobenius $\varphi$ de $\mathbb{E}$, peut-on l'étendre en un endomorphisme de Frobenius du corps $\mathbb{K}$ ?

Nous allons voir que la réponse à ces deux questions est positive dès que l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}} \mid \widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable.

**3.3. Norme des puissances de la dérivation.** La réponse positive à notre Question 1 se trouve essentiellement dans l'article [5] de Dwork et Robba. Cependant, le lien entre leurs énoncés et notre problème n'étant pas entièrement immédiat, il nous a semblé intéressant d'écrire une démonstration qui puisse se lire indépendamment de leur article. L'idée centrale de cette preuve, en fait déjà présente dans [5], est la considération d'un certain anneau de séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Nous introduisons donc l'anneau $W$ des séries entières formelles bornées dans le disque générique : ses éléments sont les séries formelles $\sum_{n\geq 0} a_nX^n$, à coefficients éléments de $\mathbb{K}$, telles que $|a_n| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$. On remarque alors que $W$ est un anneau local d'idéal maximal

$$I = \{\sum_{n\geq 0} a_nX^n \mid a_n \in \mathbb{K} \text{ et } |a_n| \leq 1 \text{ et } |a_0| < 1\} .$$

Le corps résiduel $W/I$ de $W$ est isomorphe au corps résiduel $\widetilde{\mathbb{K}}$, comme on le voit en considérant le morphisme d'anneaux de $W$ dans $\widetilde{\mathbb{K}}$ qui à la série $\sum_{n\geq 0} a_nX^n$ associe la classe résiduelle de $a_0$ dans $\widetilde{\mathbb{K}}$.

**Lemme 3.** *Pour tout polynôme $P \in W[Y]$ et tout élément $\alpha$ de $W$ tel que $P(\alpha) \in I$ et $P'(\alpha) \notin I$, il existe un unique élément $\beta$ de $W$ tel que $P(\beta) = 0$ et $\beta - \alpha \in I$.*

*Preuve :* On commence par observer que, pour tout polynôme $Q \in W[Y]$, et pour tous $\gamma, \delta$ de $W$, l'élément $(\gamma-\delta)^2$ de $W$ divise $Q(\gamma)-Q(\delta)-(\gamma-\delta)Q'(\delta)$ dans $W$ (en fait, ceci est vrai dans n'importe quel anneau commutatif). On en déduit que si $\gamma \in W$ est tel que $\alpha - \gamma$ est élément de $I$, alors $P(\gamma)$ est élément de $I$ et $P'(\gamma)$ n'est pas élément de $I$.

Si donc il existait deux éléments distincts $\beta_1$ et $\beta_2$ de $\alpha + I$ tels que $P(\beta_1) = P(\beta_2) = 0$, alors $(\beta_2 - \beta_1)^2$ devrait diviser $(\beta_2 - \beta_1)P'(\beta_1)$ dans l'anneau intègre $W$, et donc $\beta_2 - \beta_1$ devrait diviser $P'(\beta_1)$, ce qui est impossible puisque $\beta_1 - \beta_2 \in I$, alors qu'on vient de montrer que $P'(\beta_1) \notin I$. Ceci montre l'unicité de l'éventuelle racine de $P$ dans la classe modulo $I$ de $\alpha$.

Pour montrer l'existence de cette racine, nous sommes contraints de passer par l'intermédiaire du suranneau $W_r$ de $W$ défini pour un réel $r \in ]0,1[$ comme l'anneau des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_nX^n$, avec $a_n \in \mathbb{K}$ et $|a_n|r^n \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. Nous munissons en outre cet anneau $W_r$ d'une valeur absolue $|\ \ |_r$ en posant, pour $f = \sum_{n\geq 0} a_nX^n$,

$$|f|_r = \mathrm{Sup}_{n\geq 0}\, |a_n|r^n .$$

On sait [4, chapitre 2] que $W_r$ est un anneau complet pour cette valeur absolue. Par la méthode de Newton, on construit une suite $(\alpha_n)_n$ d'approximations dans $W_r$ de la racine cherchée en posant $\alpha_0 = \alpha$ et, pour $n \geq 0$,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{P(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)} \ .$$

Une récurrence facile montre que la suite $(\alpha_n)_n$ est bien définie, car $\alpha_n$ est élément de la classe $\alpha + I \subseteq W$, que $P(\alpha_n) \in I$ et que $P'(\alpha_n)$ est un élément inversible de $W$. On remarque de plus que $|P(\alpha_0)|_r < 1$ et $|P'(\alpha_n)|_r = 1$. D'après notre observation préliminaire, $\left(\frac{P(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)}\right)^2 = (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2$ est un diviseur dans $W_r$ de $P(\alpha_{n+1})$. On a donc $|P(\alpha_{n+1})|_r \leq |P(\alpha_n)|_r^2$, ce qui implique que $|P(\alpha_n)|_r = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|_r$ tend vers 0, donc que la suite $(\alpha_n)_n$ converge dans $W_r$ vers un élément $\beta_r$ de $W_r$ racine de $P$. Soient maintenant $r$ et $r'$ deux réels avec $0 < r < r' < 1$. On a clairement $W_{r'} \subseteq W_r$ et pour $f \in W_{r'}$, l'inégalité $|f|_r \leq |f|_{r'}$. Il en résulte que $\beta_{r'}$ est élément de l'anneau $W_r$ et que la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers $\beta_{r'}$ dans $W_r$, donc $\beta_{r'} = \beta_r$. Ceci établit que la série formelle $\beta = \beta_r$ est indépendante de $r \in ]0,1[$. Le fait que $\beta$ appartienne à $W_r$ pour tout $r \in ]0,1[$ signifie que la valeur absolue du coefficient de $X^n$ dans la série formelle $\beta$ est majorée par $r^{-n}$ pour tout $r \in ]0,1[$. Donc ce même coefficient a une valeur absolue au plus égale à 1. C'est dire que la série formelle $\beta$ est élément de l'anneau $W$. On a vu que c'est une racine de $P$ ; reste à vérifier que $\beta - \alpha$ est élément de $I$. Or le coefficient constant de la série $\beta - \alpha$ a une valeur absolue majorée par $|\beta - \alpha|_r$ pour tout $r \in ]0,1[$, alors qu'on sait que

$$|\beta - \alpha|_r = \lim_n |\alpha_n - \alpha_0|_r \leq |\alpha_1 - \alpha_0|_r < 1 \ ,$$

ce qui montre que $\beta - \alpha \in I$. □

Grâce à ce lemme, nous pouvons maintenant répondre positivement à notre Question 1 dans le cas d'une extension résiduellement séparable.

**Théorème 3.** *Soit $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{E}$, de corps résiduel $\widetilde{\mathbb{K}}$ telle que l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}} \mid \widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable. Alors l'inégalité (17) est vraie pour tout $u$ de $\mathbb{K}$ et tout $n$ de $\mathbb{N}$.*

*Preuve :* Nous définissons une application $\tau$ de $\mathbb{K}$ dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ en posant

$$\tau(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{d^n u}{dt^n} \frac{X^n}{n!} \ .$$

On vérifie aisément que $\tau$ est un morphisme d'anneaux. D'autre part, nous prolongeons $\tau$ en un morphisme de $\mathbb{K}[Y]$ dans $\mathbb{K}[[X]][Y]$ en associant à tout polynôme

$$Q = \sum_i u_i Y^i \in \mathbb{K}[Y]$$

le polynôme

$$\tau(Q) = \sum_i \tau(u_i) Y^i \ .$$

Puisque tout élément de $\mathbb{K}$ est le produit d'une constante élément de $\mathbb{C}_p$ par un élément de $\mathbb{K}^\circ$, notre théorème sera démontré si on établit que l'image par $\tau$ de l'anneau $\mathbb{K}^\circ$ des entiers du corps valué $\mathbb{K}$ est contenue dans l'anneau $W$. Nous utiliserons le fait bien connu que $\tau(\mathbb{E}^\circ)$ est contenu dans l'anneau $W$ (où $\mathbb{E}^\circ$ est l'anneau des entiers du corps $\mathbb{E}$).

Soit $v$ un élément de $\mathbb{K}$ satisfaisant aux conditions i) et ii) du théorème 2. Comme la relation (15) montre que $\mathbb{K}^\circ = \mathbb{E}^\circ[v]$, on voit que tout se ramène à montrer que $\tau(v) \in W$.

Puisque $|v| \leq 1$, l'élément $v$ est entier sur l'anneau $\mathbb{E}^\circ$. Soit $P \in \mathbb{E}^\circ[Y]$ son polynôme minimal de degré $d \geq 1$. Puisque -par le théorème 2- la classe $\widetilde{v}$ de $v$ dans le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{K}}$ engendre l'extension résiduelle, le théorème 1 permet d'affirmer que $\widetilde{v}$ est de degré $d$ sur le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{E}}$ de $\mathbb{E}$. Par conséquent le polynôme $\widetilde{P}$ obtenu en réduisant chaque coefficient de $P$ est le polynôme minimal de $\widetilde{v}$ sur le corps $\widetilde{\mathbb{E}}$. Puisque l'extension résiduelle est supposée séparable, on voit que $\widetilde{P}$ est premier à sa dérivée, donc que $\widetilde{P'}(\widetilde{v}) \neq 0$, c'est-à-dire que

$$\left|P'(v)\right| = 1 \ .$$

Puisque $\tau(\mathbb{E}^\circ) \subseteq W$, le polynôme $\tau(P)$ est élément de $W[Y]$. Soit $\alpha$ la série de $\mathbb{K}[[X]]$ réduite à un terme constant, que nous prenons égal à $v$ : cette série $\alpha$ est élément de $W$. Le terme constant de la série $\tau(P)(\alpha)$ est $P(v) = 0$, donc $\tau(P)(\alpha)$ est élément de l'idéal $I$ de $W$. Celui de la série $\tau(P)'(\alpha)$ est $P'(v)$, donc la série $\tau(P)'(\alpha) \in W \setminus I$. Le lemme 3 montre alors qu'il existe une unique série $\beta \in W$ telle que $\tau(P)(\beta) = 0$ et $\beta - \alpha \in I$ (cette dernière condition signifiant simplement que $|\beta(0) - v| < 1$, où on a écrit $\beta(0)$ pour le terme constant de la série $\beta$). On peut en fait préciser cette condition en remarquant que le terme constant de la série $\tau(P)(\beta)$ est $P(\beta(0))$, ce qui nécessite que $\beta(0)$ est l'une des racines de $P$ dans $\mathbb{K}$ ; or, puisque le polynôme $\widetilde{P}$ est séparable, les racines de $P$ sont dans des classes résiduelles distinctes, c'est-à-dire que $\beta(0) = v$. Le théorème des fonctions implicites formel [3, chapitre IV, page 35] montre alors que $\beta$ est l'unique élément de $\mathbb{K}[[X]]$ de terme constant $\beta(0) = v$, telle que $\tau(P)(\beta) = 0$. Puisque $\tau$ est un morphisme d'anneaux, on a nécessairement $\beta = \tau(v)$. Ceci montre que $\tau(v) \in W$, comme on désirait le montrer. $\square$

*Remarque* : Une approche plus élémentaire de la majoration (17) peut être tentée de la façon suivante. Dans le cas particulier $n = 1$, il s'agit de montrer que $\left|\frac{dv}{dt}\right| \leq 1$. On écrit $P = \sum_{j=0}^{d} c_j t^j$ ; on a $c_d = 1$, tous les coefficients $c_j$ satisfont à $|c_j| \leq 1$ et de plus on a $P(v) = \sum_{j=0}^{d} c_j v^j = 0$. Par dérivation, on en déduit :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\sum_{j=0}^{d-1} \frac{dc_j}{dt} v^j}{\sum_{j=1}^{d} j c_j v^{j-1}} . \tag{18}$$

On a vu que

$$\left| \sum_{j=1}^{d} j c_j v^{j-1} \right| = 1 . \tag{19}$$

Nous en déduisons à l'aide de la relation (18) que $\left|\frac{dv}{dt}\right| \leq 1$, ce qui démontre l'inégalité (17) dans le cas $n = 1$.

Dans le cas $n = p$, on veut montrer que

$$\left| \frac{d^p v}{dt^p} \right| \leq |p| . \tag{20}$$

Il s'agit donc de montrer que $\dfrac{d^p v}{dt^p}$ est élément de $p\mathbb{K}^\circ$. Comme $\dfrac{d^p}{dt^p}$ est une dérivation de $\mathbb{K}^\circ / p\mathbb{K}^\circ$, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{d} j c_j v^{j-1}\right) \frac{d^p v}{dt^p} + \sum_{j=0}^{d-1} \frac{d^p c_j}{dt^p} v^j \equiv 0 \pmod{p\mathbb{K}^\circ} ,$$

ce qui, puisque les $c_j$ sont éléments de $\mathbb{E}^\circ$, se réduit à

$$\left(\sum_{j=1}^{d} j c_j v^{j-1}\right) \frac{d^p v}{dt^p} \equiv 0 \pmod{p\mathbb{K}^\circ} ,$$

ce qui implique le résultat cherché compte tenu de l'égalité (19). Ces deux cas suffisent à montrer la majoration (17) pour tous les $n < p^2$, mais pas dans le cas général.

### 3.4. **Frobenius.**

**Proposition 4.** *Soit $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{E}$, de corps résiduel $\widetilde{\mathbb{K}}$ telle que l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}} \mid \widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable et $\varphi$ un endomorphisme de Frobenius de $\mathbb{E}$. Alors il existe un endomorphisme de Frobenius de $\mathbb{K}$ prolongeant $\varphi$.*

*Preuve :* On utilise le théorème 2 : soit donc $v$ un élément de $\mathbb{K}$ satisfaisant aux conditions i) et ii) du théorème 2. Soit $P = \sum_{j=0}^{d-1} c_j t^j$ le polynôme minimal de $v$ sur le corps $\mathbb{E}$ : puisque $|v| = 1$, ce polynôme est à coefficients entiers et on peut considérer sa réduction $\widetilde{P}$. Il est facile par la relation (15) de voir que l'extension résiduelle est engendrée par $\widetilde{v}$ qui est alors de même degré que $v$ par le théorème 1, donc que $\widetilde{P}$ est le polynôme minimal de $\widetilde{v}$ sur le corps $\widetilde{\mathbb{E}}$. Puisque l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}} \mid \widetilde{\mathbb{E}}$ est supposée séparable, on voit que $\widetilde{P}$ est premier à sa dérivée et n'a donc que des racines simples. Donc le polynôme $\widetilde{P}^{\text{Frob}} = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{c_j}^p t^j$ n'a également que des racines simples qui sont exactement les puissances $p$-ièmes des racines de $\widetilde{P}$. Par conséquent, le lemme de Hensel permet d'affirmer que le polynôme $P^\varphi = \sum_{j=0}^{d-1} \varphi(c_j) t^j$ a dans le corps $\mathbb{K}$ une racine $w$ telle que $|w - v^p| < 1$. Posons alors $\varphi(v) = w$. Ceci permet de définir un endomorphisme du corps $\mathbb{K}$ encore noté $\varphi$. Il ne reste plus qu'à s'assurer que cet endomorphisme satisfait la relation (16) pour tout $u$ de $\mathbb{K}$ tel que $|u| \leq 1$. On écrit un tel $u$ sous la forme

$$u = \sum_{j=0}^{d-1} a_j v^j \quad \text{où} \quad a_j \in \mathbb{E}^\circ = \{a \in \mathbb{E} : |a| \leq 1\} \ . \tag{21}$$

Appliquant l'endomorphisme $\varphi$ qu'on vient de définir, on trouve :

$$\varphi(u) = \sum_{j=0}^{d-1} \varphi(a_j) w^j \ . \tag{22}$$

Puisque les $a_j$ sont des entiers de $\mathbb{E}$, on a $|\varphi(a_j) - a_j^p| < 1$. On sait que $|w - v^p| < 1$. On en déduit que la classe résiduelle de $\varphi(u)$ est la même que celle de $u^p$, ce qui achève la démonstration. □

On se propose maintenant d'appliquer la Proposition 3 à cet endomorphisme de Frobenius. Pour ce faire, on dispose de l'énoncé suivant, qui montre en particulier que tout endomorphisme de Frobenius d'un corps d'éléments algébriques est un changement de variable.

**Proposition 5.** *Soit $\mathbb{K}$ une extension algébrique de $\mathbb{E}$ et $\phi$ un endomorphisme isométrique de $\mathbb{K}$ tel que $\phi(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p$. En posant $\gamma = \frac{d}{dt}(\phi(t))$, on a une formule*

$$\frac{d}{dt}\phi(a) = \gamma \phi(\frac{da}{dt}) \tag{23}$$

*valide pour tout $a \in \mathbb{K}$, de sorte que $\phi$ est un changement de variable au sens de 1.1.*

*Preuve :* Remarquons que les deux membres de l'égalité (23) sont des fonctions continues de $a$ qui coïncident sur $\mathbb{C}_p \subseteq \mathbb{K}$ ainsi qu'en $t$. En utilisant leurs propriétés algébriques ($\phi$ est un morphisme et $\frac{d}{dt}$ est une dérivation), on voit qu'elles doivent coïncider sur le corps $\mathbb{C}_p(t)$, donc par raison de continuité sur la fermeture $\mathbb{E}$ de ce dernier corps. Considérons alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $V$ dont le groupe additif sous-jacent est $\mathbb{K}$ et la loi externe $(\lambda, k) \longmapsto \phi(\lambda)k$. Les deux membres de l'égalité (23) peuvent s'interpréter comme des dérivations de $\mathbb{K}$ à valeurs dans $V$. On vient de voir que la différence de ces deux dérivations est $\mathbb{E}$-linéaire. Comme l'extension $\mathbb{K} \mid \mathbb{E}$ est séparable, on sait que le module $\Omega_{\mathbb{K}/\mathbb{E}}$ des différentielles de Kähler de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{E}$ est nul. Par la propriété universelle de ce module des différentielles, ceci signifie exactement que toute dérivation $\mathbb{E}$-linéaire de $\mathbb{K}$ à valeurs dans un quelconque $\mathbb{K}$-espace vectoriel est nulle. En particulier, ceci établit l'égalité (23) pour tout $a \in \mathbb{K}$. □

**Théorème 4.** *Soient $\mathbb{K}$ un corps d'éléments algébriques tel que l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}} \mid \widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable et $\varphi$ un endomorphisme de Frobenius de $\mathbb{K}$ tel que $\varphi(t) = t^p$. On désigne par $C$ l'anneau $\mathbb{K}[x; \frac{d}{dt}]$. Alors le foncteur changement de variable $\phi^*$ est pleinement fidèle de la catégorie des $C$-modules à gauche qui sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés où $x \in C$ agit par un opérateur de norme $< |p|^{-1}$ dans la catégorie des $C$-modules à gauche.*

*Preuve :* On a simplement, compte tenu de la Proposition 2, à exhiber une base $(1, t_2, \cdots, t_r)$ de $\mathbb{K}$ sur $\varphi(\mathbb{K})$ telle qu'on ait la relation

$$(\forall j \in \{2, \cdots, r\}) \quad \gamma^{-1} \frac{d}{dt}(t_j) = \varphi(\lambda_j) t_j \ ,$$

où on a posé $\gamma = \frac{d}{dt}(\varphi(t)) = pt^{p-1}$, les $\lambda_j$ étant des scalaires dont la valeur absolue est au moins égale à $|p|^{-1}$. Pour cela, on pose $t_j = t^{j-1}$, de sorte que $\lambda_j = \frac{j-1}{pt}$. Le fait que $(1, t, \ldots, t^{p-1})$ est une base de $\mathbb{K}$ sur $\varphi(\mathbb{K})$ vient de ce qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{E}$ sur $\varphi(\mathbb{E})$ alors que les extensions $\mathbb{E} \mid \varphi(\mathbb{E})$ et $\varphi(\mathbb{K}) \mid \varphi(\mathbb{E})$ sont linéairement disjointes puisque l'extension résiduelle de la première est purement inséparable, alors que par hypothèse l'extension résiduelle de la deuxième est séparable. □

## 4. Invariance

Nous allons voir que le résultat d'invariance du foncteur changement de variable par perturbation de l'endomorphisme, bien connu dans le cas du Frobenius, s'étend au cas d'endomorphismes plus généraux d'une extension algébrique du corps des éléments analytiques dans le disque générique, au moins si l'extension residuelle est séparable.

**Proposition 6.** *Soit $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{E}$ telle que l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}}/\widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable. Soient $\phi_i (i = 1, 2)$ deux endomorphismes isométriques de $\mathbb{K}$ déterminant le même endomorphisme du corps résiduel et tels que les restrictions de $\phi_1$ et $\phi_2$ au corps $\mathbb{C}_p \subseteq \mathbb{K}$ sont un même endomorphisme de $\mathbb{C}_p$. Alors l'égalité*

$$\phi_2(a) = \sum_{n \geq 0} \phi_1 \left( \frac{d^n a}{dt^n} \right) \frac{(\phi_2(t) - \phi_1(t))^n}{n!} \tag{24}$$

*est vraie pour tout $a \in \mathbb{K}$.*

*Preuve :* La série figurant au second membre de la formule (24) converge dans $\mathbb{K}$ car

$$\left|\frac{\phi_1(\frac{d^n a}{dt^n})}{n!}\right| = \left|\frac{\frac{d^n a}{dt^n}}{n!}\right| \le |a| ,$$

puisque $\phi_1$ est une isométrie de $\mathbb{K}$ et que l'inégalité(17) est vérifiée. Posons dès lors

$$\phi(a) = \sum_{n\ge 0} \phi_1\left(\frac{d^n a}{dt^n}\right) \frac{(\phi_2(t) - \phi_1(t))^n}{n!} , \tag{25}$$

définissant ainsi une application $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On vérifie alors facilement les points suivants.

- $\phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}$.
- $\phi$ est continu ; en effet $|\phi(a)| \le |a|$.
- Pour $a \in \mathbb{C}_p$, on a $\phi(a) = \phi_2(a)$.
- On a $\phi(t) = \phi_2(t)$.

Il en résulte que l'ensemble des points où $\phi$ et $\phi_2$ coïncident est un sous-corps fermé de $\mathbb{K}$ qui contient $\mathbb{C}_p$ et $t$, donc contient le corps $\mathbb{E}$. Soit maintenant $v \in \mathbb{K}$ un élément satisfaisant aux conditions i) et ii) du théorème 2. Soit $P = \sum_{j=0}^{d} c_j t^j$ le polynôme de l'anneau $\mathbb{E}[t]$ tel que tous les coefficients $c_j$ satisfont à $|c_j| \le 1$ et $P(v) = 0$. Alors $\phi(v)$ et $\phi_2(v)$ sont deux racines de $P$ qui ont même classe résiduelle dans $\widetilde{\mathbb{K}}$. Comme l'extension résiduelle est supposée séparable, le polynôme $\widetilde{P} = \sum_{j=0}^{d} \widetilde{c_j} t^j \in \widetilde{\mathbb{E}}[t]$ n'a que des racines simples; par conséquent l'application $t \mapsto \widetilde{t}$ réalise une bijection entre les racines de $P$ et celles de $\widetilde{P}$. On en déduit $\phi(v) = \phi_2(v)$ et par conséquent $\phi = \phi_2$. □

Pour abréger, pour $r$ un nombre réel tel que $0 < r < 1$, nous appellerons **$r$-perturbé** d'un endomorphisme isométrique $\phi$ de $\mathbb{K}$ tel que $\phi(\mathbb{C}_p) \subseteq \mathbb{C}_p$, tout endomorphisme $\phi_1$ de $\mathbb{K}$ ayant même restriction au sous-corps $\mathbb{C}_p$ que $\phi$ et tel que l'implication

$$|a| \le 1 \Longrightarrow |\phi_1(a) - \phi(a)| < r \tag{26}$$

soit vraie. On voit d'ailleurs en utilisant la formule (24) que cette implication sera satisfaite dès que $|\phi_1(t) - \phi(t)| < r$.

**Théorème 5.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps d'éléments algébriques tel que l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbb{K}}/\widetilde{\mathbb{E}}$ est séparable. Soit $\phi$ un endomorphisme isométrique de $\mathbb{K}$ tel que $\phi(\mathbb{C}_p) \subseteq \mathbb{C}_p$ et, pour un $r < 1$, $\phi_1$ un $r$-perturbé de $\phi$. On considère un espace vectoriel normé $M$ de dimension finie sur $\mathbb{K}$, muni d'une action de $C = \mathbb{K}[x; \frac{d}{dt}]$ prolongeant la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $M$, telle que, pour tout $R < r$, il existe une constante $c(R)$ telle que*

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \|x^s\|_M \le |s!| R^{-s} c(R) . \tag{27}$$

*Alors les $C$-modules à gauche $\phi^*(M)$ et $\phi_1^*(M)$ sont isomorphes.*

*Preuve :* On rapporte l'espace vectoriel $M$ à une base $(e_1, \cdots, e_n)$. Puisque le corps $\mathbb{K}$ est complet, toutes les normes sur $M$ sont équivalentes [4, Théorème 1.4.2], de sorte qu'il existe deux constantes $A$ et $B$ réelles positives telles que

$$A \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right| \leq B \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j| \ .$$

On écrit $x^s.e_i = \sum_{j=1}^n g_{i,j,s} e_j$ pour des éléments $g_{i,j,s}$ de $\mathbb{K}$. Ceci permet de définir une matrice carrée $G_s$ d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ : la matrice d'élément général $g_{i,j,s}$. D'après l'inégalité (27), on a pour tout $R < r$

$$\max_{1\leq j\leq n} |g_{i,j,s}| \leq A^{-1} |s!| R^{-s} c(R) \|e_i\| \ .$$

Il en résulte l'existence, pour tout $R < r$, d'une constante $c_1(R)$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \|G_s\| \leq |s!| R^{-s} c_1(R) \ , \tag{28}$$

où on a défini la norme d'une matrice comme la plus grande valeur absolue d'un de ses coefficients. On considère alors la matrice

$$H = \sum_{s\geq 0} \frac{\phi(G_s)}{s!} (\phi_1(t) - \phi(t))^s \tag{29}$$

qui converge d'après la condition (28). Par continuité de la dérivation $\frac{d}{dt}$ sur le corps $\mathbb{K}$ et utilisation de la formule (23), on tire de cette expression

(30)
$$\frac{dH}{dt} = \gamma \sum_{s\geq 0} \frac{\phi(\frac{dG_s}{dt})}{s!} (\phi(t) - \phi_1(t))^s + (\gamma_1 - \gamma) \sum_{s\geq 0} \frac{\phi(G_{s+1})}{s!} (\phi_1(t) - \phi(t))^s \ ,$$

où on a posé $\gamma = \frac{d}{dt}(\phi(t))$ et $\gamma_1 = \frac{d}{dt}(\phi_1(t))$. La définition de $G_s$ permet de montrer qu'on a l'identité matricielle $G_{s+1} = G_s G_1 + \frac{dG_s}{dt}$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{dH}{dt} = -\gamma H \phi(G_1) + \gamma_1 \sum_{s\geq 0} \frac{\phi(G_{s+1})}{s!} (\phi_1(t) - \phi(t))^s \ . \tag{31}$$

On utilise alors la formule $G_{s+1} = \sum_{k=0}^s \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k G_1}{dt^k} G_{s-k}$, qu'il est facile de vérifier par récurrence, pour transformer une fois encore la dérivée de $H$:

$$\frac{dH}{dt} = -\gamma H \phi(G_1) + \gamma_1 H \sum_{k\geq 0} \frac{\phi(\frac{d^k G_1}{dt^k})}{k!} (\phi_1(t) - \phi(t))^k \ , \tag{32}$$

d'où en vertu du développement (24) :

$$\frac{dH}{dt} = -\gamma H \phi(G_1) + \gamma_1 H \phi_1(G_1) \ ,$$

qui exprime que $H$ est la matrice d'un morphisme $C$-linéaire de $\phi^*(M)$ dans $\phi_1^*(M)$ quand on les rapporte aux bases $(1 \otimes e_i)_{1 \leq i \leq n}$. D'autre part, $H$ est à coefficients entiers (car les $G_s$ le sont) et sa réduction dans l'anneau des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\widetilde{\mathbb{K}}$ est la matrice identité, donc $H$ est inversible, ce qui prouve le résultat désiré. $\square$

## Bibliographie


[1] S. Bosch, U.Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis. A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.

[2] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Algèbre, Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, 1970.

[3] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Algèbre, Chapitres 4 à 7.* Masson, Paris New-York Barcelone Milan Mexico Rio de Janeiro, 1981.

[4] G. Christol, *Modules différentiels et équations différentielles p-adiques.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, **66**, Queen's University, Kingston, Ontario, 1983.

[5] B. Dvork, Ph. Robba, *On natural radii of p-adic convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. **256** (1979), 199–213.



Alain Salinier
LACO (UPRES A 6090 CNRS)
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
123, avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES Cedex, FRANCE
*E-mail* : `alain.salinier@unilim.fr`