Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **11** (1999), 369–385

Etude de $L(s,\chi)/\pi^s$ pour des fonctions L relatives à $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ et associées à des caractères de degré 1

par Gilles DAMAMME

Résumé. Carlitz a défini pour les corps de fonctions l'analogue du réel π et Goss l'analogue des fonctions L de Dirichlet. Nous prouvons dans un cas particulier qu'il existe des valeurs entières s et des caractères χ pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ peut être rationnel, algébrique ou bien transcendant.

Abstract. For functions fields, Carlitz defined an analogue of the real π and Goss defined the analogue of Dirichlet L-functions. We prove in a particular case that there exist integer values s and characters χ such that $L(s,\chi)/\pi^s$ is rational, algebraic or transcendent.

1. Introduction

Soit $q = p^n$ (p premier) et $\mathbb{F}_q$ un corps fini.
On pose :

$$\begin{aligned} Z = A &= \mathbb{F}_q[T] \\ Q = k &= \mathbb{F}_q(T) \\ R = k_\infty &= \mathbb{F}_q((T^{-1})) \end{aligned}$$

(k_∞ est le complété de k pour la valeur absolue à l'infini).
Soit C le complété d'une clôture algébrique de k_∞.
Soit $X \in R$ ($X \neq 0$) :

$$X = a_n T^n + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{T} + \cdots (a_n \neq 0)$$

On pose :

$$\deg X = n, \ \operatorname{sgn} X = a_n, \ |X| = q^n$$

X sera dit *unitaire* si $\operatorname{sgn} X = 1$.

Manuscrit reçu le 2 février 1995.

On pose aussi, pour $k \geq 1$:

$$[k] = T^{q^k} - T$$
$$L_k = [k] \dots [1] \ , \qquad L_0 = 1$$

On vérifie que $[k]$ est le produit des polynômes unitaires irréductibles dont le degré divise k et que L_k est le ppcm des polynômes unitaires de degré k. La fonction zêta de Carlitz est définie de la façon suivante : pour $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(s) = \sum_{N \in Z}{}' \frac{1}{N^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{deg N = k}{}' \frac{1}{N^s} \Big)$$

Σ' signifie que la somme est restreinte aux polynômes unitaires.

Définissons enfin π par :

$$\pi = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{[j]}{[j+1]} \Big)$$

On sait que π est transcendant sur $Q([W])$ et aussi que pour les valeurs s divisibles par $(q-1)$, $\zeta(s)/\pi^s$ est rationnel et que par conséquent $\zeta(s)$ est transcendant dans ce cas. De plus, on a montré que pour les valeurs s non divisibles par $(q-1)$, $\zeta(s)$ et $\zeta(s)/\pi^s$ sont transcendants ([Y], [D.H]).

Dans le cas réel, Euler a prouvé que $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel, mais on ignore en général la nature de $\zeta(2n+1)$ et de $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$. De même pour les fonctions L de Dirichlet, on sait démontrer dans certains cas liés à la parité de s que $L(s,\chi)/\pi^s$ est rationnel ou algébrique, mais quand il n'existe pas de formule reliant $L(x,\chi)$ et π^s, on ignore la nature de $L(s,\chi)/\pi^s$. Aussi, on peut naturellement se poser la question suivante : pour les fonctions L prolongeant la fonction zêta de Carlitz, a-t-on certains cas pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ est rationnel ? algébrique ? transcendant ?

En 1983, D. Goss a défini des fonctions L sur des corps de fonctions correspondant au prolongement ci-dessus dans le cas particulier où $A = \mathbb{F}_q[T]$ ([G]). Je redonne cette définition ci-dessous (dans ce cas particulier) et prouve dans les paragraphes suivants qu'il existe des valeurs de s et des caractères χ pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ est rationnel ou algébrique, mais aussi d'autres cas où $L(s,\chi)/\pi^s$ est transcendant.

2. Caractères et fonctions L relatifs au module de Carlitz

Soit G un groupe abélien fini. On appelle caractère χ à valeurs dans C tout homomorphisme de G vers $(C^*,.)$:

$$\chi : G \longrightarrow (C^*,.)$$

Exemple.

$$\begin{aligned}\chi : G &\longrightarrow \mathbb{F}_q^* \subset C^* \\ g &\longmapsto 1\end{aligned}$$

est le caractère principal de G.

Définition. Soit $M \in Z$, unitaire, sans facteur carré, et de degré m. Un caractère

$$\chi : \big((Z/(M))^*, .\big) \longrightarrow \big(C^*, .\big)$$

est appelé *caractère modulo M*. Un tel caractère sera dit *de degré m*.

On prolonge χ à tout élément N de Z en posant :

$$\chi(N) = \begin{cases}\chi(\overline{N}) & \text{si } (N,M) = 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

($\overline{N}$ désignant la classe de N modulo M).

Propriétés. Soit χ un caractère modulo M. On a :

$$\sum_{\overline{N} \in (Z/(M))^*} \chi(\overline{N}) \equiv \begin{cases}\mathrm{Card}((Z/(M))^*) \pmod p & \text{si } \chi = 1 \\ 0 \pmod p & \text{si } \chi \neq 1.\end{cases}$$

Définition. Soit χ un caractère modulo M. On pose :

$$L(s,\chi) = \sum_{N \in Z}{}' \frac{\chi(N)}{N^s} \qquad (s \in \mathbb{N}^*)$$

($\sum'$ signifiant que la somme est restreinte aux polynômes unitaires).

Propriétés.

(i) $L(s,\chi) = \prod_{P \in \mathcal{P}} (1 - \chi(P)P^{-s})^{-1}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de Z.

(ii) Si χ est un caractère principal modulo M, on a :

$$L(s,\chi) = \Big(\prod_{P|M} (1 - P^{-s})\Big).\zeta(s)$$

Corollaire. *Si χ est un caractère principal modulo M, $L(s,\chi)$ est transcendant sur Q.*

On suppose désormais et jusqu'à la fin, que M est un polynôme unitaire fixé de degré 1. On posera : $M = T - a$ avec $a \in \mathbb{F}_q$.

3. Caractères de degré 1

Propriétés. Soit $M = T - a \quad (a \in \mathbb{F}_q)$.

Alors tout caractère modulo M est de la forme :

$$\begin{aligned}\chi_r : (Z/(M))^* &\longrightarrow \mathbb{F}_q^* \\ \overline{N} &\longmapsto (N(a))^r\end{aligned}$$

Démonstration. Comme M est de degré 1, $(Z/(M)^*, .)$ est isomorphe à $(\mathbb{F}_q^*, .)$ et comme :

$$N \equiv N(a) \mod M$$

on peut identifier $\overline{N}$ et $N(a)$.

Il reste à déterminer les homomorphismes de $(\mathbb{F}_q^*, .)$.

Comme $(\mathbb{F}_q^*, .)$ est cyclique, ils sont de la forme : $N(a) \longmapsto N(a)^r$. □

Notation. On notera désormais χ_r le caractère :

$$\begin{aligned}\chi_r : Z &\longrightarrow \mathbb{F}_q \\ N &\longmapsto N(a)^r\end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner un exemple fondamental ; pour χ_1, on peut donner deux expressions de $L(1, \chi_1)$:

$$L(1,\chi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{(q^k-1)/q-1}}{L_k} \tag{1}$$

$$L(1,\chi_1) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n}. \tag{2}$$

Ces deux relations seront démontrées dans la preuve du théorème 1.

Dans les prochains paragraphes, nous allons généraliser le type de relations obtenues ci-dessus et en déduire des résultats d'algébricité et de transcendance ; quand on calculera $L(1, \chi_s)$ on obtiendra une relation du type (1), et pour $L(s, \chi_s)$ une relation du type (2).

4. Algébricité de $L(s, \chi_s)$

Posons :

$$\xi = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n} \tag{3}$$

ξ est bien défini et on a alors le :

Théorème 1. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$:*

$$L(s, \chi_s) = B\xi^s$$

avec $B \in Q^*$ et dépend de s. De plus $B = 1$ si $s \leq q$.

Corollaire 1.

(i) *Pour tout s de $\mathbb{N}^*$, $L(s,\chi_s)/\pi^s$ est algébrique sur Q.*

(ii) *De plus si $q-1$ divise s, $L(s,\chi_s)/\pi^s$ est rationnel*

(iii) *Pour tout s de $\mathbb{N}$, $L(s,\chi_s)$ est transcendant sur Q.*

Remarque. Si on considère que les nombres s divisibles par $q-1$ jouent le rôle de nombres pairs, $L(s,\chi_s)/\pi^s$ est rationnel dans ce cas, de plus comme dans le cas réel, il existe aussi des caractères χ pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ est algébrique si s est "impair".

Preuve du Théorème 1. On a :

$$L(s,\chi_s)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$$

avec :

$$u_k=\sideset{}{'}\sum_{\deg N=k}\frac{\chi_s(N)}{N^s}=\sideset{}{'}\sum_{\substack{\deg N=k\\ N(a)\neq 0}}\frac{1}{N^s/\chi_s(N)}.$$

Mais en faisant la division de N par M, N peut s'écrire :

$$N=M^k+a_{k-1}M^{k-1}+\cdots+a_1M+a_0$$

avec :

$$a_0=N(a)\qquad\text{car}\qquad N\equiv N(a)\qquad\text{mod } M$$

d'où :

$$\frac{N^s}{\chi_s(N)}=\Big(\frac{M^k}{a_0}+\frac{a_{k-1}}{a_0}\ M^{k-1}+\cdots+\frac{a_1M}{a_0}+\frac{a_0}{a_0}\Big)^s$$

Si on pose : $b_k=\dfrac{a_k}{a_0}$,
on a :

$$\begin{aligned}\frac{N^s}{\chi_s(N)}&=(b_kM^k+\cdots+b_1M+1)^s\\&=M^{ks}\Big(b_k+b_{k-1}\Big(\frac{1}{M}\Big)+\cdots+b_1\Big(\frac{1}{M}\Big)^{k-1}+\Big(\frac{1}{M}\Big)^k\Big)^s\\&=M^{ks}P^s\Big(\frac{1}{M}\Big)\end{aligned}$$

où P est un polynôme unitaire tel que $P(0)\neq 0$.

Comme il y a correspondance bijective entre les N unitaires tels que $N(a) \neq 0$ et les P unitaires tels que $P(0) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_k &= \sideset{}{'}\sum_{\substack{\deg P = k \\ P(0)\neq 0}} \frac{1}{M^{ks} P^s(\frac{1}{M})} \\ &= \Big(\frac{1}{M^{ks}} \sideset{}{'}\sum_{\deg P = k} \frac{1}{M^{ks} P^s(\frac{1}{M})} \Big) - \Big(\frac{1}{M^{(k-1)s}} \sideset{}{'}\sum_{\deg P = k-1} \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} \Big) \end{aligned}$$

Posons donc :

$$u_k = v_k - v_{k-1}$$

avec :

$$v_k = \frac{1}{M^{ks}} \sideset{}{'}\sum_{\deg P = k} \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} \qquad \text{et} \qquad v_{-1} = 0 \tag{4}$$

On a alors :

$$L(s, \chi_s) = \sum_{k=0}^{\infty} (v_k - v_{k-1}) = \lim_{k \longrightarrow \infty} v_k$$

(i) Si $s \leq q$, on sait que :

$$\sideset{}{'}\sum_{\deg P = k} \frac{1}{P^s} = \frac{(-1)^{ks}}{L_k^s} \qquad \text{([C], [D] p. 4.7)}$$

d'où :

$$v_k = \frac{1}{M^{ks}} \ \frac{(-1)^{ks}}{[k]_{1/M}^s \cdots [1]_{1/M}^s}$$

avec :

$$[k]_{1/M} = (\frac{1}{M})^{q^k} - (\frac{1}{M})$$

et comme :

$$[k]_{1/M} = \frac{-[k]}{M^{q^k+1}}$$

on en déduit :

$$v_k = \frac{M^{sq(q^k-1)/q-1}}{L_k^s}$$

d'où l'expression de $L(s, \chi_s)$ quand $s \leq q$.

On a donc bien $B = 1$ si $s \leq q$.

Si $s = 1$, alors en écrivant v_k sour la forme :

$$v_k = \frac{M^{q^k + \cdots + q}}{L_k}$$

on en déduit que :

$$u_k = v_k - v_{k-1} = \frac{M^{(q^k-1)/q-1}}{L_k}$$

ce qui prouve la relation (1).

(ii) Supposons maintenant que $s > q$; on a alors :

Si s est tel que : $q^n < s \leq q^{n+1}$:

$$\sum_{\deg P = k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} = \frac{M^{s(k+q(q^k-1)/q-1)}}{L_k^s} \sum_{\substack{\boldsymbol{i} \text{ tel que} \\ i_1 q + \cdots + i_n q^n < s}} \alpha_{\boldsymbol{i}} B_{\boldsymbol{i},k} \tag{5}$$

avec :

$$B_{\boldsymbol{i},k} = \pm \frac{M^{i_1(q+1)+\ldots+i_n(nq^n+(q^n-1)/q-1)}\ [k]_{1/M}^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]_{1/M}^{i_nq^n}}{D_1^{i_1}\ldots D_n^{i_n}}$$

où :

$\boldsymbol{i}$ représente l'indice $(i_1, \ldots, i_n)$

$\alpha_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{F}_q$

$\alpha_{\mathbf{0}} = \alpha_{(0,\ldots,0)} \neq 0$

$D_k = [k][k-1]^q \ldots [1]^{q^{k-1}}$

Remarque. Le signe de $B_{\boldsymbol{i},k}$ regroupe tous les signes intervenant dans le calcul de l'expression ci-dessus, même ceux ne dépendant pas de la somme. Il dépend donc de $\boldsymbol{i}$, mais aussi de s et k et peut-être calculé explicitement. Cependant comme il n'intervient pas de façon significative par la suite, nous nous contenterons par commodité de le noter : $\pm$.

Pour établir la relation (5), on utilise la relation (48) de [D.H] page 277, dont on déduit l'expression de :

$$\sum_{\deg P = k}{}' \frac{1}{P^s}$$

Si $q^n < s \leq q^{n+1}$, on a alors :

$$\sum_{\deg P = k}{}' \frac{1}{P^s} = (-1)^{s+k+1} \sum_{\substack{\boldsymbol{i} \text{ tel que} \\ i_1q+\ldots+i_nq^n \leq s-1}} \frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}[k]^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]^{i_nq^n}}{L_k^s\ D_1^{i_1}\ldots D_n^{i_n}}$$

avec $\alpha_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{F}_q$, $\alpha_{\mathbf{0}} \neq 0$.

D'où :

$$\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} =$$

$$\frac{(-1)^{s+k+1}}{L_k^s(\frac{1}{M})} \sum_{\substack{\boldsymbol{i} \text{ tel que} \\ i_1q+\ldots+i_nq^n<s}} \frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}[k]_{1/M}^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]_{1/M}^{i_nq^n}}{D_1^{i_1}(\frac{1}{M}) \ldots D_n^{i_n}(\frac{1}{M})}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{0}} &\neq 0 \\ L_k(\frac{1}{M}) &= [k]_{1/M}\ [k-1]_{1/M} \ldots [1]_{1/M} \\ D_k(\frac{1}{M}) &= [k]_{1/M}\ [k-1]_{1/M}^q \ldots [1]_{1/M}^{q^{k-1}} \end{aligned}$$

Comme : $[k]_{1/M} = \frac{-[k]}{M^{q^k+1}}$,
on a :

$$\begin{aligned} L_k\Big(\frac{1}{M}\Big) &= \frac{(-1)^k\ L_k}{M^{k+q(q^k-1)/q-1}} \\ D_k\Big(\frac{1}{M}\Big) &= \frac{(-1)^{(q^k-1)/q-1}\ D_k}{M^{kq^k+(q^k-1)/q-1}} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de $\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{N})}$, on retrouve bien la relation (5).

On a donc :

$$v_k = \Big(\frac{M^{q(q^k-1)/q-1}}{L_k}\Big)^s \sum_{\substack{\boldsymbol{i} \text{ tel que} \\ i_1q+\ldots+i_nq^n<s}} \alpha_{\boldsymbol{i}} B_{\boldsymbol{i},k}$$

avec :

$$B_{\boldsymbol{i},k} = \pm \frac{M^{i_1(q+1)+\ldots+i_n(nq^n+(q^n-1)/q-1)}\ [k]_{1/M}^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]_{1/M}^{i_1q^n}}{D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n}}$$

or :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}[k]_{1/M}^{i_1q+\cdots+i_nq^n}\dots[k-(n-1)]_{1/M}^{i_nq^n}=$$
$$=\lim_{k\longrightarrow\infty}\left[\left(\frac{1}{M}\right)^{q^k}-\frac{1}{M}\right]^{i_1q+\cdots+i_nq^n}\dots\left[\left(\frac{1}{M}\right)^{q^{k-(n-1)}}-\frac{1}{M}\right]^{i_nq^n}$$
$$=\left(\frac{-1}{M}\right)^{i_1q+\cdots+i_nq^n}\dots\left(\frac{-1}{M}\right)^{i_nq^n}$$
$$=\pm\left(\frac{1}{M}\right)^{i_1q+2i_2q^2+\cdots+ni_nq^n}$$

Donc, si on pose : $B_{\boldsymbol{i}}=\lim_{k\longrightarrow\infty}B_{\boldsymbol{i},k}$ on obtient :

$$B_{\boldsymbol{i}}=\pm\frac{M^{i_1(q+1)+\ldots+i_n(nq^n+(q^n-1)/q-1)}}{D_1^{i_1}\dots D_n^{i_n}\ M^{i_1q+2i_2q^2+\ldots+ni_nq^n}}$$

c'est-à-dire :

$$B_{\boldsymbol{i}}=\pm\frac{M^{i_1+i_2(q^2-1)/q-1)+\ldots+i_n(q^n-1)/q-1}}{D_1^{i_1}\dots D_n^{i_n}}$$

D'où :

$$L(s,\chi_s)=\lim_{k\longrightarrow\infty}v_k=\xi^sB$$

avec

$$B=\sum_{\substack{\boldsymbol{i}\text{ tel que}\\ i_1q+\ldots+i_nq^n<s}}\alpha_{\boldsymbol{i}}B_{\boldsymbol{i}}.$$

On a bien : $B\in Q$

Reste à montrer que B est non nul :

$$B_{\mathbf{0}}=\pm\alpha_{\mathbf{0}}\neq0$$

donc : $\deg B_{\mathbf{0}}=0$
et comme : $\deg D_k=kq^k$,

$$\deg B_{\boldsymbol{i}}=i_1(1-q)+i_2\Big(\frac{q^2-1}{q-1}-2q^2\Big)+\ldots+i_n\Big(\frac{q^n-1}{q-1}-nq^n\Big).$$

On en déduit que si $\boldsymbol{i}\neq\mathbf{0}$,

$$\deg B_{\boldsymbol{i}}<0.$$

Comme B est la somme de $B_{\mathbf{0}}$ et de $B_{\boldsymbol{i}}$ de degré strictement négatif, B est bien non nul. □

Preuve du Corollaire 1.

(i) On a :

$$\pi = \prod_{j=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\Big) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{L_{n+1}} \prod_{j=0}^{n}([j+1]-[j])$$

Comme : $[j+1]-[j] = [1]^{q^j}$,

$$\pi = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{[1]^{q^n-1/(q-1)}}{L_n}$$

D'où, d'après le théorème 1 :

$$\frac{L(s,\chi_s)}{\pi^s} = \frac{B\xi^s}{\pi^s} = \lim_{n\longrightarrow\infty} B\Big(\frac{M^q}{[1]}\Big)^{s.\frac{q^n-1}{q-1}} = B\Big(\frac{[1]}{M^q}\Big)^{s/(q-1)}$$

avec $B = 1$ si $s \leq q$ et où $\Big(\frac{[1]}{M^q}\Big)^{1/(q-1)}$ est l'élément X de Z de signe 1 tel que :

$$X^{q-1} = \frac{[1]}{M^q}$$

Ce rapport est donc algébrique.

(ii) De plus si $s/q-1$ est un entier m,

$$B.\Big(\frac{[1]}{M^q}\Big)^m \in Q$$

(iii) Enfin, comme $B \in Q^*$, la transcendance de $L(s,\chi_s)$ se déduit de celle de π^s.

□

5. Transcendance de $L(1,\chi_s)/\pi$

Nous allons, maintenant, aborder un exemple où $L(r,\chi)/\pi^r$ n'est plus algébrique mais transcendant.

On suppose toujours que M et χ_s sont définis comme précédemment :

$$M = T - a$$

et

$$\chi_s \begin{cases} Z & \longrightarrow \mathbb{F}_q \\ N & \longmapsto N(a)^s \end{cases}$$

On a le :

Théorème 2. *Pour $s < q$*

$$L(1,\chi_s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(s-1)} \; \frac{M^{s\frac{q^k-1}{q-1}}}{L_k} \tag{6}$$

Le calcul pour aboutir à (6) est assez complexe et sera détaillé au paragraphe suivant.

Rappelons maintenant le :

Théorème (B. de Mathan [dM]). *Soit $\alpha \in R$. Supposons qu'il existe une suite (P_n/Q_n) avec $(P_n, Q_n) \in Z^2, P_nQ_n \neq 0$ satisfaisant :*

(i) *Il existe $\Lambda \in Z, \Lambda \neq 0$, tel que :*

$$Q_n = \Lambda Q_{n-1}^q \quad \forall n \leq 1$$

(ii) *Il existe une constante réelle C_1 telle que :*

$$|\alpha - P_n/Q_n| \leq C_1 |Q_n|^{-1}$$

(iii) *Il existe un polynôme irréductible Δ tel que la suite (δ_n) définie par :*

$$\delta_n = W_\Delta(P_n)$$

satisfait :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (q\delta_{n-1} - \delta_n) = +\infty$$

(W_Δ étant la valuation Δ-adique), alors α est transcendant sur Q.

Le corollaire suivant est une application directe du critère de transcendance énoncé ci-dessus :

Corollaire 2. *Pour $1 < s < q$,*

$$L(1, \chi_s)/\pi$$

est transcendant sur Q.

Remarque.

1. Comme χ_s ne dépend que de la classe de s modulo $q-1$, on peut généraliser ce résultat à tout s tel que :

$$s \not\equiv 1 \qquad (q-1).$$

2. Le théorème 2, p. 430 de [dM 2] ne peut s'appliquer pour montrer que $L(1,\chi_s)/\pi^t$ est transcendant car la condition (v) de ce théorème 2 n'est pas satisfaite.

Preuve du corollaire 2.

On a vu que

$$\frac{\pi}{\xi} = \left(\frac{M^q}{[1]}\right)^{\frac{1}{q-1}} \in \overline{Q}$$

Par suite $L(1,\chi_s)/\pi$ est transcendant si et seulement si $L(1,\chi_s)/\xi$ l'est ; c'est cette dernière assertion que nous allons montrer.

On pose donc :

$$\begin{aligned}\alpha &= L(1,\chi_s)/\xi \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{L_n}{M^{q(q^n-1)/(q-1)}} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{L_k}\end{aligned}$$

avec :

$$\varepsilon_k = (-1)^{k(s-1)} M^{s\frac{q^k-1}{q-1}}$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve :

$$\alpha = \lim_{n\longrightarrow\infty} P_n/Q_n$$

avec :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \prod_{k<j\leq n} [j]$$

et :

$$Q_n = M^{q(q^n-1)/(q-1)}$$

Examinons si P_n et Q_n satisfont les conditions (i) (ii) et (iii) du théorème de Mathan.

Condition (i) : Si on pose : $\Lambda = M^q$ on vérifie alors que :

$$Q_n = \Lambda Q_{n-1}^q$$

Condition (ii) : On a :

$$\begin{aligned}\xi &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{M^{q^j}}{[j]} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \prod_{j=1}^{n} \Big(1 - \frac{M}{[j]}\Big)\end{aligned}$$

De même :

$$\frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n} = \prod_{j=1}^{n} \Big(1 - \frac{M}{[j]}\Big)$$

D'où :

$$\Big|\xi - \frac{Q_n}{L_n}\Big| = \Big|\frac{M}{[n+1]}\Big| = \ |T|^{1-q^{n+1}}$$

Comme : $|\xi| = \left|\frac{Q_n}{L_n}\right| = 1$, on a :

$$\Big|\frac{1}{\xi} - \frac{L_n}{Q_n}\Big| = \ |T|^{1-q^{n+1}} \tag{7}$$

D'autre part :

(8) $$\Big|L(1,\chi_s)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_k}{L_k}\Big| = |T|^{(s-q).\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

Maintenant, si $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$,

$$\Big|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\Big| = \Big|a\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\Big)+\frac{1}{d}(a-c)\Big| \leq \sup\Big(\Big|\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\Big|, |a-c|\Big)$$

En prenant : $a = L(1,\chi_s), b = \xi, c = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_k}{L_k}$ et $d = \frac{Q_n}{L_n}$, on trouve d'après (8) et (7)) :

$$\Big|\frac{L(1,\chi_s)}{\xi}-\frac{P_n}{Q_n}\Big| \leq \sup\Big(|T|^{1-q^{n+1}}, |T|^{(s-q).(q^{n+1}-1)/q-1}\Big)$$
$$\leq |T|^{(s-q).(q^{n+1}-1)/q-1}$$

Or :

$$\deg Q_n = (q^{n+1}-q)/q-1 \leq (q-s)(q^{n+1}-1)/q-1$$

donc :

$$\Big|\frac{L(1,\chi_s)}{\xi}-\frac{P_n}{Q_n}\Big| \leq |Q_n|^{-1}$$

Condition (iii) : Choisissons $\Delta = M$ et calculons $\delta_n = W_\Delta(P_n)$.
Comme $\varepsilon_k = (-1)^{k(s-1)}M^{s\frac{q^k-1}{q-1}}$. On a :

$$W_M\Big(\varepsilon_k\prod_{k<j\leq n}[j]\Big) = s.\frac{q^k-1}{q-1}+n-k$$

D'où, si $s>1$:

$$W_M\Big(\varepsilon_0\prod_{0<j\leq n}[j]\Big) < W_M\Big(\varepsilon_1\prod_{1<j\leq n}[j]\Big) < \ldots < W_M(\varepsilon_n)$$

d'où :

$$W_M(P_n) = W_M(\varepsilon_0 L_n) = n.$$

Remarque. Si $s=1$, la relation ci-dessus n'est plus vraie.

On a donc :

$$\delta_n = n$$

d'où :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(q\delta_{n-1}-\delta_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(q-1)n-q = +\infty$$

□

6. Preuve du théorème 2

Posons :

$$L(1,\chi_s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

et :

$$A_k(X) = \sideset{}{'}\prod_{|N|=q^k} (\chi_s(N)X + N)$$

($\prod'$ signifie que le produit est restreint aux N unitaires).

En prenant les dérivées logarithmiques (formelles) des deux membres, on obtient :

$$\frac{A_k'(X)}{A_k(X)} = \sideset{}{'}\sum_{|N|=q^k} \frac{\chi_s(N)}{\chi_s(N)X + N}$$

et :

$$u_k = \frac{A_k'(0)}{A_k(0)}$$

Calcul de $A_k'(0)/A_k(0)$:

Pour effectuer ce calcul, on va décomposer A_k en sous-produits B_ℓ où $\chi_s(N) = \ell^s$ reste constant. Posons donc :

$$A_k(X) = \prod_{\ell \in \mathbb{F}_q} B_\ell(X) \tag{9}$$

avec :

$$B_\ell(X) = \prod_{|N|=q^k \, N(a)=\ell} (\ell^s X + N)$$

Pour exprimer $B_\ell(X)$, nous utiliserons les *déterminants de Moore* :

$$D(M_0, \ldots, M_k) = \left| M_j^{q^{k-j}} \right| = \begin{vmatrix} M_0^{q^k} & M_0^{q^{k-1}} & \ldots & M_0^q & M_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_k^{q^k} & M_k^{q^{k-1}} & \ldots & M_k^q & M_k \end{vmatrix}$$

Ces déterminants (d'ordre $k+1$) et leurs propriétés ont été étudiés par Moore dans [M]. On a notamment :

$$\frac{D(M_0, M_1, \ldots, M_k)}{D(M_1, \ldots, M_k)} = \prod_{(a_1,\ldots,a_k)\in\mathbb{F}_q^k} (M_0 + a_1 M_1 + \ldots + a_k M_k) \tag{10}$$

Comme N peut s'écrire :

$$N = M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \ldots + a_1 M + \ell,$$

on a d'après (10) :

$$\begin{aligned} B_\ell(X) &= \\ &= \frac{D(\ell^s X + M^k + \ell, M^{k-1}, \ldots, M)}{D(M^{k-1}, \ldots, M)} \\ &= \frac{\ell^s D(X, M^{k-1}, \ldots, M) + D(M^k, M^{k-1}, \ldots, M) + \ell D(1, M^{k-1}, \ldots, M)}{D(M^{k-1}, \ldots, M)} \\ &= \frac{\ell^s M^{(q^k-1)/q-1} D\left(\frac{X}{M}, M^{k-2}, \cdots, 1\right) + [M^{(q^k-1)/q-1} + (-1)^{k-1}\ell]\ D(M^{k-1}, \ldots, 1)}{M^{(q^{k-1}-1)/q-1}\ D(M^{k-2}, \ldots, 1)} \end{aligned}$$

En utilisant *le polynôme de Carlitz* défini dans [C] par :

$$\psi_k(X) = \frac{D(X, M^{k-1}, \ldots, 1)}{D(M^{k-1}, \ldots, 1)}$$

et en remarquant d'autre part que, d'après (10) et [C] :

$$\begin{aligned} \frac{D(M^{k-1}, M^{k-2}, \ldots 1)}{D(M^{k-2}, \ldots, 1)} &= \prod_{(a_0, \ldots, a_{k-2}) \in \mathbb{F}_q^{k-1}} (M^{k-1} + a_{k-2}M^{k-2} + \ldots + a_0) \\ &= D_{k-1} \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} B_\ell(X) = \ell^s M^{q^{k-1}} \psi_{k-1}\left(\frac{X}{M}\right) + \\ \frac{(-1)^{k-1}}{M^{(q^{k-1}-1)/q-1}}\ [(-1)^{k-1} M^{(q^k-1)/q-1} + \ell]\ .\ D_{k-1} \end{aligned}$$

avec d'après [C] :

$$\begin{aligned} &\psi_{k-1}(0) = 0 \\ &\psi'_{k-1}(0) = (-1)^{k-1}\frac{D_{k-1}}{L_{k-1}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$B_\ell(0) = D_{k-1} b(c + \ell)$$

avec :

$$b = \frac{(-1)^{k-1}}{M^{(q^{k-1}-1)/q-1}}, \qquad c = (-1)^{k-1} M^{(q^k-1)/q-1}$$

et :

$$B'_\ell(0) = D_{k-1}\ \frac{(-1)^{k-1}\ M^{q^{k-1}-1}}{L_{k-1}}\ \ell^s$$

On peut désormais calculer $A'_k(0)/A_k(0)$; d'après (9) :

$$\frac{A'_k(0)}{A_k(0)} = \frac{\displaystyle\sum_{\ell\in\mathbb{F}_q} B'_\ell(0) \prod_{\substack{j\in\mathbb{F}_q\\ j\neq\ell}} B_j(0)}{\displaystyle\prod_{\ell\in\mathbb{F}_q} B_\ell(0)}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{M^{q^{k-1}-1}}{L_{k-1}} \cdot \frac{b^{q-1}\displaystyle\sum_{\ell\in\mathbb{F}_q} \ell^s \prod_{j\neq\ell}(c+j)}{b^q\prod_{\ell\in\mathbb{F}_q}(c+\ell)}$$

Comme on trouve que, si $s<q$:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{F}_q} \ell^s \prod_{j\neq\ell j\in\mathbb{F}_q} (X+j) = (-1)^{s-1}X^s$$

En faisant une décomposition en éléments simples de $X^s/(X^q-X)$ et en réduisant cette décomposition au dénominateur commun X^q-X, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_k = \frac{A'_k(0)}{A_k(0)} &= \frac{(-1)^{k-1}M^{q^{k-1}-1}}{L_{k-1}} \cdot \frac{(-1)^{s-1}c^s}{b(c^q-c)} \\
&= \frac{(-1)^{k(s-1)}\ M^{s(q^k-1)/q-1}\ M^{-1}\ M^{(q^k-1)/q-1}}{L_{k-1}\ [M^{q(q^k-1)/q-1} \ - \ M^{(q^k-1)/q-1}]} \\
&= \frac{(-1)^{k(s-1)}}{L_{k-1}} \cdot \frac{M^{s(q^k-1)/q-1}}{(M^{q^k}-M)} \\
u_k &= \frac{(-1)^{k(s-1)}}{L_k} \,.\, M^{s(q^k-1)/q-1}
\end{aligned}$$

Je remercie B. de Mathan pour les conseils qu'il m'a donnés lors des J.A. de Bordeaux en 1993.

Tous les résultats relatifs au calcul de $\zeta(s)$ (s quelconque), aux déterminants de Moore et au polynôme de Carlitz sont dans [D].

Bibliographie

[A] J.P. Allouche, *Sur la transcendance de la série formelle II.* Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 103–117.

[C] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field.* Duke Math. J. **1** (1935), 137–168.

[D] G. Damamme, *Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade.* Thèse, Caen, 1990.

[D.H.] G. Damamme et Y. Hellegouarch. *Transcendence of the values of the Carlitz zéta function by Wade's method.* J. Number Theory **39** (1991), 257–278.

[G] D. Goss, *On a new type of L−functions for algebraic curves over finites fields.* Pacific J. of Math. **105** (1983), 143–181.

[M] E.H. Moore, *A two-fold generalisation of Fermat's theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1896), 189–195.

[dM] B. de Mathan, *Irationnality measures and transcendence in positive characteristic.* J. of Number Theory **54** (1995), 93–112.

[dM2] B. de Mathan, *Un critère de transcendance en caractéristique positive.* C.R. Acad.Sci. Paris t. 319, Série I, (1994), 427–432.

[W] L.J. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n,x)$.* Duke Math. J. **8** (1941), 701–720.

[Y] J. Yu, *Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p.* Annals of Mathematics **134** (1991), 1–23.

Gilles Damamme
Département de Mathématiques
UMR 9994
Université de Caen
Bvd du Maréchal Juin F-14032 CAEN Cedex
E-mail : `Gilles.Damamme@math.unicaen.fr`