Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **11** (1999), 345–367

Discrépance des suites de Farey

par François DRESS

Résumé. On étudie la discrépance absolue de la suite de Farey d'ordre n et on montre, en utilisant notamment une majoration d'une intégrale portant sur la fonction sommatoire de la fonction de Möbius, qu'elle est égale à $\frac{1}{n}$ exactement, ce qui est la valeur locale au point d'abscisse $\frac{1}{n}$.

Abstract. We study the absolute discrepancy of the Farey sequence of order n and we establish, by using in particular an upper bound of an integral related to the summatory function of the Möbius function, that it is equal to $\frac{1}{n}$ exactly, which is the local value at the point of abscissa $\frac{1}{n}$.

A - Présentation d'ensemble

1. Introduction

Soit n un entier positif. On désigne par $\mathcal{F}_n$ la suite de Farey d'ordre n, ensemble des rationnels $r_i = \frac{p}{q}$, avec $q \le n, 1 \le p \le q, (p,q) = 1$, ordonnés de façon croissante. Si on pose $N = N(n) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_n)$, on a l'estimation classique

$$N = \sum_{q \le n} \varphi(q) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \log n).$$

Pour $\alpha \in \,]0,1]$, on désigne par $A_N(\alpha)$ le nombre de termes de $\mathcal{F}_n$ qui appartiennent à l'intervalle $]0,\alpha]$, et on définit la discrépance locale

$$R_N(\alpha) = \frac{1}{N} \, |D_N(\alpha)|, \quad \text{avec } D_N(\alpha) = N\alpha - A_N(\alpha).$$

Franel [F] avait établi l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et une certaine majoration de la somme $\sum R_N^2(r_i)$.

Ensuite, Niederreiter [N] a étudié la discrépance absolue

$$R_N = \sup_{\alpha} R_N(\alpha),$$

et montré que son ordre de grandeur était exactement $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Depuis, aucun autre résultat sur la discrépance n'a été donné.

Manuscrit reçu le 22 février 1998.

2. Méthode et résultat

Si l'on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, $<x>$ la différence $\{x\} - \frac{1}{2}$, et si l'on désigne par M la fonction sommatoire de la fonction de Möbius, on démontre sans difficulté (cf [N]) la formule suivante :

$$D_N(\alpha) = \sum_{k \leq n} M\left(\frac{n}{k}\right)\{k\alpha\} = \frac{1}{2} + \sum_{k \leq n} M\left(\frac{n}{k}\right) <k\alpha> . \tag{1}$$

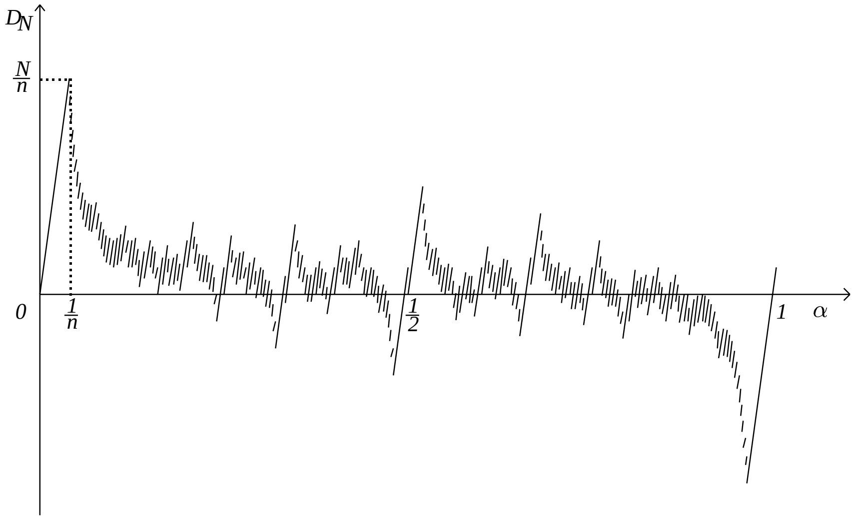

Fig. 1. - Comportement de $D_N(\alpha)$ pour $n = 25$ $(N = 200)$, α variant de 0 à 1.

Le comportement de la fonction $R_N(\alpha)$ peut être approximativement décrit à partir de deux remarques. D'une part des variations fortes (dues au fait que $N\alpha$ varie avec α cependant que $A_N(\alpha)$ reste constant) se produisent sur les "grands" intervalles qui séparent deux termes consécutifs de $\mathcal{F}_n$, i.e. ceux qui encadrent des rationnels de petit dénominateur (les plus grands de ces intervalles étant $[0, \frac{1}{n}]$ et $[1 - \frac{1}{n}, 1]$). D'autre part une heuristique élémentaire utilisant la formule (1) ainsi que l'étude numérique directe pour les "petites" valeurs de n permettent de conjecturer que $R_N(\alpha)$ est très proche de 0 lorsque α est un rationnel de petit dénominateur. Si $r_i = \frac{p}{q}$ est un tel rationnel, les termes de $\mathcal{F}_n$ qui sont dans son voisinage immédiat ont pour dénominateurs les éléments d'une progression arithmétique de raison q. Si l'on s'écarte un peu plus, on constate que $R_N(\alpha)$ varie localement "en dents de scie", ces dents de scie dessinant des festons sur chaque intervalle $[\frac{p}{q} - \frac{k+1}{qn}, \frac{p}{q} - \frac{k}{qn}]$, ces festons présentant eux-mêmes une tendance générale décroissante jusqu'à $r_{i-1} \approx \frac{p}{q} - \frac{1}{qn}$, où $R_N(\alpha)$ vaut environ $-\frac{1}{qn}$; de r_{i-1}

à $r_{i+1} \approx \frac{p}{q} + \frac{1}{qn}$, $R_N(\alpha)$ croit (avec en r_i une discontinuité en $O(\frac{1}{n^2})$ donc négligeable) jusqu'à une valeur proche de $\frac{1}{qn}$; puis ensuite, $R_N(\alpha)$ présente symétriquement un comportement en dents de scie et festons, de tendance générale décroissante.

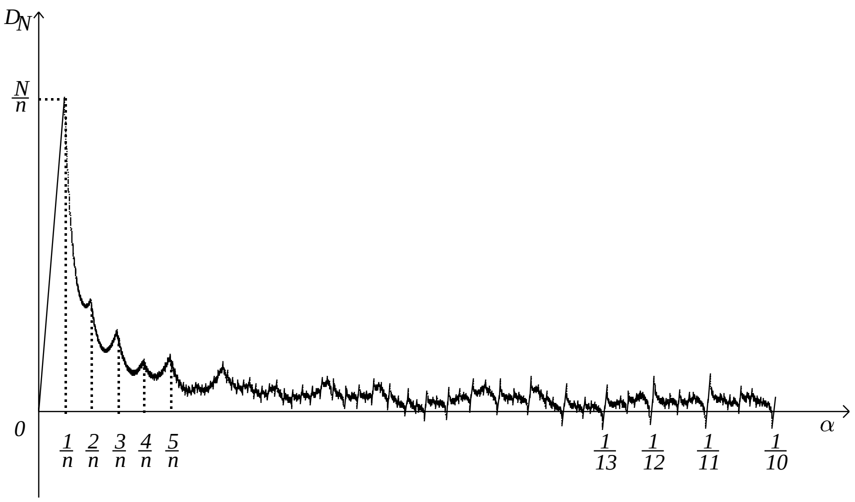

Fig. 2. - Comportement en festons de $D_N(\alpha)$ pour $n = 280$ ($N = 23\,860$), α variant de 0 à 0.1.

Le comportement global de $R_N(\alpha)$ apparait ainsi comme étant du type arcs majeurs-arc mineur, le comportement local sur un arc majeur centré sur $\frac{p}{q}$ étant approximativement l'homothétique, dans un rapport $\frac{1}{q}$, du comportement local sur l'arc centré sur 0. Et c'est naturellement sur cet arc majeur principal que doit se trouver le maximum de $R_N(\alpha)$.

Si ce maximum est effectivement atteint pour $\alpha = r_1 - 0 = \frac{1}{n} - 0$, il est alors égal à $\frac{N}{n}$, et par conséquent $R_N = \frac{1}{n} \sim \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{N}}$.

Nous nous limiterons, dans toute la suite de cet article, aux valeurs de α comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$. On a en effet $D_N(1-\alpha) = 1 - D_N(\alpha)$, sauf pour les valeurs de α égales à un terme de $\mathcal{F}_n$ (discontinuités de $D_N(\alpha)$), où l'on a exactement $D_N(1-\alpha) = -D_N(\alpha)$. La définition de D_N est standard et, en tout état de cause, le signe de la valeur critique rend l'inégalité démontrée pour α compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ *a fortiori* vraie pour α compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Posons maintenant

$$I = \int_1^\infty \frac{|M(t)|}{t^2} dt.$$

Dès que l'on dispose d'une majoration effective du type $|M(x)| \leq c\frac{x}{\log^{\beta} x}$ avec $\beta > 1$, on peut montrer que cette intégrale est convergente et en calculer en principe une valeur approchée aussi précise qu'on le désire. La somme de la formule (1) peut être majorée très simplement au moyen de cette intégrale, et l'on peut en déduire, de façon effective pour tout $\varepsilon > 0$, la majoration

$$|D_N(\alpha)| < \frac{1}{2}\sum_{k\leq n}\left|M\Big(\frac{n}{k}\Big)\right| + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}(I+\varepsilon)n.$$

On constate alors deux difficultés. La première tient à ce que l'effectivité des majorations de I n'est que théorique. Dans l'état actuel (cf paragraphe 4) des majorations effectives connues de $|M(x)|$, il faudrait par exemple calculer numériquement l'intégrale jusqu'à environ 10^{1150} pour avoir une majoration du reste inférieure à 0.1. La seconde difficulté tient à la valeur même de I. Le calcul numérique de l'intégrale tronquée à 10^{10} suggère, moyennant une heuristique simple pour estimer le reste, que $I = 1.01427\ldots$. Cette valeur conduirait à une majoration de $D_N(\alpha)$ équivalente à $0.507\ldots n$, et donc à une majoration de R_N équivalente à $\frac{0.507\ldots n}{N} \sim \frac{0.507\ldots\pi^2}{3n} = \frac{1.668\ldots}{n}$, alors que l'on souhaite établir $\frac{1}{n}$. Contrairement à la première, cette deuxième difficulté peut être contournée. Il devient envisageable d'obtenir mieux que $\frac{1}{n}$ en utilisant des majorations des sommes $|\sum\limits_{u<k\leq v} <k\alpha>|$ meilleures que $\frac{1}{2}(v-u)+O(1)$. Mais ces majorations ne seront valides que dans un domaine excluant des voisinages de 0 et des rationnels de "petit" dénominateur, et on devra donc effectuer au préalable une majoration directe de $D_N(\alpha)$, dans un premier temps pour les deux arcs majeurs centrés sur 0 et $\frac{1}{2}$, et dans un deuxième temps pour sept arcs majeurs, centrés sur les rationnels de dénominateur inférieur ou égal à 6.

Enfin, la manière la plus efficace de concrétiser les majorations conduira à faire intervenir

$$I_1 = \int_5^{\infty}\frac{|M(t)+1|}{t^2}dt \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{10}^{\infty}\frac{|M(t)+2|}{t^2}dt,$$

au lieu de l'intégrale complète I. Il y aura bien entendu pour I_1 et I_2 (comme il y aurait eu pour I) un écart important entre la valeur conjecturale et la majoration qu'il sera possible d'établir.

Théorème. *Pour tout n, on a l'égalité*

$$R_N = \frac{1}{n}.$$

La démonstration sera conduite en deux temps.

On commencera par utiliser, avec seulement deux arcs majeurs, la méthode qui vient d'être décrite, et on constatera que, compte tenu de la majoration de I_1 dont on dispose (et pour laquelle il n'y a aucun espoir d'amélioration notable à court terme), on peut seulement démontrer le théorème pour $n \leq 10^{419}$.

On devra alors, dans un deuxième temps, considérer un nombre plus élevé d'arcs majeurs et apporter divers raffinements pour compléter la démonstration (on profitera de la restriction à $n > 10^{419}$ pour se libérer de tout problème d'évaluation du reste dans les majorations des sommes $\sum\limits_{u<k\leq v} <k\alpha>$).

B - Démonstration pour $n \leq 10^{419}$

3. Majoration générale de $D_N(\alpha)$

3.1. **Majoration sur les arcs majeurs.** On rappelle que l'on s'est limité aux valeurs de α comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$. On définit alors les arcs majeurs et l'arc mineur par :

$$\begin{aligned} I(n) &= \left[0, \frac{2}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right], \\ CI(n) &= \left[0, \frac{1}{2}\right] - I(n) = \left]\frac{2}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right[. \end{aligned}$$

Proposition 1. *pour $\alpha \in I(n)$, on a la majoration*

$$D_N(\alpha) \leq \frac{N}{n}.$$

Lorsque α est inférieur ou égal à $\frac{2}{n}$, on constate que les nombres de $\mathcal{F}_n$ compris entre 0 et α sont exactement les rationnels $\frac{1}{k}$ avec $n \geq k \geq \frac{n}{2}$. On en déduit l'expression de $A_N(\alpha)$ puis celle de $D_N(\alpha) = N\alpha - A_N(\alpha)$:

$$D_N(\alpha) = \begin{cases} N\alpha & \text{pour } \alpha \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\\ N\alpha + \lceil \frac{1}{\alpha} \rceil - n - 1 & \text{pour } \alpha \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\end{cases}$$

($\lceil\ \rceil$ notation de la partie entière par excès).

La première expression varie de 0 à $\frac{N}{n}$, la seconde représente un "feston" composé d'une suite de "dents de scie", morceaux localement croissants. Le premier morceau varie de $\frac{N}{n} - 1$ à $\frac{N}{n-1} - 1$ (pour α de $\frac{1}{n}$ à $\frac{1}{n-1}$), avec un maximum approximativement égal à $\frac{N}{n} + \frac{3}{\pi^2} - 1 < \frac{N}{n}$ (on peut se poser la question des "petites" valeurs de n : on pourra par exemple vérifier très facilement que $\frac{N}{n-1} - 1 < \frac{N}{n}$ dès que $n \geq 3$). Les morceaux suivants décroissent globalement jusqu'à α voisin de $\frac{1}{\sqrt{N}} \sim \frac{\pi}{n\sqrt{3}}$, avec des valeurs équivalentes à $\frac{\pi N}{n\sqrt{3}} + \frac{n\sqrt{3}}{\pi} - n \sim (\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3})\frac{N}{n} = 0.3377\ldots\frac{N}{n}$, et ensuite les morceaux croissent globalement jusqu'au dernier qui prend des valeurs très voisines de $\frac{2N}{n} - \frac{n}{2} \sim (2 - \frac{\pi^2}{6})\frac{N}{n} = 0.3550\ldots\frac{N}{n}$.

Enfin $D_N(\frac{2}{n}) = \frac{2N}{n} + \lceil\frac{n}{2}\rceil - n - \delta$, avec $\delta = 1$ ou 2 selon que n est pair ou impair.

Sur $[0, \frac{2}{n}]$, on a donc bien la majoration souhaitée $D_N(\alpha) \leq \frac{N}{n}$.

Lorsque α est supérieur à $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, on constate que les nombres de $\mathcal{F}_n$ compris entre α et $\frac{1}{2}$ sont exactement les $\frac{k}{2k+1}$ avec $\frac{n}{2} < 2k+1 \leq n$. Il faut prendre en compte la parité de n, et poser $n = 2m-1$ ou $n = 2m$; les nombres de $\mathcal{F}_n$ concernés sont alors les $\frac{k}{2k+1}$ avec $[\frac{n+2}{4}] < k \leq m-1$. On en déduit l'expression de $A_N(\alpha)$ puis celle de $D_N(\alpha) = N\alpha - A_N(\alpha)$:

$$D_N(\alpha) = \begin{cases} N\alpha - \frac{N}{2} + \frac{N}{2} + k & \text{pour } \alpha \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4m-2}\right[\\ & \text{où } k = \lceil m - \frac{\alpha}{1-2\alpha}\rceil \\ N\alpha - \frac{N}{2} + 1 & \text{pour } \alpha \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4m-2}, \frac{1}{2}\right[. \end{cases}$$

Les deux expressions prennent des valeurs négatives sur les intervalles considérés. La première représente un feston en dents de scie, formant une suite décroissante de morceaux localement croissants.

Le premier morceau prend des valeurs très voisines de $-\frac{N}{n} + \frac{n}{4} \approx \frac{N}{n}\left(\frac{\pi^2}{12} - 1\right)$, le dernier prend des valeurs très voisines de $-\frac{N}{2n}$. La deuxième expression varie de $-\frac{N}{2n}$ environ jusqu'à 1.

Sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, on a donc bien la majoration souhaitée $|D_N(\alpha)| \leq \frac{N}{n}$.

3.2. **Majoration sur l'arc mineur.** La démonstration de la majoration pour l'intervalle $]\frac{2}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}[$ nécessite des majorations des sommes $|\sum_{u<k\leq v} <k\alpha>|$ que nous allons énoncer maintenant. Pour cela, nous devons introduire les fonctions

$$T_m(\alpha) := \sup_\beta |\sum_{k=1}^{m} <k\alpha + \beta>| \text{ et } g_m(\alpha) := \frac{1}{m}\, T_m(\alpha).$$

La fonction $g_m(\alpha)$ est continue, présente des "pics" aux points d'abscisse rationnelle et converge (non uniformément), lorsque m tend vers l'infini, vers la fonction $g(\alpha)$ égale à $\frac{1}{2q}$ si α est rationnel d'écriture irréductible $\frac{p}{q}$, et égale à 0 si α est irrationnel. Les fonctions T_m et g_m sont symétriques par rapport à $\alpha = \frac{1}{2}$ et les résultats généraux seront formulés seulement pour α compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Lemme 1. *On pose, pour $m > 4$,*

$$J_3(m) = \Big[0, \frac{2}{3m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{6(m-4)}, \frac{1}{2}\Big] \quad et \quad CJ_3(m) = \Big[0, \frac{1}{2}\Big] - J_3(m).$$

Si $\alpha \in CJ_3(m)$, on a la majoration :

$$T_m(\alpha) \le \frac{m}{6} + \frac{1}{3}.$$

Remarque. La présentation adoptée préfigure l'extension de ce résultat (ainsi que l'indice, qui renvoie à des majorations générales dont le terme principal sera $\frac{m}{2k}$, cf lemme 5).

On pourrait ajouter pour être complet - mais ces résultats ne seront pas utilisés ici - que la valeur exacte de $T_m(\alpha)$ au voisinage du pic en 0 est $\frac{m}{2} - \frac{m(m-1)}{2}\alpha$, et que la valeur exacte au voisinage du pic en $\frac{1}{2}$ est $\frac{m+r}{4} - \frac{m(m-3+2r)}{2}\Big(\frac{1}{2} - \alpha\Big)$, avec $r = 0$ ou 1 selon la parité de m.

La démonstration de ce lemme n'est pas donnée ici. Elle est un peu longue et minutieuse, mais entièrement élémentaire. Il faut étudier le comportement de T_m dans le voisinage des rationnels $\frac{p}{q}$ de "petit" dénominateur : dans un intervalle de rayon $\frac{1}{mq}$ où se manifeste l'effet de pic, et éventuellement dans un voisinage un peu plus large. Les raccordements se font ensuite en utilisant une formule de réciprocité généralisant celle qui relie les sommes $\sum_{k=1}^{m} <k\alpha>$ et $\sum_{k=1}^{m'} <\frac{k}{\alpha}>$, où $m' = [m\alpha]$.

Proposition 2. *pour $\alpha \in CI(n)$ et $n \ge 25$, on a la majoration :*

(2)

$$D_N(\alpha) \le n\Big(\frac{5}{36} + \frac{1}{2}\int_5^{\sqrt{n}} \frac{|M(t)+1|}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{H(t)}{t^2}dt + \frac{0.6}{\sqrt{n}} - \frac{5}{6n}\Big),$$

où $H(t)$ est une majoration monotone décroissante (quelconque) de $|M(t)+1|$ (cf paragraphe 4).

La restriction à $n \ge 25$, posée pour simplifier l'écriture des intégrales de l'énoncé, n'est que technique.

On suppose donc maintenant que α est compris entre $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

On écrit

$$\sum_{k \le n} M\Big(\frac{n}{k}\Big) <k\alpha> =$$

$$\sum_{n/2<k\le n} <k\alpha> - \sum_{k\le n/3} <k\alpha> + \sum_{k\le n/5} \Big(M\Big(\frac{n}{k}\Big) + 1\Big) <k\alpha>,$$

expression qui améliore le recours à une intégrale du type

$$\int^{\infty} \frac{|M(t)+a|}{t^2} dt \ .$$

On décompose alors la majoration de la façon suivante :

$$\Big| \sum_{k\leq n} M\Big(\frac{n}{k}\Big) <k\alpha> + \frac{1}{2} \Big| \leq S_1 + S_2 + S_3' + S_3'' + \frac{1}{2},$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \Big| \sum_{n/2<k\leq n} <k\alpha> \Big|, \\ S_2 &= \Big| \sum_{k\leq n/3} <k\alpha> \Big|, \\ S'_3 &= \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{n}<k\leq n/5} \Big| \Big(M\Big(\frac{n}{k}\Big) + 1 \Big) \Big|, \\ S''_3 &= \frac{1}{2} \sum_{k\leq\sqrt{n}} \Big| \Big(M\Big(\frac{n}{k}\Big) + 1 \Big) \Big|. \end{aligned}$$

Pour la première somme, l'intervalle de sommation est de longueur $m = \frac{n}{2}$ et, comme $\alpha \in CI(n) \subset CJ_3(\frac{n}{2})$, on peut appliquer la majoration du lemme 1 :

$$S_1 = \Big| \sum_{n/2<k\leq n} <k\alpha> \Big| \leq \frac{m}{6} + \frac{1}{3} = \frac{n}{12} + \frac{1}{3}.$$

Pour la deuxième somme, l'intervalle de sommation est de longueur $m = \frac{n}{3}$ et, comme $\alpha \in CI(n) \subset CJ_3(\frac{n}{3})$, on peut de même appliquer la majoration du lemme 1 :

$$S_2 = \Big| \sum_{k\leq n/3} <k\alpha> \Big| \leq \frac{m}{6} + \frac{1}{3} = \frac{n}{18} + \frac{1}{3},$$

et par conséquent

$$S_1 + S_2 \leq n\Big(\frac{5}{36} + \frac{2}{3n}\Big).$$

Pour les deux autres sommes, on simplifiera les notations en posant $|M(t)+1| = h(t)$.

Pour S'_3, on remarque que l'on peut écrire

$$h(n/k) = n\int_{n/k}^{n/(k-1)} \frac{h(n/k)}{t^2}dt = n\int_{n/k}^{n/(k-1)} \frac{h(t)}{t^2}dt + nr_k,$$

avec

$$n|r_k| \leq n\int_{n/k}^{n/(k-1)} \frac{|h(n/k) - h(t)|}{t^2}dt.$$

On considère maintenant les intervalles $[\frac{n}{k}, \frac{n}{k-1}]$. Comme k varie de $[\sqrt{n}]$ à $[\frac{n}{5}]$, la réunion de ces intervalles est incluse dans l'intervalle $[5, \sqrt{n}+2]$. Ces intervalles, à l'exception de $[\sqrt{n}] - 3$ d'entre eux, ne contiennent pas d'entier ; comme $h(t) = h([t])$, les $n|r_k|$ correspondants sont donc nuls ; pour les $[\sqrt{n}]-3$ intervalles qui contiennent un entier, on constate immédiatement que $n|r_k| < 1$. Par conséquent

$$\sum_{R(n)<k\leq n/5} n|r_k| < \sqrt{n} - 3.$$

et donc

$$\begin{aligned} 2S'_3 = n\int_5^{n/(\sqrt{n}-1)} \frac{|M(t)+1|}{t^2}dt + \sqrt{n} - 3 & \\ \leq n\int_5^{\sqrt{n}} \frac{|M(t)+1|}{t^2}dt + 1.1\sqrt{n} - 3. \end{aligned}$$

La dernière somme S''_3 est majorée en introduisant une fonction $H(t)$ monotone décroissante (quelconque) qui majore $|M(t)+1|$. On peut alors écrire

$$|M(n/k)+1| \leq H(n/k) = n\int_{n/(k+1)}^{n/k} \frac{H(n/k)}{t^2}dt \leq n\int_{n/(k+1)}^{n/k} \frac{H(t)}{t^2}dt,$$

ce qui donne

$$2S''_3 \leq n\int_{n/(\sqrt{n}+1)}^{n} \frac{H(t)}{t^2}dt \leq n\int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{H(t)}{t^2}dt + 0.1\sqrt{n},$$

et termine la démonstration de la proposition 2.

4. Majoration de l'intégrale I_1

Pour obtenir la meilleure majoration possible de l'intégrale I_1, on calcule l'intégrale jusqu'à 10^{10}, puis on majore le reste, de 10^{10} à l'infini, en utilisant la suite de majorations effectives de $|M(x)|$ données par dans

[D, C-D-EM, EM], dont l'ensemble permet d'écrire $|M(t)+1| \leq H(t)$, avec

$$\begin{aligned}
H(t) &= 0.516\,188\sqrt{t} && \text{pour} \quad 10^{10} \leq t \leq 10^{12}, \\
&= \frac{t}{4\,345} && \text{pour} \quad 2\,160\,535 \leq t \leq e^{166.42}, \\
&= 0.002\,969 \ \frac{t}{(\log t)^{1/2}} && \text{pour} \quad e^{166.42} \leq t \leq e^{1\,352.03}, \\
&= 0.109\,17 \ \frac{t}{\log t} && \text{pour} \quad e^{1\,352.03} \leq t \leq e^{950.45},
\end{aligned}$$

etc.

Le passage des majorations de $|M(t)|$ aux majorations utilisées pour $H(t)$ ne mérite aucun commentaire, sauf en ce qui concerne les deux premières.

D'une part la majoration $0.570\,591\sqrt{(t)}$ donnée dans [D] pour $33 \leq t \leq 10^{12}$ peut être remplacée par $0.516\,178\sqrt{(t)}$ si l'on se restreint à $10^{10} \leq t \leq 10^{12}$, majoration qui implique $|M(t)+1| \leq 0.516\,188\sqrt{t}$.

D'autre part la majoration $\frac{t}{4\,345.24}$ donnée dans [C-D-EM] pour $t \geq 2\,160\,535$ est complétée par des majorations "intermédiaires" non publiées mais dont quelques unes ont été reportées dans le théorème 1 de [D-EM]. On utilisera ici une majoration intermédiaire convenablement choisie, d'où un gain d'environ 0.000 6 (on pourrait gagner juqu'à 0.000 9 en utilisant 3 ou 4 majorations supplémentaires).

Lemme 2. *On définit*

$$I_1(X) = \int_5^X \frac{|M(t)+1|}{t^2} dt.$$

On a les majorations suivantes, pour l'intégrale complète et pour l'intégrale tronquée :

$$\begin{aligned}
I_1 = I_1(\infty) \quad &= \quad \int_5^\infty \frac{|M(t)+1|}{t^2} dt < \int_5^{10^{10}} \frac{|M(t)+1|}{t^2} dt + \int_{10^{10}}^\infty \frac{h(t)}{t^2} dt \\
&= \quad 0.190\,904\,7 + 0.347\,768\,8 = 0.538\,673\,5.
\end{aligned}$$

et

$$I_1(10^{419.2}) \quad = \quad \int_5^{10^{419.2}} \frac{|M(t)+1|}{t^2} dt < 0.330\,149\,2.$$

La démonstration s'effectue donc en décomposant

$$I_1 = \int_5^\infty \frac{|M(t)+1|}{t^2} dt < \int_5^{10^{10}} \frac{|M(t)+1|}{t^2} dt + \int_{10^{10}}^{10^{12}} \frac{h(t)}{t^2} dt + \cdots,$$

et l'ensemble des calculs est récapitulé dans le tableau ci-contre.

intervalle	majoration $H(t)$	terme partiel de l'intégrale	sommation
$5, 10^{10}$	(vraie valeur de l'intégrale)	0.190 904 7	0.190 904 7
$10^{10}, 10^{12}$	$0.516\,188\sqrt{(t)}$	0.000 009 3	0.190 914 0
$10^{12}, 1.425\,10^{14}$	$\frac{t}{8\,888}$	0.000 558 0	0.191 472 0
$1.425\,10^{14}, e^{166.42}$	$\frac{t}{4\,345}$	0.030 800 9	0.222 272 9
$e^{166.42}, e^{1\,352.03}$	$0.002\,969\frac{t}{(\log t)^{1/2}}$	0.141 737 5	0.364 009 2
$e^{1\,352.03}, e^{1\,950.45}$	$0.109\,17\frac{t}{\log t}$	0.040 005 7	0.404 014 9
$e^{1\,950.45}, e^{2\,637.52}$	$1.364\,0\frac{t}{(\log t)^{4/3}}$	0.031 342 3	0.435 357 2
$e^{2\,637.52}, e^{5\,319.31}$	$7.853\,8\frac{t}{(\log t)^{14/9}}$	0.057 353 9	0.492 711 1
$e^{5\,319.31}, e^{6\,728.23}$	$173.991\,3\frac{t}{(\log t)^{23/12}}$	0.014 133 1	0.506 844 2
$e^{6\,728.23}, e^{7\,070.51}$	$1\,893.436\frac{t}{(\log t)^{35/16}}$	0.002 597 4	0.509 441 6
$e^{7\,070.51}, e^{8\,053.99}$	$6\,989.807\frac{t}{(\log t)^{7/3}}$	0.006 157 9	0.515 599 5
$e^{8\,053.99}, e^{8\,647.39}$	$49\,337.9\frac{t}{(\log t)^{51/20}}$	0.002 930 6	0.518 530 1
$e^{8\,647.39}, e^{10\,371.95}$	$143\,469.8\frac{t}{(\log t)^{8/3}}$	0.006 177 9	0.524 708 0
$e^{10\,371.95}, e^{12\,282.3}$	$1\,689\,105\frac{t}{(\log t)^{44/15}}$	0.004 194 2	0.528 902 2
$e^{12\,282.3}, \infty$	$12\,590\,292\frac{t}{(\log t)^{236/75}}$	0.009 771 3	0.538 673 5

La majoration de l'intégrale tronquée se vérifie en tronquant ce tableau à $e^{965.19} \approx 10^{419.2}$.

5. Fin de la démonstration du théorème pour $n \leq 10^{419}$

Les majorations de $R_N(\alpha)$ proviendront de majorations de $D_N(\alpha)$, "converties" par $R_N(\alpha) = \frac{1}{N}|D_N(\alpha)|$. Pour obtenir une conversion effective, il n'est pas possible d'utiliser l'expression asymptotique de $N = \sum_{k\leq n} \varphi(k)$ rappelée au début du paragraphe 1, il faut donner des formules avec des coefficients numériques explicites.

Lemme 3. *Avec les notations précédemment utilisées, on a*

$$\textit{pour tout } n : \frac{1}{N} \leq 1.000\,081\,15\frac{\pi^2}{3n^2}\ ;$$

$$\textit{pour } n \geq 10^{20} : \frac{1}{N} \leq (1 + 4.6 \cdot 10^{-19}) \frac{\pi^2}{3n^2}.$$

On commence par montrer avec des produits de convolution entièrement élémentaires la majoration

$$\text{pour } n \geq 100 : N \geq \frac{3}{\pi^2} n^2 (1 - \frac{\log n}{n} - \frac{0.585}{n}).$$

La première majoration est alors fournie par l'utilisation de cette majoration complétée par un calcul numérique (elle est donc optimale), la deuxième majoration du lemme résulte de l'application simple de la majoration fonction de n.

Proposition 3. *Pour* $\alpha \in CI(n) = [\frac{2}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}]$*, on a les résultats suivants :*

a) *pour* $1 \leq n < 25 : D_N(\alpha) < 0.200\ n$ *et* $R_N(\alpha) < \frac{0.658}{n}$,

b) *pour* $25 \leq n < 10^{20} : D_N(\alpha) < 0.236\,174\ n$ *et* $R_N(\alpha) < \frac{0.777\,044}{n}$,

c) *pour* $10^{20} \leq n < 10^{419} : D_N(\alpha) < 0.303\,963\,5\ n$ *et* $R_N(\alpha) < \frac{1}{n}$.

Pour le résultat a), la vérification directe est sans difficulté (les constantes ne sont pas les meilleures possibles, mais il n'y a aucun enjeu).

Pour le résultat b), on constate tout d'abord que

$$\int_5^{\sqrt{n}} \frac{|M(t) + 1|}{t^2} dt + \int_{\sqrt{n}}^n \frac{H(t)}{t^2} dt < 0.194\,570\,2$$

(on ne peut pas "recopier" simplement la partie concernée du tableau du paragraphe 4 parce que $\sqrt{n}$ est inférieure à 10^{10} (néanmoins, les différences sont extrêmement faibles)). L'application de la formule (2) fournit alors le résultat sur D_N, et celui sur R_N résulte de l'application de la première majoration du lemme 3.

Pour le résultat c), on applique la formule (2) avec la valeur de $I_1(10^{419.2})$ et la deuxième majoration du lemme 3.

Ceci achève la démonstration du théorème $nR_N = 1$ pour $n \leq 10^{419.2}$.

C - Démonstration pour $n > 10^{400}$

A partir de maintenant les résultats, aussi bien pour la discrépance sur les arcs majeurs, que pour les fonctions $T_m(\alpha)$ et $g_m(\alpha)$ et la discrépance sur les arcs mineurs, seront énoncés pour $n > 10^{400}$.

On gagnera à la fois en efficacité et en clarté en travaillant sur des développements limités (généralisés) tronqués, dont on omettra délibérément d'écrire les termes et les restes dont l'influence *relative* est inférieure à 10^{-100}. Cette circonstance (qui concernera aussi bien les variables et paramètres que les valeurs prises) sera signalée par l'utilisation d'appellations telles que « $^{\omega}$valeur » et de signes relationnels précédés d'un oméga en exposant : « $^{\omega}=$ », « $^{\omega}<$ » ou « $^{\omega}\leq$ ».

Quoique tout cela soit parfaitement standard, l'esprit est néanmoins très proche de l'analyse non-standard.

6. Extension de la majoration de $D_N(\alpha)$ sur les arcs majeurs

Avant d'étendre la proposition 1, il est nécessaire de donner une estimation de la valeur de la discrépance aux points $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ et $\frac{1}{6}$ (seules les discrépances aux points 0 et $\frac{1}{2}$ sont triviales).

Lemme 4. *Si $n > 10^{400}$, alors :*

$$\begin{aligned} |D_N(1/3)| &\leq 0.000\,437\ n. \\ |D_N(1/4)| &\leq 0.000\,501\ n. \\ |D_N(1/5)|, |D_N(2/5)| &\leq 0.000\,498\ n. \\ |D_N(1/6)| &\leq 0.000\,540\ n. \end{aligned}$$

(En fait la majoration obtenue pour $|D_N(\frac{2}{5})|$ est légèrement meilleure, mais il sera plus commode pour la suite de la démonstration de prendre la même majoration.)

Pour $\alpha = \frac{p}{q}$, on part de la formule (1) : $D_N(\alpha) = \sum\limits_{k\leq n} M(n/k)\{k\alpha\}$, qui donne l'expression

$$D_N\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{1}{q}\sum_{k\leq n} a_k M\Big(\frac{n}{k}\Big),$$

où a_k est le reste de la division de kp par q, expression que l'on peut réécrire après soustraction de $\frac{q-1}{2q}\sum\limits_{k\leq n} M(\frac{n}{k}) = \frac{q-1}{2q}$:

$$D_N\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{1}{2q}\sum_{k\leq n} b_k M\Big(\frac{n}{k}\Big) + \frac{q-1}{2q},$$

avec les coefficients $b_k = 2a_k - q + 1$ de somme nulle sur tout intervalle de q entiers consécutifs (ils peuvent même être groupés deux par deux de valeurs absolues égales et de signes opposés, propriété qui permet de majorer simplement le reste). On coupe alors la somme en une partie principale jusqu'à $k = qh$,

On coupe alors la somme en une partie principale jusqu'à $k = qh$, qu'on majore au moyen de la majoration $|M(x)| < \frac{x}{4\,345}$ (valable pour $x \geq 2\,160\,535$) de [C-D-EM], appliquée à l'estimation $u \log qh + v + O(1/h)$ de la somme $\sum\limits_{k\leq qh} b_k/k$, et un reste, majoré en c_α/qh. Le résultat est une majoration dépendant de h, qu'il est immédiat d'optimiser. Le détail des calculs est présenté ci-dessous.

- $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
D_N\Big(\frac{1}{3}\Big) &= \frac{1}{3}\Big(M(n) + 2M\Big(\frac{n}{2}\Big) + M\Big(\frac{n}{4}\Big) + 2M\Big(\frac{n}{5}\Big) \\
&\qquad + M\Big(\frac{n}{7}\Big) + \dots\Big), \\
D_N\Big(\frac{1}{3}\Big) &= \frac{1}{3}\Big(M\Big(\frac{n}{2}\Big) - M\Big(\frac{n}{3}\Big) + M\Big(\frac{n}{5}\Big) - M\Big(\frac{n}{6}\Big) + \dots\Big) + \frac{1}{3}. \\
\Rightarrow |D_N(\alpha)| &\overset{\omega}{\leq} \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\log 3h - 0.1006\Big) \times \frac{n}{4\,345} + \frac{n}{27h} = \\
&= \Big(\frac{2\log 3h}{39\,105} - 0.000\,007\,71 + \frac{1}{27h}\Big)n.
\end{aligned}$$

optimum pour $3h = 2\,173$, valeur $= 0.000\,436\,41 \cdots n$.

- $\alpha = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
D_N\Big(\frac{1}{4}\Big) &= \frac{1}{4}\Big(M(n) + 2M\Big(\frac{n}{2}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{3}\Big) + M\Big(\frac{n}{5}\Big) \\
&\qquad + 2M\Big(\frac{n}{6}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{7}\Big) + M\Big(\frac{n}{9}\Big) + \dots\Big), \\
D_N\Big(\frac{1}{4}\Big) &= \frac{1}{8}\Big(- M(n) + M\Big(\frac{n}{2}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{3}\Big) - 3M\Big(\frac{n}{4}\Big) \\
&\qquad - M\Big(\frac{n}{5}\Big) + M\Big(\frac{n}{6}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{7}\Big) - \cdots\Big) + \frac{3}{8}. \\
\Rightarrow |D_N(\alpha)| &\overset{\omega}{\leq} \frac{1}{8}\Big(2\log 4h + 0.022\,5\Big) \times \frac{n}{4\,345} + \frac{n}{32h} = \\
&= \Big(\frac{\log 4h}{17\,380} + 0.000\,000\,65 + \frac{1}{32h}\Big)n.
\end{aligned}$$

optimum pour $4h = 2\,173$, valeur $= 0.000\,500\,28 \dots n$.

- $\alpha = \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}
D_N\Big(\frac{1}{5}\Big) &= \frac{1}{5}\Big(M(n) + 2M\Big(\frac{n}{2}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{3}\Big) + 4M\Big(\frac{n}{4}\Big) \\
&\qquad + M\Big(\frac{n}{6}\Big) + 2M\Big(\frac{n}{7}\Big) + \cdots\Big), \\
D_N\Big(\frac{1}{5}\Big) &= \frac{1}{5}\Big(- M(n) + M\Big(\frac{n}{3}\Big) + 2M\Big(\frac{n}{4}\Big) - 2M\Big(\frac{n}{5}\Big) \\
&\qquad - M\Big(\frac{n}{6}\Big) + M\Big(\frac{n}{7}\Big) - \cdots\Big) + \frac{2}{5}. \\
\Rightarrow |D_N(\alpha)| &\overset{\omega}{\leq} \frac{1}{5}\Big(\frac{6}{5}\log 5h + 0.0515\Big) \times \frac{n}{4\,345} + \frac{4n}{125h} \\
&= \Big(\frac{6\log 5h}{108\,625} + 0.000\,002\,37 + \frac{4}{125h}\Big)n.
\end{aligned}$$

optimum pour $5h = 2\,897$, valeur $= 0.000\,497\,91 \dots n$.

- $\alpha = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} D_N\Big(\frac{2}{5}\Big) &= \frac{1}{5}\Big(2M(n) + 4M\Big(\frac{n}{2}\Big) + M\Big(\frac{n}{3}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{4}\Big) \\ &\qquad +2M\Big(\frac{n}{6}\Big) + 4M\Big(\frac{n}{7}\Big) + \cdots\Big), \\ D_N\Big(\frac{2}{5}\Big) &= \frac{1}{5}\Big(2M\Big(\frac{n}{2}\Big) - M\Big(\frac{n}{3}\Big) + M\Big(\frac{n}{4}\Big) - 2M\Big(\frac{n}{5}\Big) \\ &\qquad +2M\Big(\frac{n}{7}\Big) - M\Big(\frac{n}{8}\Big) - \cdots\Big) + \frac{2}{5}. \\ \Rightarrow |D_N(\alpha)| &\overset{\omega}{\le} \frac{1}{5}\Big(\frac{6}{5}\log 5h - 0.1747\Big) \times \frac{n}{4\,345} + \frac{4n}{125h} \\ &= \Big(\frac{6\log 5h}{108\,625} - 0.000\,008\,04 + \frac{4}{125h}\Big)n. \end{aligned}$$

optimum pour $5h = 2\,897$, valeur $= 0.000\,487\,50\ldots n$.

- $\alpha = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} D_N\Big(\frac{1}{6}\Big) &= \frac{1}{6}\Big(M(n) + 2M\Big(\frac{n}{2}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{3}\Big) + 4M\Big(\frac{n}{4}\Big) \\ &\qquad +5M\Big(\frac{n}{5}\Big) + M\Big(\frac{n}{7}\Big) + 2M\Big(\frac{n}{8}\Big) + \ldots\Big), \\ D_N\Big(\frac{1}{6}\Big) &= \frac{1}{12}\Big(-3M(n) - M\Big(\frac{n}{2}\Big) + M\Big(\frac{n}{3}\Big) + 3M\Big(\frac{n}{4}\Big) \\ &\qquad +5M\Big(\frac{n}{5}\Big) - 5M\Big(\frac{n}{6}\Big) - 3M\Big(\frac{n}{7}\Big) - \cdots\Big) + \frac{5}{12}. \\ \Rightarrow |D_N(\alpha)| &\overset{\omega}{\le} \frac{1}{12}(3\log 6h + 0.522\,5) \times \frac{n}{4\,345} + \frac{5n}{144h} \\ &= (\frac{\log 6h}{17\,380} + 0.000\,010\,02 + \frac{5}{144h})n. \end{aligned}$$

optimum pour $6h = 3\,621$, valeur $= 0.000\,539\,05\ldots n$.

Proposition 4. *On définit les arcs majeurs et l'arc mineur par*

$$\begin{aligned} I(n) &= \Big[0, \frac{15}{n}\Big[\cup \Big]\frac{1}{6} - \frac{1}{14n}, \frac{1}{6} + \frac{1}{14n}\Big[\\ &\quad \cup \Big]\frac{1}{5} - \frac{6}{35n}, \frac{1}{5} + \frac{6}{35n}\Big[\cup \Big]\frac{1}{4} - \frac{9}{28n}, \frac{1}{4} + \frac{9}{28n}\Big[\\ &\quad \cup \Big]\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3n}\Big[\cup \Big]\frac{2}{5} - \frac{6}{35n}, \frac{2}{5} + \frac{6}{35n}\Big[\cup \Big]\frac{1}{2} - \frac{2}{n}, \frac{1}{2}\Big], \end{aligned}$$

et

$$CI(n) = \Big[0, \frac{1}{2}\Big] - I(n).$$

Si $n > 10^{400}$ et si $\alpha \overset{\omega}{\in} I(n)$, on a la majoration :

$$D_N(\alpha) \le \frac{N}{n} \quad (\textit{avec l'égalité atteinte au seul point } \alpha = \frac{1}{n}).$$

C'est l'extension annoncée de la proposition 1 (les notations $I(n)$ et $CI(n)$ désignent de nouveaux arcs - ceux définis aux propositions 1 et 2 n'ont plus d'intérêt maintenant).

On paramètre le voisinage du rationnel $\frac{p}{q}$ de $\mathcal{F}_n$ en posant $\alpha = \frac{p}{q} \pm \frac{t}{qn}$, et on commence par écrire :

$$\left|D_N(\alpha)\right| = \left|D_N\Big(\frac{p}{q}\Big)\right| + \left| \pm N\frac{t}{qn} - \Big(A_N\Big(\frac{p}{q} \pm \frac{t}{qn}\Big) - A_N\Big(\frac{p}{q}\Big)\Big)\right|.$$

Ensuite, pour chaque $\frac{p}{q}$, on considère les intervalles successifs pour t : $]0,1[, [1,2[, \ldots$ et on estime la ${}^{\omega}$valeur de $A_N(\frac{p}{q} \pm \frac{t}{qn}) - A_N(\frac{p}{q})$ en présentant les rationnels de $\mathcal{F}_n$ dans l'intervalle considéré. La majoration qui en découle mélange des termes en n et des termes en $\frac{N}{n}$; les premiers sont convertis par la relation $n \overset{\omega}{=} \frac{\pi^2}{3}\frac{N}{n}$: l'expression obtenue est de la forme $(\frac{t}{q} + \frac{a}{t} - b)\frac{N}{n}$ (pour reprendre la terminologie des explications données au paragraphe 2, l'utilisation des ${}^{\omega}$valeurs efface les dents de scie locales, et l'on ne "voit" plus que les festons). Il suffit alors de vérifier numériquement $|D_N(\alpha)| \overset{\omega}{\leq} N/n$ pour démontrer la partie de la proposition 4 relative à l'intervalle en t considéré. On constatera que les majorations sont, ou monotones, ou avec un minimum unique, de sorte que ce sont les majorations aux extrémités des intervalles qui déterminent la validité globale.

- **rationnel $\alpha = 0$, intervalles à droite** ($|D_N(0)| = 0$)
  intervalle $I =]0, \frac{1}{n}[$, soit $t \in]0,1[$
    aucun rationnel dans I donc $A_N(\frac{t}{n}) - A_N(0) = 0$
      (ici et pour toute cette vérification détaillée, " rationnel dans I " signifie " rationnel de $\mathcal{F}_n$ dans I ")
    majoration (en fait valeur exacte) $|D_N(\alpha)| = tN/n$ strictement croissante
  extrémité $\frac{1}{n}$: valeur $\frac{N}{n}$

  intervalle $I = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, soit $t \in [1,2[$
    rationnels de I : $\frac{1}{h}$, avec $n \geq h > \frac{n}{2}$
    donc $A_N(t/n) - A_N(0) \overset{\omega}{\leq} n - \frac{1}{\alpha} = (1 - \frac{1}{t})n$
    majoration $|D_N(\alpha)| \overset{\omega}{\leq} N\alpha + \frac{n}{t} - n \overset{\omega}{=} (t + \frac{\pi^2}{3t} - \frac{\pi^2}{3})\frac{N}{n}$
    minimum pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.813\,8\ldots$, valeur $0.337\,7\ldots\frac{N}{n}$
  extrémité $\frac{2}{n}$: valeur $0.355\,1\ldots\frac{N}{n}$

  intervalle $I = [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}[$, soit $t \in [2,3[$
    rationnels de I : $\frac{1}{h}$, avec $\frac{n}{2} \geq h > \frac{n}{3}$, et $\frac{2}{k}$, avec $n \geq k > \frac{2n}{3}$ (et $(2,k) = 1$)
    donc $A_N(\frac{t}{n}) - A_N(0) \overset{\omega}{=} n - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}(n - \frac{2}{\alpha}) = (\frac{3}{2} - \frac{2}{t})n$
    majoration $|D_N(\alpha)| \overset{\omega}{\leq} N\alpha + \frac{2n}{t} - \frac{3n}{2} \overset{\omega}{=} (t + \frac{2\pi^2}{3t} - \frac{\pi^2}{2})\frac{N}{n}$

minimum pour $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2.565\,1\ldots$, valeur $0.195\,4\ldots\frac{N}{n}$
extrémité $\frac{3}{n}$: valeur $0.258\,4\ldots\frac{N}{n}$

cas général intervalle $I = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, soit $t \in [k, k+1[$
rationnels de I : $\frac{1}{h_1}$ avec $\frac{n}{k} \geq h_1 > \frac{n}{k+1}$, $\frac{2}{h_2}$ avec $\frac{2n}{k} \geq h_2 > \frac{2n}{k+1}$ et $(2, h_2) = 1$, $\ldots$, $\frac{k}{h_k}$ avec $n \geq h_k > \frac{kn}{k+1}$ et $(k, h_k) = 1$
donc $A_N(\frac{t}{n}) - A_N(0) \stackrel{\omega}{=} \sum\limits_{a \leq k} \frac{\varphi(a)}{a}(n - \frac{a}{\alpha}) = B_k n - \frac{A_k}{\alpha} = (b_k - \frac{A_k}{t})n$
où $A_k = \sum\limits_{a \leq k} \varphi(a)$ et $b_k = \sum\limits_{a \leq k} \frac{\varphi(a)}{a}$
majoration $|D_N(\alpha)| \stackrel{\omega}{\leq} N\alpha + \frac{A_k n}{t} - B_k n \stackrel{\omega}{=} (t + \frac{A_k \pi^2}{3t} - \frac{b_k \pi^2}{3})\frac{N}{n}$

on peut ainsi réaliser un tableau de valeurs $(t, D(t))$, signifiant que $|D_N(\frac{t}{n})| \stackrel{\omega}{\leq} D(t)\frac{N}{n}$, en alternant extrémités (i.e. valeurs entières de t) et $^{\omega}$abscisses des minimums (les valeurs numériques seront données avec une précision absolue de 10^{-3}) :

t	1	1.814	2	2.565	3	3.628	4	4.443
$D(t)$	1	0.338	0.355	0.195	0.258	0.127	0.162	0.113
t	5	5.736	6	6.283	7	7.695	8	8.507
$D(t)$	0.175	0.067	0.078	0.065	0.138	0.069	0.081	0.049
t	9	9.598	10	10.260	11	11.754	12	12.301
$D(t)$	0.076	0.036	0.052	0.045	0.095	0.043	0.048	0.041
t	13	13.813	14	14.510	15			
$D(t)$	0.078	0.027	0.030	0.011	0.027			

on notera que, pour les valeurs de k qui nous intéressent, chaque feston possède toujours un minimum dans l'intervalle considéré (ce qui équivaut à constater que $\sum\limits_{a \leq k} \varphi(a)$ est toujours compris entre $\frac{3}{\pi^2}k^2$ et $\frac{3}{\pi^2}(k+1)^2$; mais cette propriété n'est pas générale (les premières “sorties” de l'intervalle $[k, k+1]$ sont $t = 819.981\,8$ pour $k = 820$, et $t = 1\,064.000\,1$ pour $k = 1\,063$).

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{6}$, intervalle à gauche** ($|D_N(\frac{1}{6})| \leq 0.000\,540n$)
intervalle $I =]\frac{1}{6} - \frac{1}{14n}, \frac{1}{6}[$, soit $t \in]0, \frac{3}{7}[$
cf l'intervalle symétrique à droite, la démonstration est “symétrique” et la majoration identique

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{6}$, intervalle à droite** ($|D_N(\frac{1}{6})| \leq 0.000\,540n$)
  intervalle $I =]\frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{1}{14n}[$, soit $t \in]0, \frac{3}{7}[$
  aucun rationnel dans I donc $A_N(\frac{1}{6} + \frac{t}{6n}) - A_N(\frac{1}{6}) = 0$
  majoration $|D_N(\frac{1}{6} + \frac{t}{6n})| \overset{\omega}{\leq} 0.000\,540n + \frac{tN}{6n} \overset{\omega}{=} (\frac{t}{6} + 0.001\,777)\frac{N}{n}$
  maximum pour $t = \frac{3}{7}$, valeur $0.073\,2 \ldots \frac{N}{n}$

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{5}$, intervalle à gauche** ($|D_N(\frac{1}{5})| \leq 0.000\,498n$)
  intervalle $I =]\frac{1}{5} - \frac{6}{35n}, \frac{1}{5}[$, soit $t \in]0, \frac{6}{7}[$
  cf l'intervalle symétrique à droite, la démonstration est "symétrique" et la majoration identique

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{5}$, intervalle à droite** ($|D_N(\frac{1}{5})| \leq 0.000\,498n$)
  intervalle $I =]\frac{1}{5}, \frac{1}{5} + \frac{6}{35n}[$, soit $t \in]0, \frac{6}{7}[$
  aucun rationnel dans I donc $A_N(\frac{1}{5} + \frac{t}{5n}) - A_N(\frac{1}{5}) = 0$
  majoration $|D_N(\frac{1}{5} + \frac{t}{5n})| \overset{\omega}{=} 0.000498n + \frac{tN}{5n} \overset{\omega}{\leq} (\frac{t}{5} + 0.001\,638)\frac{N}{n}$
  maximum pour $t = \frac{6}{7}$, valeur $0.173\,1 \ldots \frac{N}{n}$

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{4}$, intervalles à gauche** ($|D_N(\frac{1}{4})| \leq 0.000\,501n$)
  intervalles $I =]\frac{1}{4} - \frac{1}{4n}, \frac{1}{4}[$ et $I =]\frac{1}{4} - \frac{9}{28n}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}]$, soit $t \in]0, \frac{9}{7}[$
  cf les intervalles symétriques à droite, la démonstration est "symétrique" et la majoration identique

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{4}$, intervalles à droite** ($|D_N(\frac{1}{4})| \leq 0.000\,501n$)
  intervalle $I =]\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}[$, soit $t \in]0, 1[$
  aucun rationnel dans I donc $A_N(\frac{1}{4} + \frac{t}{4n}) - A_N(\frac{1}{4}) = 0$
  majoration $|D_N(\frac{1}{4} + \frac{t}{4n})| \overset{\omega}{\leq} 0.000\,501n + \frac{tN}{4n} \overset{\omega}{=} (\frac{t}{4} + 0.001\,648)\frac{N}{n}$
  maximum pour $t = 1$, valeur $0.251\,7 \ldots \frac{N}{n}$
  extrémité $\frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$: valeur $0.251\,7 \ldots \frac{N}{n}$
  intervalle $I = [\frac{1}{4} + \frac{1}{4n}, \frac{1}{4} + \frac{9}{28n}[$, soit $t \in [1, \frac{9}{7}[$
  rationnels de I : $\frac{h}{4h-1}$ avec $n \geq 4h - 1 > \frac{7n}{9}$
  donc $A_N(\frac{1}{4} + \frac{t}{4n}) - A_N(\frac{1}{4}) \overset{\omega}{=} \frac{n}{4}(1 - \frac{1}{t})$.
  majoration $|D_N(\frac{1}{4} + \frac{t}{4n})| \overset{\omega}{\leq} 0.000\,501n + \frac{tN}{4n} - \frac{n}{4}(1 - \frac{1}{t}) \overset{\omega}{=}$
  $(\frac{t}{4} + \frac{\pi^2}{12t} - \frac{\pi^2}{12} + 0.001\,648)\frac{N}{n}$
  maximum pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.813\,8 \cdots > \frac{9}{7}$
  extrémité $\frac{1}{4} + \frac{9}{28n}$: valeur $0.140\,3 \ldots \frac{N}{n}$

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{3}$, intervalles à gauche** ($|D_N(\frac{1}{3})| \leq 0.000\,437n$)
  intervalles $I =]\frac{1}{3} - \frac{1}{3n}, \frac{1}{3}[$ et $I =]\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3n}]$, soit $t \in]0, 2]$
  cf les intervalles symétriques à droite, la démonstration est "symétrique" et la majoration identique

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{3}$, intervalles à droite** ($|D_N(\frac{1}{3}) \leq 0.000\,437n$)

intervalle $I =]\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}[$, soit $t \in]0,1[$

aucun rationnel dans I donc $A_N(\frac{1}{3} + \frac{t}{3n}) - A_N(\frac{1}{3}) = 0$

majoration $|D_N(\frac{1}{3} + \frac{t}{3n})| \overset{\omega}{\leq} 0.000\,437n + \frac{tN}{3n} \overset{\omega}{=} (\frac{t}{3} + 0.001\,438)\frac{N}{n}$

maximum pour $t = 1$, valeur $0.334\,8 \ldots \frac{N}{n}$

extrémité $\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}$: valeur $0.334\,8 \ldots \frac{N}{n}$

intervalle $I = [\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3n}[$, soit $t \in [1, 2[$

rationnels de I : $\frac{h}{3h-1}$ avec $n \geq 3h - 1 > \frac{n}{2}$

donc $A_N(\frac{1}{3} + \frac{t}{3n}) - A_N(\frac{1}{3}) \overset{\omega}{=} \frac{n}{3}(1 - \frac{1}{t})$

majoration $|D_N(\frac{1}{3} + \frac{t}{3n})| \overset{\omega}{\leq} 0.000\,437n + \frac{tN}{3n} - \frac{n}{3}(1 - \frac{1}{t}) \overset{\omega}{=}$

$(\frac{t}{3} + \frac{\pi^2}{9t} - \frac{\pi^2}{9} + 0.001\,438)\frac{N}{n}$

minimum pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.813\,8 \ldots$, valeur $0.114\,2 \ldots \frac{N}{n}$

extrémité $\frac{1}{3} + \frac{2}{3n}$: valeur $0.119\,8 \ldots \frac{N}{n}$

- **rationnel $\alpha = \frac{2}{5}$, intervalles à gauche et à droite**

démonstration identique à celle pour les intervalles entourant $\alpha = \frac{1}{5}$, et donc majoration identique

- **rationnel $\alpha = \frac{1}{2}$, intervalles à gauche** ($|D_N(\frac{1}{2})| = 0$)

intervalle $I =]\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2}[$, soit $t \in]0,1[$

aucun rationnel dans I donc $A_N(\frac{1}{2} + \frac{t}{2n}) - A_N(\frac{1}{2}) = 0$

majoration (en fait valeur exacte) $|D_N(\frac{1}{2} + \frac{t}{2n})| = \frac{tN}{2n}$

maximum pour $t = 1$, valeur $0.5\frac{N}{n}$

extrémité $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$: valeur $0.5\frac{N}{n}$

intervalle $I =]\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}]$, soit $t \in [1, 2[$

rationnels de I : $\frac{h}{2h+1}$ avec $n = 2h + 1 > \frac{n}{2}$

donc $A_N(\frac{1}{2} - \frac{t}{2n}) - A_N(\frac{1}{2}) \overset{\omega}{\leq} -\frac{n}{2}(1 - \frac{1}{t})$.

majoration $|D_N(\frac{1}{2} - \frac{t}{2n}\,)| \overset{\omega}{\leq} \frac{tN}{2n} - \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{t}) \overset{\omega}{=} (\frac{t}{2} + \frac{\pi^2}{6t} - \frac{\pi^2}{6})\frac{N}{n}$

minimum pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.8138 \ldots$, valeur $0.168\,9 \ldots \frac{N}{n}$

extrémité $\frac{1}{2} - \frac{2}{2n}$: valeur $0.1775 \ldots \frac{N}{n}$

intervalle $I =]\frac{1}{2} - \frac{3}{2n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, soit $t \in [2, 3[$

rationnels de I : $\frac{h}{2h+1}$ avec $\frac{n}{2} = 2h + 1 > \frac{n}{3}$,

et $\frac{2k-1}{4k}$, avec $n \geq 4k > \frac{2n}{3}$

donc $A_N(\frac{1}{2} - \frac{t}{2n}) - A_N(\frac{1}{2}) \overset{\omega}{=} -\frac{n}{2}(\frac{3}{2} - \frac{2}{t})$

majoration $D_N(\frac{1}{2} - \frac{t}{2n})| \overset{\omega}{\leq} \frac{tN}{2n} - \frac{n}{2}(\frac{3}{2} - \frac{2}{t}) \overset{\omega}{=} (\frac{t}{2} + \frac{\pi^2}{3t} - \frac{\pi^2}{4})\frac{N}{n}$

minimum pour $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2.565\,1 \ldots$, valeur $0.097\,7 \ldots \frac{N}{n}$

extrémité $\frac{1}{2} - \frac{3}{2n}$: valeur $0.129\,2 \ldots \frac{N}{n}$

intervalle $I =]\frac{1}{2} - \frac{2}{n}, \frac{1}{2} - \frac{3}{2n}]$, soit $t \in [3,4[$
rationnels de I : $\frac{h}{2h+1}$ avec $\frac{n}{3} \geq 2h+1 > \frac{n}{4}$,
$\frac{2k-1}{4k}$, avec $\frac{2n}{3} \geq 4k > \frac{n}{4}$,
et $\frac{3l-2}{6l-1}, \frac{3l-1}{6l+1}$ avec $n \geq 6l \pm 1 > \frac{3n}{4}$
donc $A_N(\frac{1}{2} - \frac{t}{2n}) - A_N(\frac{1}{2}) \overset{\omega}{=} -\frac{n}{2}(\frac{13}{6} - \frac{4}{t})$
majoration $|D_N(\frac{1}{2} - \frac{t}{2n})| \overset{\omega}{\leq} \frac{tN}{2n} - \frac{n}{2}(\frac{13}{6} - \frac{4}{t}) \overset{\omega}{=} (\frac{t}{2} + \frac{2\pi^2}{3t} - \frac{13\pi^2}{36})\frac{N}{n}$
minimum pour $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3.627\,6\ldots$, valeur $0.063\,6\ldots\,\frac{N}{n}$
extrémité $\frac{1}{2} - \frac{4}{2n}$: valeur $0.080\,9\ldots\,\frac{N}{n}$

La démonstration de la proposition 4 est ainsi complète.

7. Extension de la majoration de $D_N(\alpha)$ sur les arcs mineurs.

Lemme 5. *On définit les intervalles et réunions d'intervalles suivants :*

$$\begin{aligned}
J_2(m) &= \Big[0, \frac{1}{2m}\Big],\\
J_3(m) &= \Big[0, \frac{2}{3m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{6m}, \frac{1}{2}\Big],\\
J_4(m) &= \Big[0, \frac{3}{4m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{3} - \frac{1}{12m}, \frac{1}{3} + \frac{1}{12m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{4m}, \frac{1}{2}\Big],\\
J_5(m) &= \Big[0, \frac{4}{5m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{4} - \frac{1}{20m}, \frac{1}{4} + \frac{1}{20m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{3} - \frac{2}{15m}, \frac{1}{3} + \frac{2}{15m}\Big]\\
&\quad \cup \Big[\frac{1}{2} - \frac{3}{10m}, \frac{1}{2}\Big],\\
J_6(m) &= \Big[0, \frac{5}{6m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{5} - \frac{1}{30m}, \frac{1}{5} + \frac{1}{30m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{4} - \frac{1}{12m}, \frac{1}{4} + \frac{1}{12m}\Big]\\
&\quad \cup \Big[\frac{1}{3} - \frac{1}{6m}, \frac{1}{3} + \frac{1}{6m}\Big] \cup \Big[\frac{2}{5} - \frac{1}{30m}, \frac{2}{5} + \frac{1}{30m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{2} - \frac{3}{3m}, \frac{1}{2}\Big],\\
J_7(m) &= \Big[0, \frac{6}{7m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{6} - \frac{1}{42m}, \frac{1}{6} + \frac{1}{42m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{5} - \frac{2}{35m}, \frac{1}{5} + \frac{2}{35m}\Big]\\
&\quad \cup \Big[\frac{1}{4} - \frac{3}{28m}, \frac{1}{4} + \frac{3}{28m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{3} - \frac{4}{21m}, \frac{1}{3} + \frac{4}{21m}\Big]\\
&\quad \cup \Big[\frac{2}{5} - \frac{2}{35m}, \frac{2}{5} + \frac{2}{35m}\Big] \cup \Big[\frac{1}{2} - \frac{5}{14m}, \frac{1}{2}\Big],
\end{aligned}$$

et

$$CJ_k(m) = \Big[0, \frac{1}{2}\Big] - J_k(m), \quad k = 2,3,4,5,6,7.$$

Si $n > 10^{400}$ et si $\alpha \overset{\omega}{\in} CJ_k(m)$, on a la ${}^{\omega}$majoration :

$$T_m(\alpha) \overset{\omega}{\leq} \frac{m}{2k}.$$

C'est l'extension du lemme 1. La démonstration s'appuie sur le comportement de $t_m(\alpha)$ au voisinage immédiat d'un rationnel $\frac{p}{q}$:

- si $|\delta| \leq \frac{1}{qm}$ et si $q \leq m^{3/8}$, on a $T_m(\frac{p}{q}+d) \overset{\omega}{=} \frac{m}{2q} - \frac{m^2}{2}|\delta|$,

et sur une formule de réciprocité dont la $^{\omega}$version est :

- soit $S = \sum_{k=1}^{m} < ka + b >$, on pose $m' \overset{\omega}{=} m\alpha$ et on définit $S' = \sum_{k=1}^{m'} <\frac{k}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}>$. Alors $|S + S'| \overset{\omega}{\leq} \frac{1}{8|\alpha|}$, formule qui se réduit à $|S+S'| \overset{\omega}{=} 0$ si $|\alpha| \overset{\omega}{\leq} m^{-1/4}$.

La première formule précise le pic au voisinage d'un rationnel $\frac{p}{q}$ de "petit" dénominateur, déterminant les $J_k(m)$ comme réunions d'intervalles $[\frac{p}{q} - \frac{k-q}{qkm}, \frac{p}{q} + \frac{k-q}{qkm}]$ pour $q \leq k-1$.

Comme précédemment, le détail de la démonstration, élémentaire mais longue et minutieuse, ne sera pas donné ici. Chaque majoration nécessite un découpage en intervalles *ad hoc* et l'utilisation, adaptée à chacun de ces intervalles, des majorations précédentes.

Un exemple en fera comprendre le principe : si la majoration $T_m(\alpha) \overset{\omega}{\leq} \frac{m}{4}$ a été démontrée pour $\alpha \overset{\omega}{\in} [\frac{1}{2m}, \frac{1}{2}]$, elle est bien évidemment valable pour $\alpha \overset{\omega}{\in} [\frac{5}{2}, 3 - \frac{1}{2m}]$, et l'application de la $^{\omega}$formule de réciprocité permet alors d'en déduire la majoration $T_m(\alpha) \overset{\omega}{\leq} \frac{m\alpha}{4} \leq \frac{m}{10}$ pour $\alpha \overset{\omega}{\in} [\frac{1}{3} - \frac{1}{6m}, \frac{2}{5}]$.

Proposition 5. *Si $n > 10^{400}$ et si $\alpha \overset{\omega}{\in} CI(n)$ (l'arc mineur $CI(n)$ ayant été défini à la proposition 4), on a la $^{\omega}$majoration suivante*

$$D_N(\alpha) \overset{\omega}{\leq} n\Big(0.085\,714\,3 + \frac{1}{2}\int_{10}^{\sqrt{n}} \frac{|M(t)+2|}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{H(t)}{t^2}dt\Big), \tag{3}$$

où $H(t)$ est une majoration monotone décroissante de $|M(t)+1|$.

C'est l'extension de la proposition 2. On écrit

$$\sum_{k\leq n} M\Big(\frac{n}{k}\Big) <k\alpha> = \sum_{n/2<k\leq n} <k\alpha> - \sum_{k\leq n/3} <k\alpha>$$
$$- \sum_{n/6<k\leq n/5} <k\alpha> - \sum_{k\leq n/7} <k\alpha> + \sum_{k\leq n/10} \Big(M\Big(\frac{n}{k}\Big) + 2\Big) <k\alpha>,$$

pour améliorer encore le recours à une intégrale du type $\int^{\infty} \frac{|M(t)+a|}{t^2}dt$. Les majorations des sommes $\sum <k\alpha>$ dépendent de la longueur de l'intervalle de sommation :

- $\sum_1 = \sum_{n/2<k\leq n} <k\alpha>$, longueur $\frac{n}{2}$: $CI(n) \subset CJ_7(\frac{n}{2})$

  donc $|\sum_1| \overset{\omega}{\leq} \frac{n}{28}$;

- $\sum_2 = \sum\limits_{k\le n/3} <k\alpha>$, longueur $\frac{n}{3}$: $CI(n) \subset CJ_7(\frac{n}{3})$

  donc $|\sum_2| \ {}^{\omega}\!\le \frac{n}{42}$;
- $\sum_3 = \sum\limits_{n/6<k\le n/5} <k\alpha>$, longueur $\frac{n}{30}$: $CI(n) \subset CJ_2(\frac{n}{30})$

  donc $|\sum_3| \ {}^{\omega}\!\le \frac{n}{120}$;
- $\sum_4 = \sum\limits_{k\le n/7} <k\alpha>$, longueur $\frac{n}{7}$: $CI(n) \subset CJ_4(\frac{n}{7})$

  donc $|\sum_4| \ {}^{\omega}\!\le \frac{n}{56}$.

La somme de ces majorations est $0.085\,714\,29\ldots n$.

La majoration du dernier terme $\sum\limits_{k\le n/10} \big(M(n/k)+2\big) <k\alpha>$ est similaire à celle effectuée dans la démonstration de la proposition 2, à deux différences près : d'une part l'intégrale de référence n'est plus $\int_5^\infty \frac{|M(t)+1|}{t^2}dt$ mais $\int_{10}^\infty \frac{|M(t)+2|}{t^2}dt$, et d'autre part la considération des ${}^{\omega}$valeurs a fait disparaître des termes négligeables.

La fin de la démonstration reprend les calculs du paragraphe 4.

Lemme 6. *On a la majoration de l'intégrale :*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{10}^\infty \frac{|M(t)+2|}{t^2}dt < \int_{10}^{10^{10}} \frac{|M(t)+2|}{t^2}dt + \int_{10^{10}}^\infty \frac{H(t)}{t^2}dt \\ &= 0.084\,490\,8 + 0.347\,768\,8 = 0.432\,259\,6. \end{aligned}$$

La démonstration s'effectue comme pour I_1 en décomposant

$$I_2 = \int_{10}^\infty \frac{|M(t)+2|}{t^2}dt < \int_{10}^{10^{10}} \frac{|M(t)+2|}{t^2}dt + \int_{10^{10}}^{10^{12}} \frac{H(t)}{t^2}dt + \cdots,$$

et l'ensemble des calculs est récapitulé dans le tableau abrégé ci-dessous.

intervalle	majoration $H(t)$	terme partiel de l'intégrale	sommation
$10, 10^{10}$	vraie valeur de l'intégrale	0.084 490 8	0.084 490 8
$10^{10}, 10^{12}$	$0.516\,198\sqrt{t}$	0.000 009 3	0.084 500 1
$10^{12}, \infty$	comme pour l'intégrale I_1	0.347 759 5	0.432 259 6

On peut alors conclure.

Proposition 6. *Pour $n > 10^{400}$ et $\alpha \ {}^{\omega}\!\in CI(n)$, on a :*

$$D_N(\alpha) < 0.301\,844\,1n \quad \textit{et} \quad R_N(\alpha) < \frac{0.993\,027\,3}{n}.$$

Bibliographie

[C-D-EM] H. Cohen, F. Dress et M. El Marraki, *Explicit estimates for summatory functions linked to the Möbius m-function.* Preprint A2X n° 96–7 (1996), soumis à Math. Comp.

[D] F. Dress, *Fonction sommatoire de la fonction de Möbius, 1. Majorations expérimentales.* Experimental Mathematics **2** (1993), 89–98.

[D-EM] F. Dress et M. El Marraki, *Fonction sommatoire de la fonction de Möbius, 2. Majorations asymptotiques élémentaires.* Experimental Mathematics **2** (1993), 99–112.

[EM] M. El Marraki, *Fonction sommatoire de la fonction de Möbius, 3. Majorations asymptotiques effectives.* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **7** (1995), 407–433.

[F] J. Franel, *Les suites de Farey et le problème des nombres premiers.* Göttingen Nachrichten (1924), 198–201.

[N] H. Niederreiter, *The distribution of Farey points.* Math. Ann. **201** (1973), 341–345.

François Dress
Arithmétique Algorithmique eXpérimentale (A2X),
UPRESA CNRS 5465,
Université Bordeaux 1,
F-33405 TALENCE cedex
E-mail : dress@math.u-bordeaux.fr