Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **12** (2000), 37–68

Séries de Engel et fractions continuées

par Pierre LIARDET et Pierre STAMBUL

Résumé. Le thème de ce travail est la conversion entre le développement en fraction continuée d'un nombre réel et son développement en série de Engel. Chacun d'eux peut se traduire en terme de produits matriciels, produits qui sont à l'origine d'algorithmes, exprimés sous la forme de transducteurs, permettant de calculer un des développements à partir de l'autre. Cette méthode fournit des résultats nouveaux sur les nombres de Lucas, les nombres de Fredholm et sur toute une variété de nombres transcendants, à quotients partiels bornés ou non.

Abstract. Relations between continued fraction expansion and Engel's series of a real number are investigated. Product of matrices corresponding to these expansions leads to transducers which convert the continued fraction expansion of any irrational number to its Engel's series and reciprocally. Finally, new results about Lucas numbers, Fredholm numbers and various transcendental numbers with bounded or unbounded partial quotients are obtained.

1. Introduction

Tout nombre réel de l'intervalle unité $]0,1]$ admet un développement unique sous la forme d'une série de Engel, à savoir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1(x)\dots a_n(x)} \tag{1}$$

où les $a_i(x)$ sont des entiers tels que $a_1 \geq 2$ et $a_{i+1} \geq a_i$ pour tout indice $i \geq 1$ (voir O. Perron [Pe], E. Borel [Bo] et P. Erdös [E-R-S] pour plus de détails). Ce développement sera représenté dans la suite par $x =]a_1, a_2, a_3, \dots[$,

Manuscrit reçu le 3 août 1999.

ceci par analogie avec celui des fractions continuées régulières

$$x = [0; c_1, c_2, c_3, \dots] = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \cdot \tag{2}$$

Ce travail fait suite à une étude générale effectuée par les auteurs dans [Li-St]. Elle concerne le calcul algébrique, sur les fractions continuées, aux moyens d'algorithmes basés sur une notion de transducteurs qui sera largement utilisée ici. Notre premier objectif consistera à déterminer de tels algorithmes permettant de passer du développement en fraction continuée (DFC) à celui de Engel (DE) et réciproquement. Ceux-ci seront donc décrits aux moyens de transducteurs sur un ensemble infini d'états. Il existe déjà dans la littérature des nombres dont les DFC et DE sont connus explicitement. Ce sont, par exemple, les nombres quadratiques, appelés ici nombres de Lucas, $r(p) := \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4})$ avec p entier ≥ 3, pour lesquels on a

$$r(p) = [0; p-1, 1, p-2, 1, p-2, 1, p-2, \dots] =]a_1, a_2, a_3, \dots[$$

où $a_1 = p$ et $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ pour tout entier $n \geq 1$ (cf. [Si], [Lu]). La démonstration de cette formule est rappelée dans la section 3.2. Il était donc naturel, dans un premier temps, d'examiner de près la suite des états apparaissant pendant l'exécution de nos algorithmes. Cela nous donnera l'occasion de retrouver et d'améliorer des résultats connus de E. Lucas [Lu], W. Sierpiński [Si] et J. Tamura [Ta] en utilisant une méthode tout à fait différente.

Les nombres $f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} n^{-2^i}$, n entier ≥ 2, dits de Fredholm, sont particulièrement remarquables. Ils ont un développement de Engel immédiat, à savoir $]n, n, n^2, \dots, n^{2^{k-2}}, \dots[$ $(a_k = n^{2^{k-2}},\ k \geq 2)$, sont transcendants et leur DFC est à quotients partiels bornés. Ce dernier résultat est la conséquence d'un théorème général obtenu indépendamment par J. O. Shallit [Sh2] et M. Kmošet [Kmo]. Comme l'ont montré A. Blanchard et M. Mendès France [Bl-Me], le DFC de $f(n)$ s'obtient par composition d'opérateurs de symétries perturbées opérant sur les mots d'un alphabet fini (voir aussi [A-L-M-P-S] et [De-Po-Me]). Donnons le DFC de $2f(2) - 1$, dû à A. J. Van der Poorten [VdP], afin d'illustrer les mécanismes mis en jeu. Dans ce but, introduisons quelques notations et conventions utiles. Une suite finie $x = (x_1, \dots, x_m)$, à coefficients dans un ensemble donné, appelé alphabet, sera souvent identifiée avec le mot $x_1 \dots x_m$ et si $y = (y_1, \dots, y_n)$ est une autre suite finie, la concaténée de x suivie de y sera par définition la suite finie $xy = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. La suite (ou mot) vide sera notée

$\wedge$. L'alphabet n'est pas supposé être fini. Lorsqu'il est égal à $\mathbf{N}$, les opérations usuelles sur cet alphabet pourraient donner lieu à des ambiguïtés dans l'écriture d'un mot ; en général le contexte ne prêtera pas à confusion mais, si nécessaire, les crochets seront utilisés pour indiquer les lettres constituantes du mot. Par exemple, la suite $(2(m+1), b)$ sera représentée par le mot $[2(m+1)]b$ tandis que le mot $2[m+1]b$ désignera la suite $(2, m+1, b)$.

Pour toute suite finie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$, définissons l'opérateur S_a qui à toute suite (finie) $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ associe la suite

$$S_a(b) = ba\overleftarrow{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_s, b_m, \ldots, b_2, b_1).$$

La suite $S_a^n(b)$, obtenue en itérant S_a n fois, est formée de $2^n m + (2^n - 1)s$ lettres et se prolonge par $S_a^{n+1}(b)$. En itérant S_a une infinité de fois, on détermine alors une suite infinie $S_a^\infty(b)$ dont les $2^n m + (2^n - 1)s$ premiers termes coïncidents avec $S_a^n(b)$. Avec ces définitions,

$$2f(2) - 1 =]2, 4, 16, \ldots, 2^{2^{n-1}}, \ldots[= [0; 1, 1, 1, S_a^\infty(b)]$$

où $a = (1, 1, 1, 1, 2, 1)$ et $b = (2, 1, 1, 1)$. Nous retrouverons ce type de résultat, sous une autre forme et par une autre méthode, utilisant le transducteur qui calcule le DFC à partir du DE correspondant. Par exemple, soit $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $r_1 = 3$ et $r_{n+1} = 2^{2^n}(r_n - 2) + 1$. Si $g_n = (g_n^1, \ldots, g_n^{k_n})$, pour $n \geq 2$, désigne la suite des quotients partiels du DFC de $\frac{2^{2^n-1}+r_n}{2^{2^n-1}}$ qui se termine par 1, alors

$$2f(2) - 1 = [0; 1, 1, 1, 2, g_1^1, \ldots, g_1^{k_1}, g_2^1, \ldots, g_2^{k_2}, g_3^1, \ldots, g_3^{k_3}, \ldots].$$

Cette écriture est très différente de celle obtenue par la symétrie perturbée. Un fait important à noter est que, dans les exemples précédents, les sommes partielles du DE sont des réduites du DFC.

Nous commençons, dans la section 2, par quelques rappels utiles sur les développements en fractions continuées et les développements de Engel, ainsi que les relations matricielles qui leur sont naturellement associées. Elles sont à l'origine de nos algorithmes. La section 3 décrit le transducteur $\mathcal{T}_E$ qui permet de passer du DFC au DE : si $x = [0; c_1, c_2, c_3, \ldots] =]a_1, a_2, a_3, \ldots[$, alors il existe une suite croissante non bornée d'entiers k_n tels que si le transducteur $\mathcal{T}_E$ prend en entrée le mot $c_1 \cdots c_n$, il donne en sortie le mot $a_1 \cdots a_{k_n}$. La section 4 est consacrée à la détermination des états successifs de $\mathcal{T}_E$ dans le cas des nombres de Lucas.

L'algorithme de passage du DE au DFC est le plus riche en applications, il est développé dans la section 5 sous la forme d'un transducteur $\mathcal{T}_F$ et, section 6, nous revenons sur les nombres de Lucas pour déterminer les états du transducteur lors du passage du DE au DFC. La fin de l'article mène au calcul explicite de diverses familles de nombres transcendants (à quotients partiels bornés ou non), définis à partir de leur DE ou de leur DFC.

On découvre ainsi les nombres "pseudo-Lucas", appelés ainsi à cause des analogies observées avec les nombres de Lucas. Plus exactement, les quotients partiels du DE de ces nombres satisfont à la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n^2 + ma_n - 1$ (m paramètre entier, cf. (6.2)). Ils sont d'ordre d'approximation rationnelle égale à 3. D'autre part, nous étudions des nombres de DE $x =]a_1, a_2, a_3, \dots[$ tel que le produit $a_1 a_2 \dots a_n$ divise a_{n+1} pour tout entier $n \geq 1$. Cette famille contient aussi bien celle des nombres de Fredholm que celle des nombres de Liouville étudiée par J. O. Shallit [Sh3]. Enfin, à la section 8, nous calculons, par une méthode analogue, le DE de nombres dont le DFC est donné par une duplication perturbée. On obtient, en particulier, de nouveaux nombres transcendants à quotients partiels bornés dont on calcule le développement de Engel.

2. Dévéloppement de Engel d'une fraction continuée

2.1. *Le développement en fraction continuée* est étroitement lié à la transformation de Gauss

$$T : [0, 1] \to [0, 1]$$

définie par $T(0) := 0$ et, pour $0 < x \leq 1$, $T(x) := \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ (où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel t). Dans la suite, nous notons ∞ le point de compactification à l'infini de $[0, +\infty[$ et adoptons pour ∞ les règles opératoires d'usage, à savoir : $x + \infty = \infty + x = \infty$ pour tout $x \in [0, \infty]$, $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$. De plus, on pose $\lfloor \infty \rfloor = \infty$. Pour a, b dans $[0, \infty]$, définissons $[a; b] := a + \frac{1}{b}$ de sorte que T est aussi déterminé par la relation

$$x = [0; c(x) + T(x)]$$

avec $c(x) := \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ pour $0 < x \leq 1$ et $c(0) := \infty$. Introduisons les applications $c_n := c_1 \circ T^{n-1}$, $(c_1(\cdot) := c(\cdot))$. Par itérations successives, $x = [0; [c_1(x); [c_2(x); \dots ; [c_n(x) + T^n(x)] \dots]]]$, ce que nous écrivons sous la forme simplifiée

$$x = [0; c_1(x), \dots, c_n(x) + T^n(x)]. \tag{3}$$

Lorsque x est irrationnel, le passage à la limite dans (3) donne le DFC de x que nous explicitons en posant $DFC(x) := [0; c_1, c_2, c_3, \dots]$. Lorsque x est un nombre rationnel r, il existe un premier entier $n \geq 1$ tel que $T^n(r) = 0$ et (3) donne la forme dite normale du développement de r :

$$r = [0; c_1, \dots, c_n] \ (= [0; c_1, \dots, c_n, \infty, \infty, \dots]),$$

avec $c_i = c_i(r)$ et $c_n \geq 2$. Rappelons que r admet un second développement, dit impropre :

$$r = [0; c_1, \dots, c_{n-1}, c_n - 1, 1].$$

Le développement (3) se prolonge sans difficulté à tout nombre réel x en remplaçant 0, dans le second membre de l'égalité (3), par $\lfloor x \rfloor$. D'autre part, si $(g_n) = [g_n^1; g_n^2, \dots, g_n^{k_n}]$ représente un DFC d'un nombre rationnel $r_n \geq 1$ $(n \geq 1)$, nous noterons $[0; (g_1), (g_2), \dots]$ le DFC de

$$x = [0; [r_1; [r_2; \dots [r_n; \dots] \dots]]].$$

Dans la suite, (g_n) sera désigné comme étant le mot des quotients partiels de r_n (sous forme normale ou impropre, selon les cas). Par extension, si (g_n), pour $n \geq n_0$, est donnée par une expression explicite $g(n)$ en fonction de n, on notera le développement de x par

$$x = [0; (g_1) \dots, (g_{n_0-1}), \overline{g(n)}]_{n_0}^{\infty}.$$

Le même type de notation sera adopté pour les développements de Engel, comme par exemple, dans la formule classique $e - 2 =]\overline{n}[_2^{\infty}$.

Par définition, la n-ième réduite de $x = [0; c_1, c_2, \dots]$ est le nombre rationnel $[0; c_1, \dots c_n]$. Il sera représenté sous la forme irréductible $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$, où numérateur et dénominateur satisfont aux mêmes relations de récurrence, avantageusement résumées sous la forme du produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dans la suite, nous poserons pour simplifier $\Pi_\alpha := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ et plus généralement pour tout mot $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in \mathbf{R}$, nous noterons

$$\Pi_w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & w_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & w_n \end{pmatrix}.$$

Il sera utile d'interpréter les égalités précédentes par des homographies. Dans ce but, à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{GL_2(R)}$, associons la transformée de Möbius définie sur $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ par

$$[A](x) := \frac{ax+b}{cx+d} \text{ si } x \neq \infty \text{ et } x \neq -\frac{d}{c}; \quad [A](\infty) := \frac{a}{c}; \quad [A](-\frac{d}{c}) := \infty$$

avec les règles opératoires usuelles sur ∞. Classiquement $A \mapsto [A]$ est un morphisme de groupes. En outre,

$$\frac{1}{[A](x)} = [A_*](\frac{1}{x})$$

où A_* est la bitransposée de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $A_* = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. Les relations (3) et (4) montrent en particulier que pour tout $t \in [0, \infty]$,

$$[\Pi_{c_1 \dots c_n}](t) = \frac{p_{n-1}t + p_n}{q_{n-1}t + q_n} = [0; c_1, c_2, \dots, c_n + t]. \tag{5}$$

Pour $x = [0; c_1, c_2, \dots]$ irrationnel et pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$I_n(x) := [\Pi_{c_1 \dots c_n}]([0, \infty]).$$

De $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$, on déduit que $I_n(x) = [\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}]$ si n est impair et $I_n(x) = [\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}]$ si n est pair.

2.2. *Le développement en série de Engel* est relié à la transformation

$$S :]0,1] \to]0,1]$$

définie par

$$S(x) := a(x)x - 1 \quad \text{avec} \quad a(x) := \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor + 1\,,$$

ce qui fournit le début du DE de x puisque

$$x = \frac{1}{a(x)} + \frac{S(x)}{a(x)}.$$

Par itération et en posant $a_n(x) := a(S^{n-1}(x))$, il vient

$$x = \frac{1}{a_1(x)} + \frac{1}{a_1(x)a_2(x)} + \cdots + \frac{1}{a_1(x)\ldots a_n(x)} + \frac{S^n(x)}{a_1(x)\ldots a_n(x)}. \tag{6}$$

Notons que S a pour points fixes les nombres rationnels $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, ce qui conduit à prolonger S en 0 par $S(0) = 0$. En outre, $S(x) < x$ en dehors de ses points fixes de sorte que la suite des entiers $a_n(x)$ est croissante ; elle n'est pas ultimement stationnaire si x est irrationnel. Si $x = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers tels que $1 < p < q$, un calcul immédiat donne $S(\frac{p}{q}) = \frac{p'}{q}$ avec $0 < p' < p$. Il en résulte qu'il existe un diviseur $d > 1$ de q et un plus petit entier k ($1 \leq k < p$) tel que $S^k(\frac{p}{q}) = \frac{1}{d}$, d'où le double développement de x, l'un infini obtenu par S et l'autre, fini, obtenu par sommation du premier :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1\ldots a_k} + \frac{1}{a_1\ldots a_k}\Big(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \cdots + \frac{1}{d^n} + \ldots\Big) \\ &= \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1\ldots a_k} + \frac{1}{a_1\ldots a_k(d-1)} \end{aligned}$$

avec $a_k < d$. En symboles

$$x = \,]a_1, \ldots, a_k, d, d, d, \ldots[\, = \,]a_1, \ldots, a_k, d-1, \infty, \infty, \infty, \ldots[. \tag{7}$$

Supposons maintenant $x =]a_1, a_2, \ldots[$ irrationnel. L'entier a_n est appelé quotient partiel de Engel d'ordre n et la n-ième réduite (de Engel) sera par définition

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1\ldots a_n} \tag{8}$$

avec $v_n = a_1 \ldots a_n$ (u_n est donc un entier, qui n'est pas nécessairement premier à v_n). Les suites (u_n) et (v_n) sont aussi données par le produit matriciel

$$(9) \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & u_n\\ 0 & v_n\end{pmatrix}.$$

Introduisons les définitions $U_a := \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ et $U_{a_1\dots a_n} := U_{a_1}\dots U_{a_n}$. Les relations (6) et (9) se traduisent par

$$x = [U_{a_1\dots a_n}](S^n(x))$$

et conduisent à la relation

$$(10) \qquad [U_{a_1\dots a_n}](t) =]a_1,\dots,a_n,\frac{1}{t}[.$$

L'intervalle fondamental de $x =]a_1, a_2, \dots[$ d'ordre n est défini par

$$J_n(x) = [U_{a_1\dots a_n}]([0,\frac{1}{a_n-1}]) = [\frac{u_n}{v_n}, \frac{u_n}{v_n} + \frac{1}{v_n(a_n-1)}].$$

Par construction, si $y \in J_n(x)$, alors $a_k(x) = a_k(y)$ pour tout $k = 1,\dots,n$. Les relations de définition de S et T peuvent se regrouper sous la forme

$$(11) \qquad x = [\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & c(x)\end{pmatrix}]T(x) = [\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a(x)\end{pmatrix}]S(x) \quad \text{avec} \quad a(x) = c(x)+1$$

relation qui conduit à introduire l'égalité matricielle

$$(12) \qquad \frac{1}{c+1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & c+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & c\end{pmatrix}, \quad c \neq -1\,.$$

Celle-ci jouera par la suite un rôle essentiel avec $c = c(x)$.

3. Calcul de DE(x) en fonction de DFC(x)

3.1. *Produits de matrices.* La détermination de $\mathrm{DE}(x) =]a_1, a_2, \dots[$ à partir de $\mathrm{DFC}(x) = [0; c_1, c_2, \dots]$ repose sur une idée simple. Le nombre irrationnel x est déterminé par la suite des intervalles emboîtés $I_n(x)$ et l'on a $I_2(x) \subset J_1(x) \subset I_1(x) = [0, \frac{1}{c_1}]$. Alors, pour tout $n \geq 2$, il existe un plus grand entier k_n tel que $I_n(x)$ soit contenu dans $J_{k_n}(x)$. Il est clair que $\lim_n k_n = \infty$. La relation

$$x = [U_{a_1\dots a_{k_n}}](S_{k_n}(x)) = [\Pi_{c_1\dots c_n}](T^n(x))$$

conduit à introduire l'homographie H_n définie par

$$[U_{a_1\dots a_{k_n}}] \circ H_n = [\Pi_{c_1\dots c_n}]$$

de sorte qu'en fait $H_n(T^n(\zeta)) = S_{k_n}(\zeta)$, pour tout $\zeta \in \Pi_{c_1\cdots c_n}([0,1])$. Introduisons la matrice B_n telle que

$$(13) \qquad \frac{1}{a_1\dots a_{k_n}} U_{a_1\dots a_{k_n}} B_n = \Pi_{c_1\dots c_n}, \quad (n \geq 2).$$

Un calcul direct montre que B_n est à coefficients entiers, de déterminant $(-1)^n a_1 \dots a_{k_n}$ et que $H_n = [B_n]$. De plus l'inclusion $I_n(x) \subset J_{k_n}(x)$ implique

$$H_n([0,\infty]) \subset]0, \frac{1}{a_{k_n} - 1}]$$

ainsi que les coefficients de B_n de même signe. D'après (13) et (9), ce signe est positif.

Le transducteur déterminant le DE d'un nombre à partir de son DFC est basé sur la double factorisation (13) que nous examinons maintenant de manière intrinsèque. Dans ce but, introduisons l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices 2×2 régulières à coefficients entiers ≥ 0 et soit $\mathcal{D}$ (respectivement $\mathcal{D}'$) l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}$ telles que $u' \leq u$ et $v' \leq v$ (respectivement $u' \geq u$ et $v' \geq v$). Les trois ensembles $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et $\mathcal{E} = \mathcal{M} \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}')$ forment une partition de $\mathcal{M}$. Une matrice A de $\mathcal{M}$ est donc dans $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) si, et seulement si, $[A]([0,\infty]) \subset [0,1]$ (resp. $[A]([0,\infty]) \subset [1,\infty]$), tandis que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si 1 est intérieur à l'intervalle $[A]([0,\infty])$ (ou encore, si $(a-c)(b-d) < 0$). Une conséquence immédiate est que pour tout $D \in \mathcal{D}$ et $M \in \mathcal{M}$ on a $DM \in \mathcal{D}$. Notons aussi que l'opérateur de bitransposition $A \mapsto A_*$ échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et laisse $\mathcal{E}$ invariant.

Rappelons que toute matrice $A = \begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{D}$ se factorise de manière unique sous la forme

$$(F) \qquad A = \Pi_{c_1 \dots c_n} B$$

avec $c_1, \dots c_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $B \in \mathcal{E}$. On trouvera dans [Li-St] une étude plus générale sur ce type de factorisation ; ici, c'est la version "bitransposée" du lemme 4 dans [Li-St] qui est utilisée. En particulier, la relation (F) avec $B \in \mathcal{E}$ entraîne que les $n-1$ premiers quotients partiels de $\frac{u'}{u}$ et $\frac{v'}{v}$ sont $c_1, \dots, c_{n-1}$ et le suivant est $\geq c_n$. Si $n \geq 2$ dans (F), la matrice $A' = \Pi_{c_2 \dots c_n} B$ est encore dans $\mathcal{D}$.

Complétons la relation (12) par les inclusions

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \mathcal{D} \subset \bigcup_{m \geq c} \Pi_m \mathcal{M} \subset \mathcal{D}\,.$$

vraies pour tout entier $c \geq 1$, et les égalités matricielles

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma - c\alpha & \delta - c\beta \\ \alpha & \beta\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c+1}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & c+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(c+1)\alpha - \gamma & (c+1)\beta - \delta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

Cette factorisation nous conduit à introduire l'ensemble Δ des matrices A de $\mathcal{D}$ qui admettent une factorisation (F) avec $n \geq 2$. On notera A' la matrice définie par la factorisation partielle résultant de (F) :

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & a_1\end{pmatrix} A'. \tag{F'}$$

Remarquons que $A' \in \mathcal{D}$ puisque $A \in \Delta$.

Nous sommes en mesure de préciser la matrice B_n de l'égalité (13) :

$$B_n \in \mathcal{D} \setminus \Delta\,.$$

En fait, B_n est dans $\mathcal{M}$; son appartenance à $\mathcal{D}$ vient de l'inclusion $[B_n]([0,\infty]) \subset [0, \frac{1}{a_{k_n}-1}]$ de sorte que si $B_n \in \Delta$, on a la factorisation $B_n = \Pi_c B'_n$ avec $c \geq a_{k_n} - 1$ et $B'_n \in \mathcal{D}$. Puis, par (12) et (14), on peut écrire $B_n = \frac{1}{c+1} U_{c+1} B''_n$ avec $B''_n \in \mathcal{D}$, ce qui est contraire au choix optimal de k_n puisque dans ces conditions, $[B''_n]([0,\infty]) \subset [0, \frac{1}{c}]$ et donc

$$\begin{aligned}I_n(x) = \Pi_{c_1\cdots c_n}([0,\infty]) &\subset [U_{a_1\cdots a_{k_n}(c+1)}]([0, \frac{1}{c}])) \\ &= J_{a_1\cdots a_{k_n}(c+1)}(x).\end{aligned}$$

Le lemme suivant donne deux caractérisations pratiques des éléments de Δ.

Lemme 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \in \Delta$ *;*
(ii) $\exists A' \in \mathcal{D},\ \exists a \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ A = \Pi_a A'$ *;*
(iii) $\alpha\beta \neq 0$ *et il existe un entier* $a \geq 1$ *tel que soit* $\lfloor \frac{\gamma}{\alpha} \rfloor = \lfloor \frac{\delta}{\beta} \rfloor = a$, *soit* $\lfloor \frac{\delta}{\beta} \rfloor = a$ *et* $\gamma = (a+1)\alpha$, *soit* $\lfloor \frac{\gamma}{\alpha} \rfloor = a$ *et* $\delta = (a+1)\beta$.

La démonstration est élémentaire. Donnons maintenant une généralisation de (13).

Lemme 2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *dans* Δ.

(a) *Il existe un entier* $n \geq 1$*, des matrices* $B_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{D}$ *et des entiers* a_k*, pour* $k = 1, \dots, n$*, tels que*

$$(P) \qquad A = \frac{1}{a_1 \dots a_k} U_{a_1 \dots a_k} B_k$$

et qui satisfont aux conditions suivantes :

(j) $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *;*

(jj) *avec* $\alpha_0 = \alpha$ *et* $\beta_0 = \beta$*, on a :*

$$\alpha_{k-1} \geq \alpha_k, \quad \beta_{k-1} \geq \beta_k, \quad \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} \neq \alpha_k + \beta_k \neq 0,$$

pour tout $k = 1, \dots, n$ *;*

(jjj) $B_n \notin \Delta$*. En particulier* $B_n([0, \infty]) \subset [0, \frac{1}{a_n - 1}]$.

(b) *Les factorisations (P), dont l'existence est affirmée dans* (a)*, avec les conditions* (j), (jj) *et* (jjj)*, sont uniques. En outre*

$$a_r = 1 + \min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha_{r-1}} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta_{r-1}} \rfloor\} \quad (1 \leq r \leq n).$$

Démonstration.

(a) - Par hypothèse, on a $A = \Pi_q A'$ avec $q = \min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta} \rfloor\}$ et $A' \in \mathcal{D}$. D'après (12) et (15),

$$A = \frac{1}{q+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & q+1 \end{pmatrix} B_1$$

avec $B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & q \end{pmatrix} A' \in \mathcal{D}$ et $\alpha + \beta > \alpha_1 + \beta_1 > 0$. D'après (14) $B_1 = \Pi_{q'} M$ avec $q' \geq q$ et $M \in \mathcal{M}$. Si de plus B_1 appartient à Δ, on a $M \in \mathcal{D}$ ce qui permet d'itérer la factorisation précédente sur B_1. On construit ainsi une suite finie croissante d'entiers $1 \leq q_1 \leq \cdots \leq q_p$ et des matrices $B_r = \begin{pmatrix} \alpha_r & \beta_r \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $(r = 0, \dots, p)$, telles que pour $0 \leq r < p$, on ait

$$B_0 = A, \quad B_r \in \Delta, \quad \alpha \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_p, \quad \beta \geq \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_p$$

et, puisque $B_r \neq B_{r+1}$,

$$\alpha + \beta > \alpha_1 + \beta_1 > \cdots > \alpha_p + \beta_p > 0.$$

Ces inégalités majorent p en fonction de A uniquement, ce qui montre qu'il existe un unique entier p, disons n, tel que $B_n \in \mathcal{D} \setminus \Delta$ et $B_k \in \mathcal{D}$ pour

$0 \leq k < n$. D'autre part, la construction des B_r donne

$$A = \frac{1}{(q_1+1)\dots(q_r+1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & q_1+1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & q_r+1 \end{pmatrix} B_r \tag{16}$$

pour tout $r = 1, \dots, n$.

(b) - Démontrons l'unicité des factorisations (P). Notons tout d'abord que les q_r construits ci-dessus sont donnés par

$$q_r = \min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha_{r-1}} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta_{r-1}} \rfloor\}$$

(et $\alpha_r = (q_r+1)\alpha_{r-1} - \gamma$, $\beta_r = (q_r+1)\beta_{r-1} - \delta$). Supposons maintenant qu'à l'étape r on factorise B_r $(\in \Delta)$ sous la forme $B_r = \frac{1}{q+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & q+1 \end{pmatrix} B'_r$, avec $B'_r = \begin{pmatrix} \alpha'_r & \beta'_r \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$. Un calcul simple montre que si $q < \min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha_r} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta_r} \rfloor\}$, alors $B'_r \notin \mathcal{M}$. Et si $q > \min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha_r} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta_r} \rfloor\}$, alors $\alpha_r + \beta_r < \alpha'_r + \beta'_r$, ce qui est exclu par (jj). L'unicité de la factorisation de A en résulte. $\square$

3.2. *Transducteurs.* Nous appellerons transducteur tout quintuplet $\mathcal{T} = (\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \Phi, \Psi)$ où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des ensembles au plus dénombrables, appelés respectivement alphabet d'entrée et alphabet de sortie. $\mathcal{B}$ est un ensemble, fini ou pas, dont les éléments sont dits les états de $\mathcal{T}$. Enfin $\Phi = \{\varphi_c\,;\, c \in \mathcal{C}\}$ et $\Psi = \{\psi_c\,;\, c \in \mathcal{C}\}$ sont des familles d'applications, respectivement $\varphi_c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ et $\psi_c : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, appelées instructions de transition et de sortie. à tout mot $c_1 \dots c_n$ sur l'alphabet $\mathcal{C}$ et à tout état initial B_0, le transducteur fait correspondre une suite d'états B_0, $B_1 = \varphi_{c_1}(B_0)$, $\dots$,$B_n = \varphi_{c_n}(B_{n-1})$ et un mot de sortie $\psi_{c_1}(B_0) \dots \psi_{c_n}(B_{n-1})$. Cette définition n'est pas usuelle, mais elle sera particulièrement bien adaptée pour décrire nos algorithmes.

Définissons maintenant le transducteur $\mathcal{T}_E = (\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \Phi, \Psi)$ qui permet de passer du DFC au DE. Les alphabets $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$, sont donnés par $\mathcal{C} := \mathbf{N} \backslash \{0\}$ et $\mathcal{A} := \mathbf{N} \backslash \{0, 1\}$. L'espace des états de $\mathcal{T}_E$ est l'ensemble $\mathcal{B} = (\mathcal{D} \backslash \Delta) \cup \{I_0\}$ où $I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'état initial. Les familles d'instructions Φ et Ψ sont définies de la manière suivante : soit $B \in \mathcal{B}$, $c \in \mathcal{C}$ et $A = B\Pi_c$, alors :

– si $A \notin \Delta$, on pose $\varphi_c(B) := A$ et $\psi_c(B) := \wedge$;

– si $A \in \Delta$, par le lemme 2, $A = \frac{1}{a_1 \dots a_p} U_{a_1 \dots a_p} B_p$ avec unicité de la factorisation. On définit alors $\varphi_c(B) := B_p$ et $\psi_c(B) := a_1 \dots a_p$.

Théorème 1. *Soit x un nombre irrationnel dans $[0,1]$, de développement en fraction continuée $[0; c_1, c_2, \ldots]$. Le développement de Engel de x est alors calculé par le transducteur $\mathcal{T}_E$. Plus précisément, pour tout $n \geq 2$, le mot $\mathcal{T}_E(c_1 \ldots c_n) = a_1 a_2 \ldots a_{k_n}$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$ vérifie*

$$x =]a_1, \ldots a_{k_n}, \frac{1}{S^{k_n}(x)}[,$$

la suite des entiers k_n étant croissante (au sens large) et non bornée.

Démonstration. Pour $n = 1$, on a $\varphi_{c_1}(I_0) = \Pi_{c_1}$ et $\psi_{c_1}(I_0) = \wedge$; mais pour $n = 2$, $\varphi_{c_2} \circ \varphi_{c_1}(I_0) \in \Delta$ et la factorisation (P) montre que pour un entier $p_1 \geq 1$

$$\Pi_{c_1 c_2} = \frac{1}{a_1 \ldots a_{p_1}} U_{a_1 \ldots a_{p_1}} B^{(1)}. \tag{17}$$

$\varphi_{c_2} \circ \varphi_{c_1}(I_0) = B^{(1)}$ et $[B^{(1)}](T^2(x)) = S^{p_1}(x)$. D'où $\mathcal{T}_E(c_1 c_2) = a_1 \ldots a_{p_1}$. Supposons maintenant que $\mathcal{T}_E(c_1 \ldots x c_n) = a_1 \ldots a_s$ (en posant $s = k_n$ pour simplifier), le transducteur étant dans l'état $B = \begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$. Par hypothèse de récurrence

$$\Pi_{c_1 \ldots c_n} = \frac{1}{a_1 \ldots a_s} U_{a_1 \ldots a_s} B$$

avec $a_s - 1 \leq \min\{\lfloor \frac{u}{u'} \rfloor, \lfloor \frac{v}{v'} \rfloor\}$ et $[B](T^n(x)) = S^s(x)$. D'après [Li-St], théorème 2, il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tous entiers $d_1, \ldots, d_k \geq 1$, on ait

$$B \Pi_{d_1 \ldots d_k} \in \Delta.$$

Il existe donc un plus petit entier $p \geq 0$ tel que $p \leq k$ et

$$A = B \Pi_{c_{n+1} \ldots c_{n+p}} \in \Delta. \tag{18}$$

Alors $B^{(r)} = B \Pi_{c_{n+1} \ldots c_{n+r}}$ appartient à $\mathcal{B}$ pour $1 \leq r < p$ et par construction de $\mathcal{T}_E$

$$\varphi_{c_{n+r}}(B^{(r-1)}) = B^{(r)}, \quad \psi_{c_{n+r}}(B^{(r-1)}) = \wedge,$$

en posant $B^{(0)} = B$. Par (18), $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta} \rfloor\} \geq \min\{\lfloor \frac{u}{u'} \rfloor, \lfloor \frac{v}{v'} \rfloor\}$. Le lemme 2, appliqué à A donne

$$\Pi_{c_1 \ldots c_{n+p}} = \frac{1}{a_1 \ldots a_{s'}} U_{a_1 \ldots a_{s'}} B'$$

avec $B' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$ et $a_s \leq a_{s+1} \leq \cdots \leq a_{s'}$ $(\leq 1 + \min\{\lfloor \frac{\gamma}{\alpha'} \rfloor, \lfloor \frac{\delta}{\beta'} \rfloor)$. D'où

$$\varphi_{c_{n+p}}(B^{(p-1)}) = B' \quad \text{et} \quad \psi_{c_{n+p}}(B^{(p-1)}) = a_s \ldots a_{s'}.$$

Ainsi $\mathcal{T}_E(c_1 \dots c_{n+j}) = a_1 \dots a_s$ et $k_{n+j} = s$ pour $0 \leq j < p$, puis $\mathcal{T}_E(c_1 \dots c_{n+p}) = a_1 \dots a_s \dots a_{s'}$ et $k_{n+p} = s'$. De plus $[B'](T^{n+p}(x)) = S^{s'}(x)$. L'existence de la suite $(k_n)_n$ est établie, ce qui termine la démonstration. □

4. Nombres de Lucas

Soit p un entier ≥ 3 et r_p le nombre quadratique dans $[0,1]$ qui est racine de l'équation $x^2 - px + 1 = 0$. Un calcul classique donne $\mathrm{DFC}(r_p) = [0; p-1, \overline{1, p-2}]$. Le DE de r_p pour $p = 3$ a été étudié par E. Lucas. Il donne dans [Lu] l'égalité

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} =]3, 7, 47, 2207, \dots, F_{2^n-1} + F_{2^n+1}, \dots[.$$

Ici et plus loin, F_n désigne le n-ième nombre de Fibonacci qui peut être défini par l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (n \geq 1).$$

L'étude générale des r_p est faite par W. Sierpiński dans [Si]. Le DE est basé sur le fait que toute solution ζ de $y^2 = ay - 1$ (avec $a \in \mathbf{C}$ donné, $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$) vérifie aussi l'équation $y^4 = (a^2-2)y^2 - 1$, ce qui entraîne

$$\zeta = \frac{1}{a} + \frac{\zeta^2}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a^2-2)} + \frac{\zeta^4}{a(a^2-2)}.$$

En remplaçant a par p, on déduit [Si] :

$$r_p = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 \dots a_k} + \frac{r_p^{2^k}}{a_1 \dots a_k},$$

avec $a_1 = p$ et $a_{k+1} = a_k^2 - 2$ pour $k \geq 1$.

Plus récemment, J. Tamura [Ta] a montré

$$]a_1, \dots, a_n[= \frac{p_{2^{n+1}-2}}{q_{2^{n+1}-2}},$$

ce qui signifie que les réduites d'ordre n de r_p, pour le développement de Engel, sont les réduites d'ordre $2^{n+1}-2$ pour le développement en fraction continuée.

Nous allons à présent décrire les états du transducteur $\mathcal{T}_E$ qui calcule le DE de r_p à partir de son DFC. Pour cela, introduisons les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies, à partir de la matrice $M = \Pi_{1[p-2]} = \Pi_1\Pi_{p-2}$, par les relations :

(19) $$M^n = \begin{pmatrix} \beta_{2n} & \beta_{2n+1} \\ \alpha_{2n} & \alpha_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Remarquons que $(\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}})_{n\geq 1}$ est la suite des réduites du nombre quadratique

$$\frac{1}{2}(\sqrt{p^2-4}-(p-2)) = [0;\overline{1,p-2}]$$

et que, dans le cas où $p=3$, on a $\alpha_n = F_n$ et $\beta_n = F_{n-1}$.

Lemme 3. *Les suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$ vérifient les relations de récurrence suivantes :*

$$\beta_{2n+1} = (p-2)\alpha_{2n} \quad \text{et} \quad \beta_{2n+2} = \alpha_{2n+1}, \tag{20}$$

$$\alpha_{2n+1}\alpha_{2n-1} - (p-2)\alpha_{2n}^2 = 1, \tag{21}$$

$$\begin{cases} \alpha_{4n+1} & = & \alpha_{2n+1}^2 + (p-2)\alpha_{2n}^2, \\ \alpha_{4n} & = & \alpha_{2n}(\alpha_{2n+1}+\alpha_{2n-1}), \\ \alpha_{4n-1} & = & (p-2)\alpha_{2n}^2 + \alpha_{2n-1}^2. \end{cases} \tag{22}$$

Démonstration. D'après (19), $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 = 0 = (p-2)\alpha_0$ et $\beta_2 = \alpha_1 = 1$. Supposons (20) pour une valeur donnée $n \geq 1$. En calculant M^{n+1} sous la forme MM^n puis M^nM, on obtient $\beta_{2n+3} = (p-2)\alpha_{2n+2}$ et la première récurrence de (20). Pour démontrer la seconde récurrence, il suffit de calculer M^{n+2} sous la forme MM^{n+1}. La relation (21) est une simple conséquence de (20) et de l'égalité $\det(M^n) = 1$. Les relations (22) reviennent à calculer M^{2n} sous la forme M^nM^n. $\square$

Lemme 4. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_1 = p$ et $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Alors*

$$a_n = \alpha_{2^n-1} + \alpha_{2^n+1} \tag{23}$$

et

$$\Pi_{[p-1]1([p-2]1)^{2^n-2}} = \frac{1}{a_1\dots a_n} U_{a_1\dots a_n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2^{n+1}-1} & \alpha_{2^{n+1}} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Démonstration. L'égalité (23) pour $n=1$ vient du fait que $\alpha_1+\alpha_3 = p = a_1$. Supposons (23) pour une valeur donnée de $n \geq 1$, alors $a_{n+1} = \alpha_{2^n-1}^2 + 2\alpha_{2^n-1}\alpha_{2^n+1} + \alpha_{2^n+1}^2 - 2$. En tenant compte des égalités (21) et (22), on obtient bien $a_{n+1} = \alpha_{2^{n+1}-1} + \alpha_{2^{n+1}+1}$. D'autre part, l'égalité $\Pi_{[p-1]1} = \frac{1}{a_1}U_{a_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ est immédiate, d'où (24) pour $n=1$. Supposons à présent (24) pour une valeur donnée de $n \geq 1$ et remarquons que $\Pi_{[(p-2)1]^{2^n}} = ({}^tM)^{2^n}$, où ${}^tM$ désigne la transposée de M. L'hypothèse de récurrence et les formules (20) et (22) donnent alors successivement

$$\begin{aligned}
&\Pi_{(p-1)1[(p-2)1]^{2^{n+1}-2}} = \\
&= \frac{1}{a_1\dots a_n} U_{a_1\dots a_n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2^{n+1}-1} & \alpha_{2^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{2^{n+1}} & \alpha_{2^{n+1}} \\ \beta_{2^{n+1}+1} & \alpha_{2^{n+1}+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a_1\dots a_n} U_{a_1\dots a_n} \begin{pmatrix} \alpha_{2^{n+1}-1} & \alpha_{2^{n+1}} \\ \alpha_{2^{n+2}-1} & \alpha_{2^{n+2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{2^{n+1}-1} & \alpha_{2^{n+1}} \\ \alpha_{2^{n+2}-1} & \alpha_{2^{n+2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_{2^n-1}+\alpha_{2^n+1}} U_{\alpha_{2^n-1}+\alpha_{2^n+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2^{n+2}-1} & \alpha_{2^{n+2}} \end{pmatrix},$$

ce qui termine la démonstration de (24). Remarquons qu'en passant aux déterminants dans (24), on trouve $\alpha_{2^{n+1}} = a_1 \dots a_n$. □

Écrivons tout entier $k \geq 4$ sous la forme $k = 2^n + r$, avec n et r entiers déterminés par $0 \leq r < 2^n$, et définissons la suite des matrices $(M_k)_{k\geq 4}$ par

$$M_{2^n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2^n-1} & \alpha_{2^n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{2^n+r} = \begin{pmatrix} \alpha_{r-1} & \alpha_r \\ \alpha_{2^n+r-1} & \alpha_{2^n+r} \end{pmatrix}$$

pour $0 < r < 2^n$.

Théorème 2. *Soit $r_p = [0; p-1, \overline{1, p-2}] = [0; c_1, c_2, \dots]$. Soit $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite des états successifs du transducteur $\mathcal{T}_E$ lorsqu'il prend en entrée le DFC de r_p en partant de l'état initial $B_0 = I_0$. Alors :*

(a) *$B_k = M_{k+2}$ pour $k \geq 2$;*

(b) *si $k = 2^n - 2 + r$ avec n entier ≥ 2 et r entier tel que $0 < r < 2^n$, alors $\psi_{c_k}(B_{k-1}) = \wedge$;*

(c) *$\psi_{c_{2^n-2}}(B_{2^n-3}) = a_{n-1}$ pour tout entier ≥ 2.*

Démonstration. D'après la preuve du théorème 1, $\varphi_{c_1}(B_0) = B_1 = \Pi_{p-1}$, $\psi_{c_1}(B_0) = \wedge$ et $\psi_1(B_1) = p$. Un calcul simple donne $B_2 = \varphi_1(B_1) = M_4$.

Les relations de récurrence sur la suite (α_n), à savoir $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n$ si n est pair et $\alpha_{n+2} = (p-2)\alpha_{n+1} + \alpha_n$ si n est impair, montrent que $M_{2^n+r}\Pi_{c_{2^n-1+r}} = M_{2^n+r+1}$ pour $0 \leq r < 2^n - 1$. Supposons $\varphi_{c_{2^n-2}}(B_{2^n-3}) = B_{2^n-2} = M_{2^n}$ et $\psi_{c_{2^n-2}}(B_{2^n-3}) = a_{n-1}$ pour une valeur donnée de $n \geq 2$. D'après (24) et l'unicité de la factorisation (P), les matrices M_{2^n+r}, $(0 \leq r \leq 2^n - 1)$ ne sont pas dans Δ. Donc $B_k = M_{k+2}$ et $\psi_{c_k}(B_{k-1}) = \wedge$ pour $2^n - 2 \leq k \leq 2^{n+1} - 3$. Toujours d'après (24), $\varphi_{c_{2^{n+1}-2}}(B_{2^{n+1}-3}) = M_{2^{n+1}} = B_{2^{n+1}-2}$ et $\psi_{c_{2^{n+1}-2}}(B_{2^{n+1}-3}) = a_n$, ce qui termine la démonstration. □

5. CALCUL DE DFC (x) EN FONCTION DE (x)

5.1. *Nouveaux produits de matrices.* Soit $x \in [0,1]$ un nombre irrationnel, $]a_1, a_2, a_3, \dots[$ son DE et $[0; c_1, c_2, c_3, \dots]$ son DFC. La formule (3) montre que pour tout y intérieur à l'intervalle

$$K_n(x) = [\Pi_{c_1 \dots c_n}]([0,1])$$

on a $c_k(y) = c_k$ pour $k = 1, \dots, n$. D'autre part, en adoptant les notations de (9), la suite des intervalles

$$R_n(x) = [U_{a_1 \dots a_n}]([0,1]) = [\frac{u_n}{v_n}, \frac{u_n + 1}{v_n}]$$

est strictement décroissante pour l'inclusion et $\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m(x)$. Il existe donc un plus grand entier l_n tel que l'intervalle $K_{l_n(x)}$ contienne $R_n(x)$. Introduisons une matrice à coefficients entiers ≥ 0 telle que $[L]([0,\infty]) = [0,1]$. Soit alors l'homographie M_n définie par la relation

$$[U_{a_1 \dots a_n} L] = [\Pi_{c_1 \dots c_{l_n}}] \circ M_n.$$

Elle vérifie $M_n([L^{-1}]S^n(\zeta)) = T^{l_n}(\zeta)$ pour tout $\zeta \in J_n(x)$ $(\subset R_n(x))$ et

$$M_n([0,\infty]) = [\Pi_{c_1 \dots c_{l_n}}]^{-1}(R_n(x)) \subset [0,1].$$

En conséquence, il existe une matrice B_n ayant tous ses coefficients de même signe, telle que

$$U_{a_1 \dots a_n} L = \Pi_{c_1 \dots c_{l_n}} B_n. \tag{25}$$

Choisissons L de déterminant $+1$, ce qui détermine complètement L, à savoir $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul de B_n et le fait que les nombres rationnels $\frac{u_n}{v_n}$ et $\frac{u_n+1}{v_n}$ appartiennent à l'intervalle $K_{l_n(x)}$ montrent que la matrice B_n appartient à $\mathcal{D}$. Par contre, le choix de l_n entraîne que B_n n'appartient pas à Δ.

Remarque 1. Si B_n dans (25) est de la forme $\begin{pmatrix} x_n & 0 \\ y_n & z_n \end{pmatrix}$, alors

$$]a_1, \dots, a_n[= [0; c_1, \dots, c_{l_n}].$$

Ce résultat reste valable même dans le cas où $B_n \notin \mathcal{D}$.

En effet, il suffit de traduire la formule (25) en termes d'homographies et de prendre la valeur en 0.

Le lemme suivant est une conséquence de l'égalité (25) et du lemme 2 ; sa démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 5. *Pour toute suite croissante non bornée d'entiers* $(a_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $a_1 \geq 2$*, il existe deux suites d'entiers* ≥ 1*,* $(c_n)_{n\geq 1}$ *et* $(c'_n)_{n\geq 1}$*, une suite de matrices* $(E_n)_n$ *dans* $\mathcal{E}$ *et une suite croissante non bornée d'entiers* $(l_n)_{n\geq 1}$*, telles que*

$$LV_{a_1}\dots V_{a_n} = \Pi_{c_1\dots c_{l_n}c'_n}E_n, \tag{26}$$

avec $L = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ *et* $V_a = L^{-1}U_aL$*. Sous ces conditions, la factorisation* (26) *est unique pour chaque indice* n *et* $]a_1, a_2, a_3, \dots[= [0; c_1, c_2, c_3, \dots]$.

D'après l'unicité de la factorisation (F) on a, dans le lemme, $c'_n \leq c_{l_n+1}$.

5.2. *Définition du transducteur* $\mathcal{T}_F$. Le lemme 5 suggère d'introduire l'ensemble $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \setminus \Delta$, formé des matrices $\Pi_c E$ où $c \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ et $E \in \mathcal{E}$. L'introduction de la matrice conjuguée

$$V_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a-2 & a-1 \end{pmatrix}$$

est directement reliée à celle du transducteur permettant de passer du DE au DFC. Notons que $\mathcal{D}V_a \subset \mathcal{D}$ et $L \in \mathcal{D}_1$.

Soit $\mathcal{T}_F = (\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \Phi, \Psi)$ le transducteur défini de la manière suivante : $\mathcal{C} = \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$, $\mathcal{A} = \mathbf{N}\setminus\{0\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{D}_1$. L'état initial est L. Reste à définir les instructions φ_c et ψ_c ($c \in \mathcal{C}$). Pour tout $B \in \mathcal{B}$, posons $B' = BV_c$.

– Si $B' \in \mathcal{B}$, alors $\varphi_c(B) := B'$ et $\psi_c(B) := \wedge$.

– Sinon, (F) fournit la factorisation $B' = \Pi_{a_1\dots a_p a'_p}B''$, $B'' \in \mathcal{E}$. On définit alors $\varphi_c(B) := \Pi_{a'_p}B''$ et $\psi_c(B) := a_1a_2\dots a_p$.

Théorème 3. *Soit* x *un nombre irrationnel dans* $[0,1]$ *dont le développement de Engel est* $]a_1, a_2, a_3, \dots[$*. Le développement en fraction continuée* $[0; c_1, c_2, c_3, \dots]$ *de* x *est alors calculé par le transducteur* $\mathcal{T}_F$ *; pour tout* n *assez grand,* $\mathcal{T}_F(a_1\dots a_n) = c_1\dots c_{l_n}$*, la suite* (l_n) *étant croissante et non bornée.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 5, compte tenu de la définition de $\mathcal{T}_F$. $\square$

Remarque 2. Dans le cas où x est rationnel, son DE est ultimement stationnaire, $x =]a_1, a_2, a_3, \dots[=]a_1, \dots, a_{n_0}, \overline{b}^{\infty}[$. Soit $x = [0 ; c_1, c_2, \dots, c_r, \infty, \infty, \dots]$ la forme normale de son DFC. La formule (25) vaut pour n tant que $l_n \leq r$. Comme $K_{r+1}(x)$ se réduit à $\{x\}$, (25) devient, pour n assez grand,

$$LV_{a_1}\dots V_{a_n} = \Pi_{c_1\dots c_{r-1}(c_r-1)}E_n, \quad (E_n \in \mathcal{E}).$$

En prenant les images homographiques de l'intervalle $[0,\infty]$, on obtient que la suite des intervalles emboîtés $[E_n]([0,\infty])$ converge vers $\{1\}$

6. Applications aux nombres de Lucas et aux nombres pseudo-Lucas

6.1. *Retour sur les nombres quadratiques* $r_p = \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2-4})$, *p entier* ≥ 3. Pour décrire les états du transducteur $\mathcal{T}_F$ qui transforme le DE de r_p en son DFC, rappelons l'égalité (24) du lemme 4 :

$$\Pi_{[p-1]1([p-2]1)^{2^n-2}} = \frac{1}{a_1 \dots a_n} U_{a_1\dots a_n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{2^{n+1}-1} & \alpha_{2^{n+1}} \end{pmatrix}.$$

D'après (19) et le lemme 3, on a

(27)
$$\Pi_{([p-2]1)^{2^{n-1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p-2 \end{pmatrix} M^{2^{n-1}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{2^n-1} & \alpha_{2^n} \\ (p-2)\alpha_{2^n} & \alpha_{2^n+1} \end{pmatrix}$$

pour tout entier $n \geq 1$. Suivant (24), (27) et la définition des matrices V_a, on déduit

$$\Pi_{[p-1]1([p-2]1)^{2^{n-1}-2}} \begin{pmatrix} \alpha_{2^n-1} & \alpha_{2^n} \\ (p-2)\alpha_{2^n} & \alpha_{2^n+1} \end{pmatrix} = LV_{a_1} \dots V_{a_n} L^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{2^{n+1}} & 0 \\ -\alpha_{2^{n+1}-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

pour $n \geq 2$. Finalement, d'après (21), (22) et (23),

$$LV_{a_1} \dots V_{a_n} = \Pi_{[p-1]1([p-2]1)^{2^{n-1}-2}} A_n, \quad \text{avec } A_n = \begin{pmatrix} 2\alpha_{2^n} & \alpha_{2^n} \\ (p-2)\alpha_{2^n} & \alpha_{2^n+1} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Notons que $A_n \in \mathcal{D}_1$ si $p \geq 4$ et $A_n \in \mathcal{E}$ si $p = 3$.

Théorème 4. *Soit B_n la suite des états du transducteur $\mathcal{T}_F$ lorsqu'il prend en entrée le DE de r_p. Alors, pour tout entier $n \geq 2$, $B_n = A_n$ (cf. (28)) pour $p \geq 4$ et $B_n = \Pi_1 A_n$ dans le cas où $p = 3$.*

Démonstration. $r_p =]a_1, a_2, a_3, \dots[$ avec $a_1 = p$ et $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ pour tout $n \geq 1$. $B_0 = L$. Un calcul simple montre que $\psi_{a_1}(B_0) = \wedge$ et $\varphi_{a_1}(B_0) = LV_{a_1} = B_1$. Dans le cas où $p \geq 4$, d'après l'égalité (28), $\psi_{a_2}(B_1) = [p-1]1$, $\varphi_{a_n}(B_{n-1}) = A_n = B_n$ pour tout $n \geq 2$ et $\psi_{a_n}(B_{n-1}) = ([p-2]1)^{(2^{n-2})}$ pour tout $n \geq 3$.

Dans le cas où $p = 3$, ici $\alpha_n = F_n$ et $\Pi_1 A_n = \begin{pmatrix} F_{2^n} & F_{2^n+1} \\ 3F_{2^n} & F_{2^n+2} \end{pmatrix} = A'_n \in \mathcal{D}_1$. D'après (28), $\psi_{a_2}(B_1) = 2$, $\varphi_{a_n}(B_{n-1}) = A'_n = B_n$ pour tout $n \geq 2$ et $\psi_{a_n}(B_{n-1}) = 1^{(2^{n-1})}$ pour tout $n \geq 3$. $\square$

Dans tous les cas, on a bien $r_p = [0; p-1, \overline{1, p-2}]^\infty$. D'autre part, (24) et la remarque 1 permettent de retrouver le résultat de Tamura [Ta] :

$$]a_1, \dots, a_n[= \frac{p_{2^{n+1}-2}}{q_{2^{n+1}-2}}$$

où $(\frac{p_n}{q_n})_n$ désigne la suite des réduites de r_p.

6.2. *Les nombres pseudo-Lucas.* Soient m un entier relatif donné et p un entier ≥ 3. Par analogie avec les nombres de Lucas, nous appelons pseudo-Lucas les nombres irrationnels $r_{p,m}$ dont le développement de Engel $]a_1, a_2, a_3, \dots[$ est donné par $a_1 = p \geq \max(2, 2-m)$ et $a_{n+1} = a_n^2 + ma_n - 1$ pour $n \geq 1$. Notons qu'avec la valeur initiale de a_1, la suite des a_n est strictement croissante. Pour calculer $\mathrm{DFC}(r_{p,m})$, nous aurons besoin d'établir deux lemmes techniques. Le premier va permettre de déterminer les dénominateurs des réduites de Engel (écrits sous forme irréductible).

Lemme 6. *Soit $r_{p,m} =]a_1, a_2, a_3, \dots[$ un nombre pseudo-Lucas et soit $(d_n)_n$ la suite d'entiers définie par $d_0 = 1$, $d_n = \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n-2k}$ pour $n \geq 1$. Alors, pour tout n, d_n divise $a_{n+2} + m$.*

Démonstration. On vérifie facilement que $a_{n+2}+m = a_n(a_n+m)(a_{n+1}-1+m)$ et $a_n + m \geq 2$. Pour $n = 1$ ou 2, $d_n = a_n$, donc d_n divise $a_{n+2} + m$ dans ces cas. Supposons cette propriété vérifiée pour un $n \geq 2$ donné. Puisque $d_{n+2} = d_n a_{n+2}$ et $a_{n+4} + m = a_{n+2}(a_{n+2} + m)(a_{n+3} - 1 + m)$, il en résulte que d_{n+2} divise $a_{n+4} + m$, ce qui démontre le lemme. □

Le résultat précédent conduit à introduire la suite des entiers suivants :

$$b_n := \frac{(a_n + m)d_{n-1}}{d_{n-2}} \quad \text{pour} \quad n \geq 2. \tag{29}$$

Considérons maintenant la suite des mots w_n ($n \geq 2$) sur l'alphabet $\mathbf{N}\backslash\{0\}$:

$$\begin{cases} w_2 = & [p-1]1[p+m-2]1 & \text{si } p \geq \max\{2, 3-m\}; \\ w_2 = & 12 & \text{si } m \leq 0 \text{ et } p = 2-m; \\ w_n = & [b_{n-1} - 2]1 & \text{pour tout } n \geq 3. \end{cases} \tag{30}$$

Avec ces notations, on peut énoncer le second lemme qui est la clé pour passer du DE de $r_{p,m}$ à son DFC.

Lemme 7. *Soit* $(a_n)_n$ *la suite des quotients partiels de Engel de* $r_{p,m}$. *Alors*

$$LV_{a_1}\dots V_{a_n} = \Pi_{w_2\dots w_n} A_n, \quad \text{avec} \quad A_n = \begin{pmatrix} d_n & 0 \\ 2d_{n-1} - d_n & d_{n-1} \end{pmatrix},$$

pour tout $n \geq 2$. *En particulier* $]a_1,\dots,a_n[$ *est une réduite du DFC de* $r_{p,m}$. *Plus précisément, si* $k_n = 2n-2$ *lorsque* $m \leq 0$ *et* $p = 2-m$, *et si* $k_n = 2n$ *dans les autres cas, alors la* k_n*-ième réduite de* $r_{p,m}$, *pour* $n \geq 2$, *vérifie :*

$$\frac{p_{k_n}}{q_{k_n}} =]a_1,\dots,a_n[\quad \textit{et} \quad q_{k_n} = d_n\,.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur n. Un calcul direct donne $LV_{a_1}V_{a_2} = \Pi_{w_2}A_2$. Supposons (30) pour $n \geq 2$, Alors

$$A_nV_{a_{n+1}} = \begin{pmatrix} 2d_n & d_n \\ d_{n+1} - 2d_n + 2d_{n-1} & d_{n+1} - d_n + d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $a_n(a_n+m)d_{n-1} = b_nd_n$, cela donne $A_nV_{a_{n+1}} = \Pi_{[b_n-2]1}A_{n+1} = \Pi_{w_{n+1}}A_{n+1}$ et prouve (30) pour $n+1$. La fin du lemme est une conséquence de l'égalité classique $\Pi_c\Pi_0\Pi_{c'} = \Pi_{c+c'}$, de la définition de w_2 et de l'égalité (30). $\square$

Théorème 5. *Soit* m *un entier relatif donné et* $DE(r_{p,m}) =]a_1,a_2,a_3,\dots[$ *où* $r_{p,m}$ *est le nombre pseudo-Lucas défini par* $a_1 = p \geq \max(2, 2-m)$ *et* $a_{n+1} = a_n^2 + ma_n - 1$ $(n \geq 1)$. *Alors* $r_{p,m} = [0; c_1, c_2, c_3, \dots]$ *avec*

$$c_1 = p-1,\ c_3 = p+m-2, \quad c_{2n} = 1 \text{ et } c_{2n+3}+2 = (c_{2n-1}+2)a_n(a_n+m-1)$$

pour tout $n \geq 1$. *Dans le cas où* $m \leq 0$ *et* $a_1 = 2-m$, *on a* $(c_2,c_3,c_4) = (1,0,1)$ *que l'on doit remplacer par un seul quotient partiel, à savoir* 2.

Démonstration. Pour $a_1 = 2-m$ avec $m \leq 0$, on a $A_2 \notin \mathcal{M}$. Dans tous les autres cas, le lemme 7 montre que $A_n \in \mathcal{E}$ si $n \geq 3$ et (30) se traduit par $\mathcal{T}_F(a_1\dots a_n) = w_2\dots w_{n-1}$. D'où

$$r_{p,m} = [0; p-1, 1, p+m-2, 1, b_2-2, 1, \dots, b_k-2, 1, \dots].$$

La séquence $1,0,1$, au début de ce développement, doit être remplacée par 2 dans le cas où $m \leq 0$ et $p = 2-m$. Il reste à montrer les relations de récurrence sur les quotients partiels. On a déjà $c_{2n} = 1$. De plus, $b_2 = (a_2+m)a_1 = (p+1)a_1(a_1+m-1)$ et $b_3 = \frac{(a_3+m)a_2}{a_1} = (p+m)a_2(a_2+m-1)$. Enfin, à partir de (29), on peut écrire

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(a_n+m)a_{n-1}d_{n-3}}{a_{n-2}d_{n-4}} \\ &= \frac{(a_n+m)a_{n-1}}{a_{n-2}(a_{n-2}+m)}b_{n-2} = b_{n-2}a_{n-1}(a_{n-1}+m-1) \end{aligned}$$

pour $n \geq 4$. $\square$

Il est possible de préciser la suite (B_n) des états successifs du transducteur $\mathcal{T}_F$ lorsqu'il prend le DE de $r_{p,m}$ en entrée : pour $n \geq 3$,

$$B_n = \begin{pmatrix} 2d_{n-1} & d_{n-1} \\ d_n - 2d_{n-1} + 2d_{n-2} & d_n - d_{n-1} + d_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3. Puisque $r_{3,0} = 2r_{2,0} - 1$, le nombre $r_{3,0}$ est une image homographique de $r_{2,0}$. Dans ce cas particulier, le résultat de [Li-St] (3.2., exemple 1), se traduit par un algorithme très simple : à partir du troisième quotient partiel, le DFC de $r_{3,0}$ se déduit de celui de $r_{2,0}$ en effectuant la substitution suivante : $1 \to 1$, $c_{4n+3} \to \frac{1}{2}c_{4n+3} - 1$ et $c_{4n+1} \to 2c_{4n+1} + 2$.

Théorème 6. *Les nombres pseudo-Lucas sont transcendants, leur ordre d'approximation rationnelle est 3.*

Démonstration. Soit $(\frac{p_n}{q_n})_n$ la suite des réduites du DFC de $r_{p,m} =]a_1, a_2, a_3, \ldots[$ et soit $(k_n)_n$ la suite des entiers du lemme 7. Par définition des a_n, on a $\log(a_{n+1}) = 2\log(a_n) + \log(1 + \frac{m}{a_n} - \frac{1}{a_n^2})$. Soit $\epsilon > 0$; il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que $\log a_{n_0} \geq 1$ et $2\log(a_n) - \epsilon < \log(a_{n+1}) < 2\log(a_n) + \epsilon$ pour $n \geq n_0$ et par conséquent, pour tout entier $\ell \geq 0$,

$$a_{n_0}{}^{2^\ell(1-\epsilon)} < a_{n_0+\ell} < a_{n_0}{}^{2^\ell(1+\epsilon)}.$$

Les entiers d_n étant définis comme dans le lemme 6, posons pour simplifier, $b := a_{n_0}$, $K := d_{n_0-2}$ et $K' := d_{n_0-1}$. On a toujours

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 \cdots a_{n+1}} &< r_{p,m} - \tfrac{p_{k_n}}{q_{k_n}} = \textstyle\sum_{i \geq n+1} \frac{1}{a_1 \ldots a_i} \\ &\leq \tfrac{1}{a_1 \ldots a_n (a_{n+1} - 1)} \leq \tfrac{2}{a_1 \cdots a_{n+1}}. \end{aligned}$$

Puisque $KK' = a_1 a_2 \ldots a_{n_0-1}$, les inégalités précédentes conduisent aux majorations

$$\frac{1}{KK'b^{(2^{n+2}-1)(1+\epsilon)}} < r_{p,m} - \frac{p_{k_{n_0+n}}}{d_{n_0+n}} < \frac{2}{KK'b^{(2^{n+2}-1)(1-\epsilon)}}$$

ainsi qu'aux encadrements suivants de d_{n_0+n}, en fonction de la parité de n :

$$\begin{cases} Kb^{\frac{2^{n+2}-1}{3}(1-\varepsilon)} < d_{n_0+n} < Kb^{\frac{2^{n+2}-1}{3}(1+\varepsilon)} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ K'b^{\frac{2^{n+2}-2}{3}(1-\varepsilon)} < d_{n_0+n} < K'b^{\frac{2^{n+2}-2}{3}(1+\varepsilon)} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Par suite, si $\omega < 3$, il existe une infinité d'entiers n tels que $0 < r_{p,m} - \frac{p_{k_n}}{q_{k_n}} < \frac{1}{q_{k_n}{}^\omega}$ tandis que pour $\omega > 3$, ces mêmes inégalités ne sont vérifiées que pour un nombre fini de valeurs de n. Pour terminer, il suffit de montrer que c'est encore le cas pour les autres réduites à l'exception éventuelle d'un nombre fini. Or celles-ci correspondent aux indices impairs (cf. lemme 7), alors que les quotients partiels d'indices pairs ≥ 4 sont égaux à 1, d'où

$|r_{p,m} - \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}}| > \frac{1}{3(q_{2\ell+1})^2}$. Donc $r_{p,m}$ est un nombre transcendant par le théorème de Roth et de plus, son ordre d'approximation rationnelle est exactement 3. □

7. Nombres de fredholm et symétrie perturbée

Dans un premier temps nous calculerons le DFC d'un nombre de Fredholm particulier, à savoir $2f(2) - 1 =]2, 4, 16, \dots, 2^{2^{n-1}}, \dots[$ à l'aide du transducteur $\mathcal{T}_F$. La description algorithmique de ce DFC est très différente de celle décrite par [VdP]. Ici, le DFC s'obtient par concaténation de mots associés à des DFC de nombres rationnels. Dans un deuxième temps, les résultats connus sur les symétries perturbées sont généralisés à partir des séries de Engel pour lesquelles le $n+1$-ième quotient partiel est un multiple du produit des n précédents. Dans ces exemples, comme dans ceux de la section 6, $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \infty$ alors que, pour presque tout nombre réel, $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = e$ (voir [E-R-S]).

7.1. *Le DFC de* $2f(2) - 1$. A. J. Van der Poorten [VdP] a montré que

$$2f(2)-1 = [0; 1, 1, 1, S_a^\infty(b)] \quad \text{avec} \quad a = (1,1,1,1,2,1) \quad \text{et} \quad b = (2,1,1,1)$$

(voir l'introduction pour la définition de S_a). Explicitons ici la formule (26). Pour cela, introduisons la suite des entiers r_n $(n \geq 1)$ et les matrices A_n et M_n $(n \geq 2)$ suivantes :

$$\begin{cases} r_1 & := \quad 3 \quad \text{et} \quad r_{n+1} := 2^{2^n}(r_n - 2) + 1; \\ \\ A_n & := \quad \begin{pmatrix} 2^{2^n} & 2^{2^n-1} \\ 2r_n & 2^{2^n-1} + r_n \end{pmatrix}; \\ \\ M_n & := \quad \begin{pmatrix} 2^{2^n-1} - r_n + 2 & 2^{2^n-1} \\ 2^{2^n-1} + 2 - 2(r_{n-1} - 2)^2 & 2^{2^n-1} + r_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Lemme 8.
(31)
$$LV_2V_4V_{16} = \Pi_{1112}A_2 \quad \text{et} \quad LV_2V_4 \dots V_{2^{2^n}} = \Pi_{1112}M_2M_3 \dots M_{n-1}A_n.$$

De plus $A_n \in \mathcal{E}$, $\det(M_n) = 1$ *et* $M_n \in \mathcal{D}$.

Démonstration. Un calcul direct donne $LV_2V_4V_{16} = \Pi_{1112}A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 82 & 81 \\ 128 & 128 \end{smallmatrix}\right)$. Laissons au lecteur le soin de vérifier, en utilisant la définition de (r_n), que $A_nV_{2^{2^{n+1}}} = M_nA_{n+1}$, ce qui donne (31). D'autre part, $r_n < 2^{2^n-1}$ par récurrence sur n, et donc $A_n \in \mathcal{E}$. Enfin, $2^{2^{n-1}}(r_{n-1} - 2) = r_n - 1$ par définition, d'où $\det(M_n) = 1$. L'appartenance de M_n à $\mathcal{D}$ en résulte simplement. □

Lemme 9. *Posons* $M_1 := \Pi_{1212}$ *; alors*

$$M_n = M_1 M_2 \ldots M_{n-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{n-1}, \tag{32}$$

pour tout $n \geq 3$.

Démonstration. pour simplifier les notations, posons $M_n = \begin{pmatrix} q'_n & q_n \\ p'_n & p_n \end{pmatrix}$ et montrons par récurrence que $M_1 \ldots M_{n-1} = \begin{pmatrix} q'_n - 2 & q_n \\ p'_n - 4 & p_n - 2 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$. L'égalité est immédiate si $n = 2$. En utilisant $\det(M_n) = 1$ et la définition de la suite $(r_n)_n$, on déduit

$$\begin{pmatrix} q'_n - 2 & q_n \\ p'_n - 4 & p_n - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_n & q_n \\ p'_n & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_{n+1} - 2 & q_{n+1} \\ p'_{n+1} - 4 & p_{n+1} - 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin un calcul laborieux mais sans surprise donne bien

$$\begin{pmatrix} q'_n - 2 & q_n \\ p'_n - 4 & p_n - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_n & q_n \\ p'_n & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_{n+1} & q_{n+1} \\ p'_{n+1} & p_{n+1} \end{pmatrix}.$$

□

Ces deux lemmes conduisent aux définitions suivantes. Puisque la matrice M_n est dans $\mathcal{D}$, de déterminant 1, elle admet une factorisation unique $M_n = \Pi_{c_{n,1} \ldots c_{n,k}}$ avec k pair. Introduisons les mots $g_n := c_{n,1} \ldots c_{n,k}$ pour $n \geq 1$; par construction, g_n correspond à la suite des quotients partiels d'un des deux DFC du nombre rationnel $\frac{2^{2^n-1}+r_n}{2^{2^n-1}}$ (cf. lemme 8). En fait, comme $\lfloor \frac{q_n}{q'_n} \rfloor = 1$, on a $c_{n,k} = 1$ pour $n \geq 2$.

Supposons maintenant que, pour un indice $n \geq 1$, le mot g_n commence par 111 ou 12 et se termine par 11 ou 2. Puisque $\Pi_{11} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right) = \Pi_2$ et $\Pi_2 \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right) = \Pi_{11}$, on désignera par g'_n le mot qui se déduit de g_n en remplaçant le suffixe 11 par 2 et le suffixe 2 par 11. De même, puisque $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \Pi_{111} = \Pi_{12}$ et $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \Pi_{12} = \Pi_{111}$, on désignera par g''_n le mot qui se déduit de g_n en remplaçant le préfixe 111 par 12 et le préfixe 12 par 111. Les deux premières valeurs de g_n sont $g_) = 1212$ et $g_2 = 111111$. En conséquence, g_n commence par 12 pour $n \geq 3$ et se termine par 11 pour $n \geq 2$. Nous sommes prêt pour énoncer et démontrer le théorème sur le développement en fraction continuée de $2f(2) - 1$:

Théorème 7. *Le DFC de $2f(2)-1$ est donné par les formules suivantes :*

(i) $2f(2)-1=[0;1,1,1,2,(g_2),(g_3),\dots]$ *où g_n $(n\geq 2)$ est le mot correspondant aux quotients partiels du DFC de longueur paire de* $\frac{2^{2^n-1}+r_n}{2^{2^n-1}}$ *;*

(ii) *la suite des mots g_n satisfait à la relation de récurrence*

$$g_n=g_1\dots g_{n-3}g'_{n-2}g''_{n-1},$$

pour $n\geq 4$, et aux conditions initiales $g_1=1212$, $g_2=111111$ et $g_3=g'_1g''_2$;

(iii) $]2,4,\dots,2^{2^{n-1}}[\,=[0;1,1,1,2,(g_2),\dots,(g_{n-1})]=\frac{p_{5\times 2^{n-2}}}{q_{5\times 2^{n-2}}}$ *pour $n\geq 3$.*

Démonstration. L'égalité de (i) est la conséquence du lemme 8 et de la définition des g_n. On peut préciser la suite des états du transducteur $\mathcal{T}_F$: $B_0=L$, $B_1=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}2&3\\6&5\end{pmatrix}$, $B_3=\Pi_2A_2$ et $B_{n+1}=\Pi_1A_n$ pour $n\geq 3$.

La récurrence dans (ii) est la conséquence du lemme 9 et de la définition des applications $g_n\mapsto g'_n$ et $g_n\mapsto g''_n$. On retrouve, en particulier, le résultat de [VdP] : tous les quotients partiels de $2f(2)-1$ sont égaux à 1 ou 2.

Notons que $M_n^{-1}A_n$ est une matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix}x_n&0\\y_n&z_n\end{smallmatrix}\right)$. D'après (31) et la remarque 1, $]2,4,\dots,2^{2^{n-1}}[=[0;1,1,1,2,(g_2),\dots(g_{n-1})]$. Par ailleurs, en notant l_n la longueur du mot g_n, on a $l_1=4$, $l_2=6$ et d'après (ii), $l_n=l_1+l_2+\dots l_{n-1}=5\times 2^{n-2}$ pour $n\geq 3$, ce qui démontre (iii). $\square$

7.2. *Généralisation de la symétrie perturbée.* Dans le résultat précédent, la symétrie du DFC a été occultée. Nous allons la remettre en évidence sous une forme plus générale. Soit p un entier ≥ 2, $k=(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers de $\mathbf{Z}\setminus\{-1\}$ et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$(A)\qquad a_1=p\quad\text{et}\quad a_{n+1}=(k_n+1)a_1\dots a_n.$$

Posons

$$x_{p,k}:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\dots a_n}.$$

Il est clair que $x_{p,k}=\,]a_1,a_2,a_3,\dots[$ si $k_n\geq 0$ pour tout n. D'autre part, posons $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}:=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\dots+\frac{1}{a_1a_2\dots a_n}$ avec $\alpha_n=a_1\dots a_n$. On a immédiatement les relations $\alpha_{n+1}=(k_n+1)\alpha_n^2$ et $\gamma_{n+1}=(k_n+1)\alpha_n\gamma_n+1$ et donc α_n et γ_n sont toujours premiers entre eux.

Soit w_n $(n\geq 1)$ le mot de la suite des quotients partiels définie par le DFC de longueur paire de $\frac{\alpha_n}{\gamma_n}$. Classiquement, il existe un couple unique d'entiers (α'_n, γ'_n) vérifiant simultanément $1 \leq \gamma'_n \leq \gamma_n$, $1 \leq \alpha'_n < \alpha_n$ et $\alpha_n\gamma'_n - \gamma_n\alpha'_n = 1$. Ce couple est donné par $A_n = \Pi_{(w_n)} = \begin{pmatrix} \gamma'_n & \gamma_n \\ \alpha'_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Lemme 10.

$$A_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t\!A_n = A_{n+1}. \tag{33}$$

Démonstration. En utilisant la définition des suites $(\alpha_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ et l'égalité $\alpha_n\gamma'_n - \gamma_n\alpha'_n = 1$, on obtient

$$A_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t\!A_n = \begin{pmatrix} (k_n+1)\gamma_n^2 & \gamma_{n+1} \\ (k_n+1)\alpha_n\gamma_n - 1 & \alpha_{n+1} \end{pmatrix},$$

d'où (33). $\square$

étant donné un mot $w = c_1 \dots c_r$ avec $r \geq 2$ et les c_i, entiers ≥ 1, le lemme 10 et les relations $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_{1c} = \Pi_{c+1}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_c = \Pi_{1[c-1]}$ conduisent définir le mot

$$\overline{w} := \begin{cases} [c_{r-1}+1]c_{r-2}\dots c_1 & \text{si } c_r = 1, \\ 1[c_r - 1]c_{r-1}\dots c_1 & \text{si } c_r \geq 2\,. \end{cases}$$

Enfin, pour obtenir le DFC de $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}$ à partir de (33), il faut envisager d'une part le cas où $k_n = 0$, qui relève de la relation $\Pi_c\Pi_0\Pi_{c'} = \Pi_{c+c'}$, et d'autre part celui où $k_n \leq -2$, qui fait intervenir l'égalité

$$\Pi_c\Pi_{-k}\Pi_{c'} = -\Pi_{c-1}\Pi_1\Pi_{k-2}\Pi_1\Pi_{c'-1} \tag{34}$$

pour $k \geq 2$. Notons que les cas particuliers où $k = 0, -2$ ont été étudiés avec une autre méthode par M. Mendès France et J.O. Shallit [Me-Sh].

Définition. Soit w un mot dont les lettres sont dans $\mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ et n'ayant jamais deux lettres consécutives ≤ 0 ou deux lettres ≤ 0 séparées par un 1. On définit alors le mot réduit $\mu(w)$ de w comme étant celui obtenu en substituant tous les mots facteurs $c[-k]c'$ de w par $[c-1]1[k-2]1[c'-1]$, puis tous les mots facteurs $c[0]c'$ par la lettre $c + c'$.

Notons que $\mu(w)$ ne dépend pas de l'ordre suivant lequel on a effectué les diverses substitutions.

Théorème 8. *Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers $\neq -1$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite d'entiers donnée par $a_1 = p \geq 2$ et $a_{n+1} = (k_n+1)a_1 \dots a_n$. Définissons la suite de mots $(w_n)_{n\geq 1}$ par $w_1 := [p-1]1$, $w_{n+1} := \mu([w_n]k_n[\overline{w_n}])$ pour $n \geq 2$ et posons $\frac{\gamma_n}{\alpha_n} := \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \dots + \frac{1}{a_1a_2\dots a_n}$. Alors, pour tout n, l'un des deux DFC de $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}$ est égal à $[0; (w_n)]$.*

Démonstration. Le DFC de $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}$ est une conséquence du lemme 10 et de la définition de μ. D'autre part, le DFC de $x_{p,k}$ est la limite de $[0;(w_n)]$ quand n tend vers l'infini. □

Théorème 9. *Dans le cas où les (k_n+1) ont un nombre fini de diviseurs premiers, les nombres $x_{p,k}$ sont transcendants.*

Démonstration. D'après (A), $\alpha_n = \prod_{l=0}^{n-2}(k_{n-l-1}+1)^{2^l} a_1^{2^{n-1}}$. Il existe donc un ensemble fini de nombres premiers S et un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, tout élément q de S divise α_n et tout nombre premier qui n'est pas dans S ne divise pas α_n. Nous utilisons à la fois le théorème de Roth tel qu'il est présenté dans [La] (chapitre VI, th 1, remarque (v)) et la structure multiplicative des réduites $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}$ de $x_{p,k}$. Par la formule du produit,

$$\prod_{q\in S}(\min\{1,|\alpha_n|_q\}) = \frac{1}{\alpha_n}$$

où $|\cdot|_q$ est la valuation q-adique usuelle sur $\mathbf{Q}$ (normalisée par $|q|_q = \frac{1}{q}$). Notons $|\cdot|_0$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{R}$ et rappelons que α_n et γ_n sont premiers entre eux. On a donc

$$(B_1) \qquad \left|x_{p,k} - \frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right|_0 \prod_{q\in S}(\min\{1,\left|\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\right|_q\}) < \frac{1}{\alpha_n^3},$$

ce qui implique la transcendance de $x_{p,k}$ par le théorème cité supra. □

Remarque 4. S'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $(k_n+1) > \alpha_n^{\epsilon}$ pour une infinité de valeurs de n, alors $x_{p,k}$ est transcendant. C'est une conséquence immédiate du théorème de Roth classique. Nous laissons ouvert le cas des nombres $x_{p,k}$ restants.

7.3. **Exemple.** Le résultat du théorème 8 permet de trouver les DFC de plusieurs types de nombres transcendants. Certains résultats étaient connus, d'autres sont nouveaux. En voici quelques uns.

7.3.1. *Nombres de Fredholm.*

– Si $k_n = 0$ pour tout indice n, alors $x_{p,k} = f(p)$ et

$$f(p) = [0;p-1,p+2,p,p,p-2,p,p+2,p,p-2,p+2,p,p-2,p,p,p+2,\dots].$$

pour $p \geq 3$; les quotients partiels c_k sont tous dans $\{p-2,p,p+2\}$ pour $k \geq 2$. Pour $p = 2$,

$$f(2) = [0;1,4,2,4,4,6,4,2,4,\dots].$$

Ici les quotients partiels c_k sont tous dans $\{2,4,6\}$ pour $k \geq 2$ (voir [Sh2]).

– Si $k_n = p-1$ pour tout indice n, alors $x_{p,k} = pf(p) - 1$ et

$$pf(p)-1 = [0; p-1, 1, p-1, p, p-1, 1, p-1, p-1, 1, p-1, p-1, 1, p-2, 1, p-1, p-1, \dots].$$

Dans le cas où $p = 2$, il faut remplacer au début du développement la séquence $1, 0, 1$ par 2. Les quotients partiels prennent les valeurs 1, $p-2$, $p-1$ et p si $p \geq 3$ et 1 ou 2 si $p = 2$.

– Si $k_n = -2$ pour n impair et $k_n = 0$ pour n pair, alors $x_{p,k} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i p^{-2^i}$ dont le DFC est $[0; p+1, p, p-2, p, p+2, p-2, p, p+2, \dots]$ pour $p \geq 3$ (voir [Me-Sh]).

7.3.2. Par analogie avec les nombres de Fredholm, on peut définir la classe SF des nombres suivants : $SF(p) = \sum_{i\geq 0} p^{-3^i}$ pour lesquels ici $k_n = p^{3^{n-1}} - 1$. Le théorème 8 permet d'obtenir

$$SF(p) = [0; p-1, 1, p-1, p, p^3-1, 1, p-1, p-1, 1, p-1, p^9-1, 1, p-2, 1, \dots]$$

pour $p \geq 3$. Ces nombres sont transcendants, leur ordre d'approximation est 3.

Par analogie avec le lemme 8 et le théorème 7, on peut aussi définir les DFC des nombres $x_{k,p}$ par concaténation des DFC d'une suite de nombres rationnels. Précisons cela :

Proposition. *Soient les entiers r_n définis par $r_0 = -1$ et pour $n \geq 0$, $r_{n+1} = p^{2\times 3^n}(r_n + 2) - 1$. Alors*

$$SF(p) = [0; p-1, 1, p-1, p, (g_1), (g_2), (g_3), \dots],$$

où g_n ($n \geq 1$) est le mot correspondant aux quotients partiels du DFC de longueur paire de $\frac{p^{2\times 3^n} - r_n}{p^{3^n}}$.

Démonstration. Soient

$$\begin{cases} r'_n & := \; p^{3^n}(r_n+2) - p^{3^{n-1}}(r_{n-1}+2)^2, \\ M_n & := \; \begin{pmatrix} r_n + 2 & p^{3^n} \\ r'_n & p^{2\times 3^n} - r_n \end{pmatrix} \quad \textit{et} \\ A_n & := \; \begin{pmatrix} p^{3^n} & 0 \\ 1 - r_n & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Un calcul long mais élémentaire montre que $r'_n > 0$, $r_n + 2 < p^{3^n}$ et $\det(M_n) = 1$, puis

$$\begin{aligned} LV_pV_{p^2} &= \Pi_{[p-1]1[p-1]p}A_1 \\ LV_pV_{p^2}\dots V_{p^{2\times 3^n}} &= \Pi_{[p-1]1[p-1]p}M_1\dots M_nA_{n+1} \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$. Par conséquent $M_n = \Pi_{g_n}$ et d'après la remarque 1,

$$SF(p) = [0; p-1, 1, p-1, p, (g_1), (g_2), (g_3), \dots].$$

□

7.3.3. *Nombres de Liouville.* Ces nombres furent l'un des premiers exemples explicites de nombres transcendants. Le DFC de $L(p) = \sum_{i\geq 1} p^{-i!}$ est une simple application du théorème 7. Il suffit de prendre $k_n = p^{(n-1)\times n!} - 1$. On retrouve ainsi le résultat de J. O. Shallit [Sh3] :

$$L(p) = [0, p-1, p+1, p^2-1, 1, p, p-1, p^{12}-1, 1, p-2, p, 1, p^2-1, \\ p+1, p-1, p^{72}-1, \dots]$$

pour $p \geq 3$.

8. Duplication perturbée

Par analogie avec la symétrie perturbée, on peut proposer une duplication perturbée basée sur les relations matricielles

$$\Pi_{c1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_{c+1}, \quad \Pi_{c}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_{[c-1]1}\,.$$

Pour tout mot w sur l'alphabet des entiers relatifs, associons le mot $\vec{w}$ déduit de w en remplaçant, à la fin du mot, $c1$ par la lettre $c+1$ et si la dernière lettre est $c \geq 2$, celle-ci est remplacée par le mot $[c-1]1$.

Définition. Soit p un entier ≥ 2 et $k = (k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers relatifs distincts de -1. On définit alors la suite des mots w'_n :

$$w'_1 = [p-1]1 \quad \text{et} \quad w'_{n+1} = \mu([w'_n]k_n[\overrightarrow{w'_n}])$$

puis le nombre réel $y_{p,k}$ dont le DFC est la limite de $[0; (w'_n)]$ quand n tend vers l'infini.

Nous allons donner une expression plus explicite de $y_{p,k}$ ainsi que son DE, dans le cas où les entiers k_n sont tous ≥ 0. Pour cela nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

Lemme 11. *Soit* $B_n = \Pi_{w'_n}$. *Alors*

(35) $$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p-1 & p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{n+1} = B_n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k_n \end{pmatrix}B_n\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En fait, (35) est une conséquence directe de la définition de w'_n. Posons maintenant $B_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$ et $a'_{n+1} = \beta_n + \gamma_n + k_n\delta_n$ pour $n \geq 1$.

Lemme 12.

(36)
$$\beta_{n+1} = a'_{n+1}\beta_n + 1, \quad \delta_{n+1} = a'_{n+1}\delta_n \quad \text{et} \quad \gamma_{n+1} = a'_{n+1}(\delta_n - \gamma_n) - 1.$$

Ces égalités résultent d'un calcul simple en utilisant le fait que $\det(B_n) = 1$. □

Lemme 13. *Les matrices B_n du lemme 11 (avec $n \geq 2$) sont définies par $a'_1 = p$ et :*

$$(37) \qquad \begin{cases} \delta_n &= \prod_{j=1}^{n} a'_j, \\ \beta_n &= (\sum_{j=2}^{n} \prod_{i=j}^{n} a'_i) + 1, \\ \gamma_{2m} &= (\sum_{j=2}^{2m} (-1)^j \prod_{i=j}^{2m} a'_i) - 1, \\ \gamma_{2m+1} &= (\sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^{j+1} \prod_{i=j}^{2m+1} a'_i) - 1, \\ \det(B_n) &= 1\,. \end{cases}$$

La démonstration se fait par récurrence en utilisant (36). □

Nous pouvons à présent retrouver les nombres $y_{p,k}$ sous la forme d'une série de type Engel.

Théorème 10. $y_{p,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\delta_n}$ *avec* $\frac{\beta_n}{\delta_n} = \frac{1}{a'_1} + \frac{1}{a'_1 a'_2} \cdots + \frac{1}{a'_1 a'_2 \ldots a'_n}$ *et*

$$(38) \qquad \begin{cases} a'_1 &= p, \\ a'_{2m} &= (k_{2m-1}+1)(\prod_{i=1}^{2m-1} a'_i) + 2(\sum_{j=1}^{m-1} \prod_{i=2j+1}^{2m-1} a'_i), \\ a'_{2m+1} &= k_{2m}(\prod_{i=1}^{2m} a'_i) + 2(\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=2j}^{2m} a'_i)\,. \end{cases}$$

Ces formules résultent de la définition de a'_{n+1} et de (37). Elles donnent explicitement le DE de $y_{p,k}$ dans le cas où $k_n \geq 0$ pour tout n. Dans le détail, on obtient pour les premières valeurs : $a'_2 = (k_1+1)a'_1$, $a'_3 = k_2 a'_1 a'_2 + 2a'_2$, $a'_4 = (k_3+1)a'_1 a'_2 a'_3 + 2a'_3$, $a'_5 = k_4 a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 + 2a'_2 a'_3 a'_4 + 2a'_4, \ldots$ □

Exemple. Dans le cas où la suite $(k_n)_n$ est bornée, le théorème 10 fournit de nouveaux exemples de nombres à quotients partiels bornés avec leur développement de Engel. Ainsi, en prenant $p = 2$ et $k_n = 1$ pour tout n, on a

$$[0;1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,2,\dots] = \\ ]2,4,16,288,74304,\dots[.$$

Ce nombre dont tous les quotients partiels sont égaux à 1 ou 2 est très différent du nombre de Fredholm $2f(2)-1$; nous allons montrer qu'il est transcendant. Il appartient en fait à une nouvelle famille de nombres transcendants dont les développements en fractions continuées s'obtiennent par un procédé général de duplication perturbée, directement inspiré de la construction précédente.

Pour simplifier, notons $\mathcal{A}$ l'alphabet $\mathbf{N}\setminus\{0\}$ et sur $\mathcal{A}_*$, le monoïde des mots sur $\mathcal{A}$, considérons une application involutive $W \mapsto W'$ pour laquelle il existe $\ell_0 \geq 1$ tel que pour tous mots W et U sur $\mathcal{A}$, on a $(WU)' = WU'$ si la longueur $|U|$ de U est $\geq \ell_0$. Maintenant, pour toute lettre a de $\mathcal{A}$ définissons l'opérateur dit de duplication perturbée $D_a : \mathcal{A}_* \to \mathcal{A}_*$ par

$$D_a(U) = UaU'.$$

à toute suite d'entiers $\alpha = (a_n)_{n\geq 1}$ et à tout mot $M \in \mathcal{A}_*$ nous associons la suite de mots

$$U_n := D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1}(M).$$

Par construction, la longueur $|U_n|$ de U_n tend vers l'infini et U_n est préfixe de U_{n+1}, ce qui permet de définir un mot infini unique $U(\alpha, M)$ dont les mots U_n sont des préfixes. Le résultat suivant nous a été aimablement suggéré par J.-P. Allouche ; la démonstration s'inspire des méthodes récemment introduites dans [A-D-Q-Z], [Q] et [Da].

Théorème 11. *Si la suite α est bornée et $U(\alpha, M) = u_1u_2u_3\cdots$, alors le nombre*

$$u := [0; u_1, u_2, u_3, \dots]$$

est quadratique ou transcendant.

Démonstration. Rappelons la définition de la hauteur $H(\xi)$ d'un nombre algébrique ξ sur $\mathbf{Q}$, de polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$ égal à $a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d (a_i \in \mathbf{Z}$ pour $0 \leq j \leq d$ et $a_0 \geq 1)$:

$$H(\xi) := \max\{|a_0|, \dots, |a_d|\}.$$

En particulier, avec les notations de la section 2.1, $H([0; c_1, \dots, c_r]) = q_r$ et dans le cas d'un nombre quadratique de développement en fraction continuée périodique $\theta = [0; \overline{c_1, \cdots, c_r}]$ on a facilement $H(\theta) \leq \max\{q_{r-1}, q_r - p_{r-1}, p_r\}$ puisque $\theta = [\Pi_{c_1\cdots c_r}](\theta) = \frac{p_{r-1}\theta + p_r}{q_{r-1}\theta + q_r}$. En conséquence, $H(\theta) \leq H([0, c_1, \dots, c_r])$. Nous pouvons maintenant énoncer le critère de transcendance de W. Schmidt [Sc] que nous allons utiliser : une condition suffisante pour qu'un nombre réel x, ni rationnel, ni quadratique, soit transcendant est qu'il existe une constante $B > 3$ et une constante $C > 0$ telles que l'inégalité

$$|x - \theta| \leq CH(\theta)^{-B}$$

soit vérifiée pour une infinité de nombres quadratiques θ. Pour toute suite d'entiers $x_n \geq 1$, la dérivée de l'homographie $[\Pi_{x_1 \cdots x_n}]$ est facile à estimer sur $[0,1]$ par la hauteur du nombre rationnel $[0; x_1, \ldots, x_n]$ que nous écrirons pour simplifier $[0; x_1 \cdots x_n]$. Plus précisément, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{1}{4H([0; x_1 \cdots x_n])^2} \leq \left|[\Pi_{x_1 \cdots x_n}]'(t)\right| \leq \frac{1}{H([0; x_1 \cdots x_n])^2}.$$

D'autre part, la relation matricielle $\Pi_{x_1 \cdots x_n} = \Pi_{x_1 \cdots x_j} \Pi_{x_{j+1} \cdots x_n}$ conduit simplement aux inégalités

$$H([0; x_1 \cdots x_j])H([0; x_{j+1} \cdots x_n]) \leq H([0; x_1 \cdots x_n])$$

et

$$H([0; x_1 \cdots x_n]) \leq 2H([0; x_1 \cdots x_j])H([0; x_{j+1} \cdots x_n]).$$

Revenons à la définition de u. Soit W_n le plus grand préfixe commun à U_n et U'_n ; alors $U_n a_{n+1} = W_n U_n^*$ où U_n^* est un mot de longueur au plus ℓ_0 et dont toutes les lettres appartiennent à un ensemble fini F d'entiers ≥ 1. Posons $A := \max F$ et $\theta_n := [0; \overline{U_n a_{n+1}}]$. Par construction, il existe u'_n et θ'_n dans $[0,1]$ tels que $u = [\Pi_{U_n a_{n+1} W_n}](u'_n)$ et $\theta_n = [\Pi_{U_n a_{n+1} W_n}](\theta'_n)$. En conséquence, par le théorème des accroissements finis, il existe $t_n \in [0,1]$ tel que

$$|u - \theta_n| \leq |[\Pi_{U_n a_{n+1} W_n}]'(t_n)|.$$

Les inégalités précédentes conduisent rapidement à la majoration

$$|u - \theta_n| \leq 4H([0; U_n^*])^2 H(\theta_n)^{-4} \tag{39}$$

avec $H([0; U_n^*]) \leq H([0; A^{(\ell)}])$. Le théorème en résulte. $\square$

Pour compléter ce résultat, notons que si u est quadratique alors, à cause de (39), les θ_n sont tous identiques à u pour n assez grand, ce qui n'a lieu finalement que si $M' = M$ et si la suite α est constante à partir d'un certain rang. Il est donc facile d'écarter le cas où u est quadratique.

Bibliographie

[A-D-Q-Z] J.-P. Allouche, J.L. Davison, M. Queffélec, L. Q. Zamboni, *Transcendence of sturmian or morphic continued fractions.* préprint 1999, pp. 26.

[A-L-M-P-S] J.-P. Allouche, A. Lubiw, M. Mendès france, A.J. Van der Poorten, J. O. Shallit, *Convergents of folded continued fractions.* Acta Arithmetica **77** (1996), 77–96.

[Bl-Me] A. Blanchard, M. Mendès France, *Symétrie et transcendance.* Bull. Sci. Math. **106** (1982), 325–335,

[Bo] E. Borel, *Sur les développements unitaires normaux.* C.R.A.S Paris **225** (1947), 773.

[Da] J. L. Davison, *A class of transcendental numbers with bounded partial quotients.* Number Theory and Applications (Banff, AB, 1988) ; NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci., **265** ; Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1989), 365–371.

[De-Po-Me] M. Dekking, A.J. van der Poorten, M. Mendès France. *Folds !* Math. Intell. **4** (1982), 130–138, 173–181, 190–195.

[E-R-S] P. Erdös, A. Rényi, P. Szüsz, *On Engel's and Sylvester series.* Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. **1** (1957), 7–12.

[Kmo] M. Kmošek, *Rozwinieçie niektórych liczb niewymiernych na ulamki lańcuchowe.* Thèse (en polonais), Uniwersytet Warszawski, Varsovie, (1979).

[Kö] G. K öhler, *Some More Predictable Continued Fractions.* Mh. Math. **89**, (1980), 95–100.

[La] S. Lang, *Diophantine Geometry.* Interscience Publishers (1962).

[Li-St] P. Liardet, P. Stambul, *Algebraic computations with continued fractions.* Journal of Number Theory **73** (1998), 92–121.

[Lu] E. Lucas, *Théorie des Nombres.* Gauthier-Villars (1891).

[Me-Sh] M. Mendès france, J.O. Shallit, *Wire Bending.* Journal of Combinatorial Theory Series **A 50** (1989), 1–23.

[Pe] O. Perron, *Irrationalzahlen.* De Gruyter, Berlin et Leipzig, deuxième édition (1939), 116–122.

[Qu] M. Queffélec, *Transcendance des fractions continues de Thue-Morse*, J. Number Theory **73** (1998), 201–211.

[Sc] W. Schmidt, *On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals.* Acta Math. **119** (1967), 27–50.

[Sh1] J.O. Shallit, *Real numbers with bounded partial quotients : a survey.* The Mathematical Heritage of Friedrich Gauss, G. M. Rassias, editor, World Scientific Publishing (1991).

[Sh2] J.O. Shallit, *Simple continued fractions for some irrational numbers.* J. Number Theory **11** (1979), 209–217.

[Sh3] J.O. Shallit, *Simple continued fractions for some irrational numbers II.* J. Number Theory **14** (1982), 228–231.

[Sh4] J.O. Shallit, *Explicit descriptions of some continued fractions.* Fibonacci Quart. **20** (1982), 77–81.

[Si] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers.* Institute of Math. of Polish Acad. of Sciences (1964).

[Ta] J. Tamura, *Explicit formulae for Cantor series representing quadratic irrationals.* Number theory and combinatorics, Japan, World Scientific Publishing Co. (1984), 369–381.

[VdP] A.J. Van der Poorten, *An introduction to continued fractions.* Diophantine Analysis, J.H. Loxton and A.J. van der Poorten, editors, Cambridge University press (1986), 99–138.

Pierre Liardet & Pierre Stambul
Université de Provence, CMI
39, rue Joliot-Curie
F-13453 MARSEILLE cedex 13
E-mail : `liardet@gyptis.univ-mrs.fr`
`Stambul.pierre@wanadoo.fr`