Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 167–187

Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n

par Guy HENNIART

Résumé. Nous développons une variante de notre démonstration des conjectures de Langlands pour GL_n sur les corps p-adiques. Cette variante soulève d'intéressants problèmes de plongement avec ramification prescrite. Nous examinons également les propriétés de naturalité de la correspondance locale et des conséquences globales de cette variante.

Abstract. We propose a variant to our proof of the Langlands conjecture for GL_n over p-adic fields, a variant which raises some interesting embedding problems with prescribed ramification. We also investigate various naturality properties of the local correspondence and the global consequences of that proof.

1. Introduction

(1.1) Aux Journées arithmétiques de Rome, dont je tiens à remercier ici les organisateurs, j'ai présenté les progrès récents, et spectaculaires, sur ce qu'il est convenu d'appeler "programme de Langlands", qui relie représentations galoisiennes et représentations automorphes, sur les corps globaux.

D'une part M. Harris et R. Taylor ont établi [HaT] la correspondance de Langlands pour GL_n sur les corps p-adiques ainsi que de nouveaux cas pour des corps de nombres. D'autre part, L. Lafforgue [Lf] a complètement démontré cette correspondance pour les corps globaux de caractéristique non nulle. Par ailleurs encore B. Conrad, lors de ces mêmes Journées, annonçait que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est modulaire, et K. Buzzard que certaines fonctions L d'Artin icosaédrales sont entières, deux résultats qui relèvent aussi du programme de Langlands.

Cependant le présent article n'est pas la rédaction de l'exposé donné aux Journées arithmétiques. Le lecteur pourra, outre les articles originaux, consulter les rapports excellents et détaillés de H. Carayol [Ca2] et G. Laumon [Lm] au Séminaire Bourbaki (voir aussi [He6]).

(1.2) Je voudrais présenter ici une preuve de la correspondance pour GL_n sur les corps p-adiques. Il s'agit d'une variante de la méthode de [He5], méthode qui est plus directe et plus simple que celle de [HaT], mais ne

Manuscrit reçu le 1er décembre 1999.

donne pas de modèle géométrique. Cette variante est plus naturelle, elle a quelques conséquences globales que nous développerons, et surtout elle est reliée à des problèmes de plongement qui ne semblent pas avoir été suffisamment explorés. En l'exposant, nous serons amenés à rappeler le principe des démonstrations de [HaT] et [He5], ainsi que les principales étapes de [He5], de sorte que cet article comporte en fait un bref rapport sur les preuves de la correspondance locale.

(1.3) Terminons cette simple introduction par un énoncé précis du résultat à établir.

Nous fixons un nombre premier p, une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, et une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Nous notons W_K le groupe de Weil de $\overline{K}$ sur K et normalisons l'application de réciprocité $\tau_K : W_K \to K^\times$ de la théorie des corps de classes de sorte que les substitutions de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes de K. Enfin nous fixons un quasicaractère additif non trivial ψ de K dans $\mathbb{C}^\times$.

Pour chaque entier $n \geq 1$, nous notons $\mathcal{G}_K^0(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations complexes continues de W_K, de dimension n, et $\mathcal{A}_K^0(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations complexes lisses irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(K)$. L'application de réciprocité τ_K donne une bijection $\chi \mapsto \pi(\chi)$ entre $\mathcal{G}_K^0(1)$, identifié à l'ensemble des quasicaractères $W_K \to \mathbb{C}^\times$, et $\mathcal{A}_K^0(1)$, identifié à l'ensemble des quasicaractères $K^\times \to \mathbb{C}^\times$. L'énoncé suivant, expression des conjectures de Langlands, généralise cette bijection à tout entier $n \geq 2$.

Théorème. *Il existe une famille $(\pi_n)_{n\geq 1}$ de bijections, de $\mathcal{G}_K^0(n)$ sur $\mathcal{A}_K^0(n)$, caractérisée par les propriétés suivantes.*
(i) *Pour $n \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}_K^0(n)$, le déterminant de σ vu comme quasicaractère de W_K, correspond au quasicaractère central $\omega_{\pi(\sigma)}$ de $\pi(\sigma) = \pi_n(\sigma)$, par la théorie du corps de classes :*

$$\det \sigma = \omega_{\pi(\sigma)} \circ \tau_K .$$

(ii) *Pour $n \geq 1$, $\sigma \in \mathcal{G}_K^0(n)$ et $\chi \in \mathcal{G}_K^0(1)$, on a*

$$\pi_n(\sigma \otimes \chi) = \pi_n(\sigma) \otimes (\pi_1(\chi) \circ \det) .$$

(iii) *Pour $n \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}_K^0(n)$, on a*

$$\pi_n(\sigma^\vee) = \pi_n(\sigma)^\vee$$

(iv) *Pour $n, n' \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}_K^0(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_K^0(n')$, on a*
(ivL) $L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), s)$
(ivε) $\varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \varepsilon(\pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), s, \psi)$.

Dans cet énoncé, l'exposant $^\vee$ indique la contragrédiente. Pour une représentation continue σ de W_K, $L(\sigma, s)$ est son facteur L d'Artin, et $\varepsilon(\sigma, s, \chi)$ la constante locale définie par Langlands et Deligne. Si π, π' sont deux représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_{n'}(K)$ respectivement, les facteurs $L(\pi \times \pi', s)$ et $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \chi)$ sont ceux définis par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika [JPSS] (voir aussi Shahidi [Sh]).

(1.4) Au § 2, nous expliquons le principe des démonstrations de [HaT], [He5] et du présent article. Cette dernière approche est développée aux §§ 3 à 5, et des conséquences globales données au § 6. Voir 4.5 pour des commentaires détaillés sur la différence entre l'approche présente (basée sur [He7]) et celle de [He5]. Le § 7 énonce des propriétés de fonctorialité de la correspondance locale.

2. Le principe local-global

(2.1) Notre résultat sera obtenu par une méthode globale, analogue à la dérivation de la théorie locale du corps de classes à partir de l'approche classique de la théorie globale (voir par exemple [Lg]). Tant dans [HaT] que dans [He5] et ici-même, l'idée est d'obtenir, pour certains corps de nombres F, des cas faibles de la correspondance globale conjecturée par Langlands, et d'en déduire le résultat local complet.

Plus précisément, fixons un corps de nombres totalement réel F_+, un corps quadratique imaginaire E, et posons $F = F_+E$. Grâce à l'étude, par R. Kottwitz [Ko], de certaines variétés de Shimura sur F en des places de bonne réduction, Clozel a montré [Cl1, Cl2, voir aussi CL] qu'à certaines représentations automorphes cuspidales Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ on peut associer des représentations galoisiennes dont les facteurs L en presque toutes les places correspondent à ceux de Π. Plus exactement, si l'on fixe un nombre premier ℓ et une identification de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ à $\mathbb{C}$, on peut associer à certaines représentations Π comme plus haut une représentation galoisienne ℓ-adique $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$, de dimension un multiple an de n (autrement dit un homomorphisme continu de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ dans $\mathrm{GL}_{an}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$), non ramifiée presque partout, et telle qu'en presque toute place finie v de F où Π et Σ sont non ramifiées on ait

$$\text{(L)} \qquad L\left(\Sigma_v, s - \frac{n-1}{2}\right) = L(\Pi_v, s)^a \,.$$

L'idée est que d'abord on doit pouvoir prendre $a = 1$ et qu'ensuite, même en une place finie fixée v de F où Π_v est ramifiée, le composant Σ_v, à isomorphisme près, ne devrait dépendre que de Π_v, et non de la situation globale considérée, et correspondre à Π_v par la correspondance locale conjecturée pour F_v, correspondance légèrement modifiée pour tenir compte du décalage de la variable s dans l'identité (L) plus haut. Il faut aussi espérer obtenir suffisamment d'exemples de paires (Π, Σ) vérifiant (L) pour en tirer, pour le complété F_v de F, la correspondance locale toute entière.

(2.2) Ce principe, connu depuis longtemps, n'avait pas connu, jusqu'à récemment, d'applications au-delà de GL_2. Les travaux de M. Harris lui ont redonné vigueur. Dans [Ha1], poursuivant un programme suscité par H. Carayol [Ca1], Harris montre que l'étude de variétés de Shimura sur F bien choisies mène, en une place finie fixée v de F, à un modèle géométrique local qui permet d'associer à un élément π de $\mathcal{A}^0_{F_v}(n)$ une représentation semisimple $\sigma(\pi)$ du groupe de Weil absolu de F_v, bien définie à isomorphisme près. Des arguments de comptage et de fonctorialité [He3, He4, BHK] montrent alors que $\sigma(\pi)$ est irréductible et qu'on obtient une bijection naturelle $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ de $\mathcal{A}^0_{F_v}(n)$ sur $\mathcal{G}^0_{F_v}(n)$ qui possède toutes les propriétés exigées dans le théorème 1.3, sauf peut-être la préservation des facteurs epsilon (ivε).

Dans [Ha2], Harris tire avantage du comportement, vis-à -vis du changement de base et de l'induction automorphe, de la construction $\Pi \mapsto \Sigma(\Pi)$, pour montrer que cette propriété (ivε) est vérifiée, pourvu que n et n' soient premiers à p. Cela donne la conjecture de Langlands pour $n < p$, c'est-à-dire que le théorème 1.3 est valable pour une famille de bijections de $\mathcal{G}^0_K(n)$ sur $\mathcal{A}^0_K(n)$, pour $n < p$. De plus et surtout, M. Harris y montre que pour prouver l'identité (ivε) dans tous les cas, il "suffit" d'obtenir des renseignements supplémentaires sur la géométrie des variétés de Shimura, en les places de **mauvaise** réduction.

(2.3) M. Harris et R. Taylor, dans [HaT], remplissent avec succès ce programme. S'inspirant de constructions données par Deligne dans le cas $n = 2$, ils considèrent en fait d'autres variétés de Shimura du même type, qui mènent à un modèle géométrique local différent, mais pour lesquelles ils réussissent à analyser presque complètement la mauvaise réduction. Cette prouesse leur permet, non seulement de prouver le théorème 1.3, mais aussi, comme le suggérait Carayol [Ca1], de montrer que la correspondance locale $\pi \mapsto \sigma(\pi)$, se réalise dans certains espaces de cycles évanescents à la Berkovich, sur des espaces de modules de groupes formels construits par Drinfeld.

(2.4) En décembre 1998, en donnant quelques exposés sur une première version de [HaT], je me suis aperçu qu'analyser la mauvaise réduction des variétés de Shimura n'est pas nécessaire pour obtenir le théorème 1.3 ; on peut procéder directement à partir des résultats de Clozel, en utilisant les constructions de [Ha2]. Bien entendu, on ne trouve pas alors de modèle géométrique pour la correspondance locale, ni non plus de renseignements nouveaux sur les variétés de Shimura. Mais cette démonstration [He5] est assez satisfaisante, en ce qu'elle montre que le principe local-global esquissé en 2.1 suffit bien à obtenir des résultats locaux complets.

Dans les §§ suivants, nous décrivons une variante de la preuve de [He5], qui a quelques conséquences globales prouvées au § 6. Les détails techniques de la preuve sont concentrés au § 5.

3. Preuve du théorème principal : arguments locaux

(3.1) Rappelons tout d'abord qu'une famille de bijections π_n de $\mathcal{G}_K^0(n)$ sur $\mathcal{A}_K^0(n)$ vérifiant les propriétés du théorème 1.3 est forcément unique. En effet, la propriété (i) implique que π_1 est donnée par la théorie du corps de classes, et le résultat principal de [He4] dit que, si n est un entier, $n \geq 2$, et que l'on a construit des bijections $\pi_r : \mathcal{G}_K^0(r) \to \mathcal{A}_K^0(r)$, pour $r = 1, \ldots, n-1$, vérifiant les propriétés (i) à (iii), alors il existe au plus une application $\pi_n : \mathcal{G}_K^0(n) \to \mathcal{A}_K^0(n)$ qui vérifie, quel que soit l'entier n', $1 \leq n' \leq n-1$ et quels que soient $\sigma \in \mathcal{G}_K^0(n)$ et $\sigma' \in \mathcal{G}_K^0(n')$, l'identité

$$\varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \varepsilon(\pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), s, \psi)\,.$$

D'autre part, les arguments de comptage de [He2] impliquent qu'il suffit de construire des applications **injectives** π_n de $\mathcal{G}_K^0(n)$ dans $\mathcal{A}_K^0(n)$, vérifiant les propriétés (i) à (iv) : elles sont alors automatiquement bijectives.

(3.2) Dans l'approche de [Ha2], et ici également, il est essentiel de ne pas se limiter aux représentations irréductibles de W_K. Nous considérons plus généralement des représentations semisimples, et nous notons $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ le groupe de Grothendieck correspondant, que nous identifions au $\mathbb{Z}$-module libre de base l'union disjointe $\mathcal{G}_K^0$ des $\mathcal{G}_K^0(n)$, $n \geq 1$.

Ce groupe est muni d'un certain nombre de structures intéressantes. Pour $\sigma \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$, on définit son degré $\deg(\sigma)$, sa contragrédiente $\sigma^\vee \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$, son déterminant $\det\sigma \in \mathcal{G}_K^0(1)$, son facteur L, $L(\sigma, s)$ et, pour tout caractère additif non trivial ψ de K, son facteur $\varepsilon(\sigma, s, \psi)$: on procède par $\mathbb{Z}$-linéarité à partir des définitions déjà données sur $\mathcal{G}_K^0$. De plus $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ est muni du produit tensoriel des représentations semisimples de W_K, et d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{G}}$ pour lequel la base $\mathcal{G}_K^0$ est orthonormée. Notons que pour $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$, le produit scalaire $\langle \sigma, \sigma' \rangle_{\mathcal{G}}$ n'est autre que l'ordre du pôle en $s = 0$ du facteur $L(\sigma \otimes \sigma'^\vee, s)$: c'est clair pour $\sigma, \sigma' \in \mathcal{G}_K^0$ et le cas général s'en déduit par $\mathbb{Z}$-linéarité.

(3.3) On effectue des constructions analogues sur l'autre versant. On note $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base l'union disjointe $\mathcal{A}_K^0$ des $\mathcal{A}_K^0(n)$, pour $n \geq 1$, et pour $\pi \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$, on définit son degré $\deg(\pi)$ (qui vaut n pour $\pi \in \mathcal{A}_K^0(n)$), sa contragrédiente $\pi^\vee$, son caractère central ω_π. Pour $\chi \in \mathcal{A}_K^0(1)$ on note $\chi\pi$ l'élément de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ obtenu par torsion de π par $\chi \circ \det$. Toutes ces constructions sont linéaires en π. Pour π, π' dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ on définit aussi les facteurs $L(\pi \times \pi', s)$ et $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$ par leur valeur sur la base et $\mathbb{Z}$-bilinéarité. On munit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{A}}$ pour lequel la base $\mathcal{A}_K^0$ est orthonormée. Pour π, π' dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$, $\langle \pi, \pi' \rangle_{\mathcal{A}}$ n'est autre que l'ordre du pôle en $s=0$ de $L(\pi\times\pi'^{\vee},s)$: cela découle de [JPSS, Prop. 8.1] pour π,π' dans $\mathcal{A}_K^0$, et le cas général s'en déduit par $\mathbb{Z}$-bilinéarité.

(3.4) Nous allons prouver, par voie globale, le résultat suivant :

Théorème. *Il existe un homomorphisme de groupes* **injectif** $\sigma\mapsto\pi(\sigma)$ *de* $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ *dans* $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ *qui vérifie les conditions suivantes*
(i) *Pour* $\sigma\in\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ *et* $\chi\in\mathcal{A}_K^0(1)$, *on a :*

$$\deg\pi(\sigma)=\deg(\sigma),\pi(\sigma^{\vee})=\pi(\sigma)^{\vee},\det\sigma=\omega_{\pi(\sigma)}\circ\tau_K \quad \textit{et } \chi\pi(\sigma)=\pi((\chi\circ\tau_K)\otimes\sigma)$$

(ii) *Pour* $\sigma,\sigma'\in\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$, *on a*

$$\begin{aligned}\langle\pi(\sigma),\pi(\sigma')\rangle_{\mathcal{A}} &= \langle\sigma,\sigma'\rangle_{\mathcal{G}}\\ L(\pi(\sigma)\times\pi(\sigma'),s) &= L(\sigma\otimes\sigma',s)\end{aligned}$$

et pour tout caractère additif non trivial ψ *de* K,

$$\varepsilon(\pi(\sigma)\times\pi(\sigma'),s,\psi)=\varepsilon(\sigma\otimes\sigma',s,\psi).$$

(3.5) Montrons que le théorème 1.3 en est une conséquence. Soit $\sigma\in\mathcal{G}_K^0(n)$. On a $\langle\sigma,\sigma\rangle_{\mathcal{G}}=1$ d'où $\langle\pi(\sigma),\pi(\sigma)\rangle_{\mathcal{A}}=1$ également, et $\pm\pi(\sigma)$ appartient à $\mathcal{A}_K^0$. Comme on a aussi $\deg\pi(\sigma)=\deg\sigma$, on voit que $\pi(\sigma)$ appartient à $\mathcal{A}_K^0(n)$. Si σ' est un autre élément de $\mathcal{G}_K^0(n)$ tel que $\pi(\sigma)=\pi(\sigma')$, alors $\langle\pi(\sigma),\pi(\sigma')\rangle_{\mathcal{A}}=1$ d'où $\langle\sigma,\sigma'\rangle_{\mathcal{G}}=1$ et $\sigma=\sigma'$. On obtient donc, par restriction, pour chaque entier $n\geq 1$, une application injective $\sigma\mapsto\pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_K^0(n)$ dans $\mathcal{A}_K^0(n)$, et cette famille d'applications vérifie bien les propriétés (i) à (iv) du théorème 1.3. Par ce qui a été rappelé en 3.1, cela implique le théorème 1.3 en entier.

4. Du global au local

(4.1) Nous prouvons le théorème 3.4 par voie globale, prenant comme corps de base un corps de nombres F dont un complété est K. Nous verrons F comme sous-corps du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$, et noterons W_F le groupe de Weil de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur F, et $\tau_F : W_F\to\mathbb{A}_F^{\times}/F^{\times}$ l'application de réciprocité (normalisée de façon compatible à la normalisation locale). Enfin, nous fixons un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{A}_F$, trivial sur F.

(4.2) Soient Σ une représentation complexe continue de degré n de W_F, et Π une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. On dit que Σ et Π sont associées si, pour presque toute place finie v de F où les composants locaux Σ_v et Π_v sont non ramifiés, on a $L(\Sigma_v,s)=L(\Pi_v,s)$. Autrement dit, en presque toute place v de F, Σ_v et Π_v se correspondent par la correspondance de Langlands non ramifiée. Cela implique immédiatement que les contragrédientes $\Sigma^{\vee}$ et $\Pi^{\vee}$ sont associées, et qu'on a $\det\Sigma=\omega_{\Pi}\circ\tau_F$, où

ω_Π est le caractère central de Π. De plus, si χ est un quasicaractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, alors $(\chi\circ\tau_F)\otimes\Sigma$ et $(\chi\circ\det)\otimes\Pi$ sont associées.

Si Σ est fixée il existe, à isomorphisme près, au plus une représentation automorphe isobare de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ associée à Σ. Si Π est fixée, il existe, à isomorphisme près, au plus une représentation complexe continue semisimple de degré n de W_F, associée à Π.

(4.3) Le résultat suivant est tiré dans [He5] des considérations sur les fonctions L de [He2, § 3], dans le cas où Σ et Σ' sont irréductibles, et Π,Π' cuspidales. La généralisation présente n'est pas nécessaire à la preuve du théorème 3.4, mais elle est importante pour les applications globales du § 6. La preuve est une variante facile de celle de [He5] ; elle est donnée en 4.4.

Théorème. *Soient* Σ,Σ' *deux représentations complexes continues unitaires de* W_F*, de degrés respectifs* n *et* n'*, et soient* Π,Π' *deux représentations automorphes unitaires, induites de cuspidales au sens de [AC,III], de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ *et* $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_F)$ *respectivement. On suppose que* Σ *et* Π *d'une part,* Σ' *et* Π' *d'autre part, sont associées. Alors, pour toute place finie* v *de* F*, on a*

$$\begin{aligned} L(\Pi_v\times\Pi'_v,s) &= L(\Sigma_v\otimes\Sigma'_V,s)\\ L(\Pi_v^\vee\times\Pi'^\vee_v,s) &= L(\Sigma_v^\vee\otimes\Sigma'^\vee_v,s)\\ \varepsilon(\Pi_v\times\Pi'_v,s,\Psi_v) &= \varepsilon(\Sigma_v\otimes\Sigma'_v,s,\Psi_v). \end{aligned}$$

Remarque. Si χ et χ' sont des quasicaractères de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, alors le résultat du théorème reste vrai pour $(\chi\circ\tau_F)\otimes\Sigma$, $(\chi'\circ\tau_F)\otimes\Sigma'$, $(\chi\circ\det)\otimes\Pi$, $(\chi'\circ\det)\otimes\Pi'$ respectivement. En effet un quasicaractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ est produit d'un caractère (unitaire) par un quasicaractère réel $x\mapsto|x|_F^\alpha$, où $|\ |_F^\alpha$ se traduit simplement par un décalage $s\mapsto s+\alpha$ de la variable s dans les facteurs L et ε de paires , du côté galoisien comme du côté automorphe.

(4.4) Prouvons le théorème 4.3. On suit le raisonnement de [He5, § 2], et on voit qu'il suffit de prouver le résultat suivant.

Théorème. *Soient* F *un corps de nombres,* $\overline{F}$ *une clôture algébrique de* F*, et* W_F *le groupe de Weil de* $\overline{F}$ *sur* F*. Soient* Σ *une représentation continue unitaire de degré* n *de* W_F*, et* Π *une représentation automorphe unitaire induite de cuspidales au sens de* [AC,III]. *Supposons que* Σ *et* Π *soient associées. Alors, pour toute place finie* v *de* F*,* Π_v *est induite parabolique d'une représentation supercuspidale unitaire d'un sous-groupe de Levi de* $\mathrm{GL}_n(F_v)$.

Pour obtenir ce théorème, on suit la démonstration de [He5, Appendice], qui établit le résultat dans le cas particulier où Σ est irréductible et Π cuspidale. Comme en [He5, A.1], le fait que Σ_v soit unitaire impose que le facteur $\gamma(\Pi_v\times\Pi_v^\vee,s,\psi_v)$ ait un zéro en $s=0$, un pôle en $s=1$ et ni zéro ni pôle en tout autre nombre réel. D'autre part, comme Π est unitaire et induite de cuspidales, Π_v est unitaire et générique. Le raisonnement de [He5, A.2 et A.3] s'applique alors à l'identique.

(4.5) Considérons l'ensemble $\Gamma(F)$ des couples (Σ, Π) de la forme $((\chi \circ \tau_F) \otimes \Sigma', (\chi \circ \det) \otimes \Pi')$, où χ est un quasicaractère de $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$, Σ' une représentation complexe continue unitaire de dimension n de W_F, et Π' une représentation automorphe unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidales, telle que Σ' et Π' soient associées ; alors Σ et Π le sont aussi.

Soit $(\Sigma, \Pi) \in \Gamma(F)$. En une place finie v de F, le composant Σ_v est semisimple, et on peut considérer sa classe $[\Sigma_v]$ dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v)$; on la note $\varphi_\mathcal{G}(\Sigma, \Pi)$. De même, le composant Π_v est induite parabolique de supercuspidales : il existe une partition $n = n_1 + \cdots + n_r$ de n et, pour $i = 1, \ldots, r$, une représentation lisse irréductible supercuspidale π_i de $\mathrm{GL}_{n_i}(F_v)$ telles que Π_v soit induite, à partir du sous-groupe triangulaire supérieur dont les blocs diagonaux sont de tailles successives $n_1, \ldots, n_r$, de la représentation définie par $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$. La somme $[\pi_1] + \cdots + [\pi_r]$ dans $\mathcal{R}_\mathcal{A}(F_v)$, où $[\pi_i]$ désigne la classe de π_i dans $\mathcal{A}^0_{F_v}$, est déterminée par Π_v ; on la note $[\Pi_v]$ ou $\varphi_\mathcal{A}(\Sigma, \Pi)$.

On a ainsi défini deux applications $\varphi_\mathcal{G}$ et $\varphi_\mathcal{A}$ de $\Gamma(F)$ dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v)$ et $\mathcal{R}_\mathcal{A}(F_v)$ respectivement.

(4.6) En suivant [He5, 2.8] on prouve alors aussitôt, grâce au théorème 4.3, le résultat suivant.

Théorème. *Soient F un corps de nombres, et v une place finie de F. Notons $\mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v, F)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v)$ engendré par l'image de $\varphi_\mathcal{G}$, et $\mathcal{R}_\mathcal{A}(F_v, F)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}_\mathcal{A}(F_v)$ engendré par celle de $\varphi_\mathcal{A}$. Alors il existe un unique isomorphisme de groupes $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v, F)$ dans $\mathcal{R}_\mathcal{A}(F_v, F)$ tel qu'on ait $\varphi_\mathcal{A}(\Sigma, \Pi) = \pi(\varphi_\mathcal{G}(\Sigma, \Pi))$ pour $(\Sigma, \Pi) \in \Gamma(F)$. De plus, pour $\sigma \in \mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v, F)$, on a*

$$\deg \pi(\sigma) = \deg \sigma, \pi(\sigma^\vee) = \pi(\sigma)^\vee, \det \sigma = \omega_{\pi(\sigma)} \circ \tau_{F_v}$$
$$\text{et } \chi\pi(\sigma) = \pi((\chi \circ \tau_{F_v}) \otimes \sigma) \text{ pour tout quasicaractère } \chi \text{ de } F_v^\times.$$

Pour $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v, F)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \pi(\sigma), \pi(\sigma') \rangle_\mathcal{A} &= \langle \sigma, \sigma' \rangle_\mathcal{G}, \\ L(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s) &= L(\sigma \otimes \sigma', s), \end{aligned}$$

et pour tout caractère additif non trivial ψ de F_v,

$$\varepsilon(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s, \psi) = \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi).$$

(4.7) Pour obtenir le théorème 3.4, il suffit maintenant de voir qu'il existe un corps de nombres F, une place finie v de F et un isomorphisme topologique

φ de F_v sur K, tels que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$ soit $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ tout entier : le théorème 3.4 se déduit du théorème 4.6 par transport de structure via φ.

Nous prouverons cette propriété au § 5, **quand** p **est impair**, en nous appuyant sur les résultats de [He7]. Le cas où p vaut 2 sera un peu plus compliqué, les résultats de [He7] étant moins précis : voir ci-dessous 4.8 et 4.9.

C'est ici que la démonstration présente diffère sensiblement de celle de [He5]. Dans [He5], on montrait simplement que pour une partie fixée J quelconque de $\mathcal{G}_K^0$, on pouvait trouver F, v, φ comme plus haut, de sorte que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$ donne, par transport de structure via φ, une partie de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ contenant J. On obtenait ainsi une application partielle $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de J dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$. Il fallait ensuite prouver que l'on pouvait faire croître J, en changeant éventuellement F, v et φ, de façon que l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ ne dépende pas de ces choix changeants. Cela entraînait une démonstration peu naturelle.

Même si elle utilise les résultats assez élaborés de [He7] (mais ceux-là sont des résultats de théorie algébrique des nombres, n'ayant *a priori* rien à voir avec les représentations automorphes), la variante proposée ici est plus directe. Surtout, elle permet d'obtenir des conséquences globales pour un corps de nombres fixé (voir § 6), ce que la preuve de [He5] ne permettait pas.

(4.8) Expliquons maintenant comment les résultats du § 5 permettent d'obtenir le théorème 4.6 et, du coup, notre résultat principal 1.3, **quand** p **vaut** 2.

Reprenons la situation de 4.1 (avec p quelconque pour l'instant) et considérons une extension cyclique F' de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$; notons $W_{F'}$ le groupe de Weil de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur F'. Si Σ est une représentation complexe continue unitaire de W_F, sa restriction $\Sigma_{F'}$ à $W_{F'}$ est une représentation complexe continue unitaire de $W_{F'}$. Si Π est une représentation automorphe unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidales, alors son changement de base $\Pi_{F'}$ [AC,III] est une représentation automorphe unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{F'})$, induite de cuspidales.

On en déduit aussitôt que si (Σ, Π) est un élément de $\Gamma(F)$, alors le couple $(\Sigma_{F'}, \Pi_{F'})$ appartient à $\Gamma(F')$.

Soient v une place finie de F et v' une place de F' au-dessus de v. Alors la restriction à $W_{F'_{v'}}$ des représentations de W_{F_v} induit une application $\mathrm{Res}_{F'_{v'}}^{F_v}$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F'_{v'})$, et, de manière parallèle, la théorie locale du changement de base [AC, chap. I] induit une application $BC_{F'_{v'}}^{F_v}$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F_v)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F'_{v'})$. Pour $(\Sigma, \Pi) \in \Gamma(F)$, on a, en désignant encore par $\varphi_{\mathcal{G}}$ et $\varphi_{\mathcal{A}}$ les applications analogues aux précédentes pour la place v' de F',

$$\varphi_{\mathcal{G}}(\Sigma_{F'}, \Pi_{F'}) = \mathrm{Res}_{F'_{v'}}^{F_v}(\varphi_{\mathcal{G}}(\Sigma, \Pi))$$

et

$$\varphi_{\mathcal{A}}(\Sigma_{F'}, \Pi_{F'}) = BC^{F_v}_{F'_{v'}}(\varphi_{\mathcal{A}}(\Sigma, \Pi)).$$

C'est évident pour $\varphi_{\mathcal{G}}$, et pour $\varphi_{\mathcal{A}}$ cela découle de la compatibilité entre changement de base global et changement de base local [AC, Chap. III].

Si l'inclusion de F_v dans $F'_{v'}$ est un isomorphisme, alors on peut se permettre d'identifier $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ à $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F'_{v'})$ via $\mathrm{Res}^{F_v}_{F'_{v'}}$, et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F_v)$ à $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F'_{v'})$ via $BC^{F_v}_{F'_{v'}}$. Des formules précédentes, on déduit alors que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F'_{v'}, F')$ contient $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$, que $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F'_{v'}, F')$ contient $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F_v, F)$ et que l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F'_{v'}, F')$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F'_{v'}, F')$, obtenue à partir de $\Gamma(F')$, prolonge l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F_v, F)$ obtenue à partir de $\Gamma(F)$.

(4.9) Supposons maintenant que p vaille 2, c'est-à-dire que K soit une extension finie de $\mathbb{Q}_2$.

Nous montrerons au § 5 qu'on peut trouver un corps de nombres F, une place finie v de F, et un isomorphisme topologique φ de F_v sur K, qui vérifient la propriété **(P)** suivante :

(P) Soit S une partie finie de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$. Alors il existe une suite finie $F = F_0 \subset \ldots \subset F_r$ d'extensions quadratiques successives dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et pour $i = 0, \ldots, r$ une place v_i de F_i avec $v_0 = v$, vérifiant (i) et (ii) ci-après.
(i) Pour $i = 0, \ldots, r-1, v_{i+1}$ est au-dessus de v_i et l'inclusion de F_{i,v_i} dans $F_{i+1,v_{i+1}}$ est un isomorphisme.
(ii) La partie S est incluse dans le sous-module

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_{r,v_r}, F_r) \text{ de } \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_{r,v_r}) \text{ (identifié à } \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)).$$

Dans les conditions précédentes, on note $\pi(\sigma)$ l'image de $\sigma \in S$ par l'application déduite de $\Gamma(F_r)$. Comme le composé de deux extensions de F obtenues par extensions quadratiques successives est aussi obtenu par extensions quadratiques successives, on voit aussitôt que $\pi(\sigma)$ ne dépend pas des choix effectués. Faisant croître S, on définit l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F_v)$ et on la transporte de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$. Grâce au théorème 4.5, et aux faits rappelés en 4.1, l'application de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ ainsi obtenue a toutes les propriétés requises pour prouver le théorème 1.3.

Remarque. Des considérations développant les précédentes donneront les résultats globaux du § 6. D'autre part le comportement de la correspondance de Langlands vis-à-vis du changement de base et de l'induction automorphe [AC, Chap. III et HH] sera examiné au § 7.

5. Constructions globales

(5.1) Dans ce § 5, nous rappelons les constructions de [Ha2,§ 4], et nous montrons comment elles permettent, en appliquant [He6], de prouver les résultats annoncés en 4.7 et 4.9.

On fixe un corps de nombres totalement réel F_+, muni d'une place finie v de caractéristique résiduelle p, et un corps quadratique imaginaire I, scindé en p. On note F' le corps F_+I, et on choisit une place de F', encore notée v, au-dessus de la place v de F_+. On choisit également un corps quadratique réel R, scindé en p et linéairement disjoint de F_+, et on note F le corps $F'R = F_+IR$, et v, v' les deux places de F au-dessus de la place v de F'.

Les constructions de [Ha2,§ 4] donnent alors le résultat suivant.

Théorème. *Soit L_+ un corps de nombres totalement réel, extension galoisienne finie de F_+. Posons $L' = L_+I$, $L = L'R$, et supposons L_+ et R linéairement disjoints. Supposons qu'au-dessus de la place v de F_+, L_+ n'ait qu'une seule place, encore notée v, dont le groupe de décomposition soit* $\mathrm{Gal}(L_+/F_+)$ *tout entier. Notons encore v l'unique place de L au-dessus de la place v de F. Alors tout élément de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ qui est induit à partir d'un caractère du groupe de Weil d'une extension intermédiaire entre F_v et L_v appartient à $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$.*

Voir [He5,§ 3, HaT, § 12] et aussi ci-dessous 5.5 et sq. pour quelques commentaires sur les arguments de [Ha1] et [Ha2] menant à cette assertion.

(5.2) Soit K le corps local qui nous intéresse, extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On peut certainement trouver un corps de nombres totalement réel F_+, muni d'une place finie v et d'un isomorphisme φ de $(F_+)_v$ avec K [He1, lemme 3.6]. Donnons-nous une extension galoisienne finie de K, ou , ce qui revient au même, une extension galoisienne finie L de $(F_+)_v$.

Comme en 5.1, fixons un corps quadratique imaginaire I scindé en p, et une place v de $F' = F_+I$ au-dessus de la place v de F_+.

(5.3) Dans un premier temps, supposons p impair et fixons un corps quadratique réel R scindé en p, linéairement disjoint de F_+, et une place v de $F = F'R$ au-dessus de la place v de F'.

Alors, d'après [He6], il existe un corps de nombres totalement réel E_+, extension galoisienne finie de F_+, linéairement disjoint de F_+R, qui n'ait qu'une seule place (encore notée v) au-dessus de la place v de F_+, dont le groupe de décomposition soit $\mathrm{Gal}(E_+/F_+)$ tout entier, et tel qu'enfin l'extension $(E_+)_v$ de $(F_+)_v$ soit isomorphe via φ à l'extension L de K.

Grâce au théorème 5.1, on déduit que tout élément de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ qui est induit à partir d'un caractère du groupe de Weil d'une extension intermédiaire entre F_v et E_v (où $E = E_+IR$ et v est la seule place de E au-dessus de la place v de F), appartient à $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$; le sous-module de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ engendré par de tels éléments est donc tout entier contenu dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F)$. Faisant varier L, on voit donc que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v, F) = \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$. Mais φ induit un isomorphisme de F_v sur K ; par transport de structure, on obtient bien le résultat annoncé en 4.7.

(5.4) Supposons maintenant $p = 2$.

Alors, d'après [He6], il existe une suite finie de corps de nombres totalement réels

$$F_+ = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_r,$$

et pour $i = 0, \ldots, r$ une place finie v_i de F_i, avec $v_0 = v$, et vérifiant (i) et (ii) ci-après :
(i) Pour $i = 0, \ldots, r-1$, F_{i+1} est une extension quadratique de F_i, v_{i+1} est une place au-dessus de v_i et l'inclusion de F_{i,v_i} dans $F_{i+1,v_{i+1}}$ est un isomorphisme.
(ii) Il existe un corps de nombres totalement réel E_+, extension galoisienne finie de F_r, n'ayant qu'une seule place au-dessus de v_r, de groupe de décomposition $\mathrm{Gal}(E_+/F_r)$ et de complété isomorphe via φ à l'extension L de $F_{r,v_r} = (F_+)_v$.

Choisissons maintenant un corps quadratique réel R scindé en p et linéairement disjoint de E_+, et posons $E = E_+IR$ et $F = F_rIR$. Si on note encore v une place de F au-dessus de la place v_r de F_r, l'inclusion de $(F_+)_v$ dans F_v est un isomorphisme, par lequel on peut identifier $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}((F_+)_v)$ à $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$. Comme précédemment, on voit que tout élement de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ qui est induit à partir d'un caractère du groupe de Weil d'une extension intermédiaire entre $(F_+)_v$ et L, appartient à $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$. Comme pour toute partie finie S de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}((F_+)_v)$ on peut trouver une extension galoisienne finie L de $(F_+)_v$ telle que tout élément de S soit combinaison linéaire de telles induites, on a bien prouvé la propriété annoncée en 4.9, ce qui termine la preuve du théorème 1.3.

(5.5) R. Taylor, et je l'en remercie, m'a signalé deux points à préciser sur la preuve du théorème 5.1 donnée dans [Ha2, § 4].

Le premier concerne le résultat global de départ, qui est un théorème dû pour l'essentiel à Clozel [Cl1, Cl2, CL], et utilisant les travaux de Kottwitz sur la bonne réduction des variétés de Shimura [Ko]. L'énoncé est le suivant, où F_+ est un corps de nombres totalement réel, I un corps quadratique imaginaire, F le corps F_+I dont on note c la conjugaison complexe. On fixe aussi un nombre premier ℓ et un isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$.

Théorème. *Soit* Π *une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. *Faisons les hypothèses suivantes :*
(i) Π^c *est équivalent à* $\Pi^\vee$ *;*

(ii) Π *est algébrique à l'infini, et régulier ;*
(iii) *à une place finie au moins, de caractéristique résiduelle scindée dans* I*, le composant de* Π *est une série discrète.*

Alors il existe un entier $a \geq 1$ *et une représentation* ℓ*-adique semisimple* $\Sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_{an}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *telle que, à presque toute place finie* v *de* F*, on ait*

$$L(\Sigma_v, s) = L\left(\Pi_v, s + \frac{n-1}{2}\right)^a.$$

Remarque. L'hypothèse d'algébricité de (ii) peut encore s'énoncer, comme dans [HaT], en disant que Π_∞ a même caractère infinitésimal qu'une représentation algébrique de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_n$. La régularité signifie alors que le caractère infinitésimal est régulier.

L'article [Ha1] présente un argument, dû à R. Taylor, pour montrer que l'on peut prendre $a = 1$. Mais cet argument nécessite des renseignements sur la théorie de Hodge-Tate ℓ-adique, qui peut-être ne sont pas établis dans la littérature dans la généralité suffisante. D'aute part supposer $a = 1$ n'est absolument pas nécessaire pour obtenir le théorème 5.1. Il convient donc de se passer de cette hypothèse.

(5.6) Le deuxième point est dans [Ha2], où on considère la situation suivante. On a une extension cyclique E_+/F_+ de corps totalement réels, et on pose $E = E_+ I$. On part d'une représentation automorphe cuspidale τ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ vérifiant les hypothèses du théorème 5.5, et on suppose que l'induite automorphe Π de τ (dans l'extension cyclique L/F), au sens de [AC,III, § 6], est cuspidale et vérifie (iii). Alors, (i) est vérifiée mais, pour des raisons de parité de n et d, il peut arriver que (ii) ne le soit pas, ce qui pose problème lors des arguments de [Ha2, § 4].

Ces deux points sont éclaircis dans [HaT,§ 12], qui montre qu'ils n'ont pas de vraie influence sur la preuve de [Ha2, § 4]. Nous reprenons ci-dessous cette démarche, parce que notre contexte est différent du contexte géométrique de [HaT]. La suite de ce § reprend brièvement les démonstrations de [Ha2, § 4] et [He5, § 3], en précisant la preuve pour les points signalés plus haut.

(5.7) Plaçons-nous donc dans les conditions du théorème 5.1. Choisissons une extension intermédiaire M_+ entre F_+ et L_+, et posons $M = M_+ IR$. Notons encore v la place de M_+ au-dessus de la place v de L_+ et la place de M au-dessus de la place v de $L = L_+ IR$. Donnons-nous un caractère quelconque λ de $(M_+)_v^\times \simeq M_v^\times$.

Grâce à [Ha2 § 4, voir aussi He5 lemme 3] on peut trouver un caractère χ de $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ qui vérifie les conditions suivantes :
(i) $\chi \circ c = \chi^{-1}$;

(ii) χ est algébrique et régulier à l'infini (condition (2) de [He5, 3.4]) ; cela signifie que pour chaque plongement τ de M dans $\mathbb{C}$, définissant donc une place infinie τ de M, on a, pour $z \in M$, $\chi_\tau(z) = (z/cz)^{p_\tau}$ pour un entier p_τ, les entiers p_τ étant distincts quand τ parcourt les plongements de M dans $\mathbb{C}$ prolongeant un même plongement de F ;
(iii) le stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(L_{v'}/F_{v'})$ de $\chi \circ N_{L_{v'}/M_{v'}}$ est réduit à $\mathrm{Gal}(L_{v'}/M_{v'})$ (bien sûr on a noté v' la place de M au-dessus de la place v' de F) ;
(iv) χ_v diffère de λ par un caractère non ramifié.

On note Σ la représentation de W_F induite par le caractère $\chi \circ \tau_M$ de W_M ; par la condition (iii) son composant $\Sigma_{v'}$ est irréductible et Σ l'est donc aussi. Tout le problème est de montrer qu'il existe une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_{[M:F]}(\mathbb{A}_F)$ associée à Σ : alors Σ_v est tordue par un caractère non ramifié de la représentation induite par λ.

(5.8) On choisit une suite de corps

$$F_+ = F_+^0 \subset F_+^1 \subset \ldots \subset F_+^r = L_+ \ ,$$

chacun cyclique de degré premier sur le précédent. C'est clairement possible puisque le groupe de Galois de L_+ sur F_+ est le même que celui de $(L_+)_v$ sur $(F_+)_v$, qui est résoluble.

On raisonne par récurrence sur l'entier j, $0 \leq j \leq r$, en prouvant que la représentation Σ_j de $W_{MF_+^j}$ induite de $\chi \circ \tau_M$ appartient à un couple (Σ_j, Π_j) de $\Gamma(FF_+^j)$. Pour $j = r$, il n'y a rien à démontrer, et pour $j = 0$, on obtient le résultat.

En fait, pour que la récurrence fonctionne, on va démontrer un résultat plus précis : à toute place à l'infini w de $F_j = FF_+^j$, les composants $\Sigma_{j,w}$ et $\Pi_{j,w}$ sont associés par la correspondance de Langlands pour les corps archimédiens. Remarquons que, comme Σ_j^c est isomorphe à $\Sigma_j^\vee$, par la condition (i) imposée à χ, on a aussi $\Pi_j \circ c \simeq \Pi_j^\vee$. De plus, comme $\Sigma_{j,v'}$ est irréductible par la condition (iii) imposée à χ, le composant $\Sigma_{j,v'}$ est supercuspidal. Enfin, la correspondance de Langlands à l'infini n'est pas rationnelle (cf. [Cl1], § 3), de sorte que Π_j n'est pas toujours algébrique à l'infini ; en fait, on vérifie aisément que, si α_j désigne le caractère norme de $\mathbb{A}_{F_j}^\times$, c'est $\Pi_j \otimes (\alpha_j \circ \det)^{(d_j-1)/2}$ qui est algébrique (et régulière) à l'infini, où l'on a posé $d_j = [M_j : F_j], M_j = MF_+^j$.

(5.9) Pour passer de $j+1$ (où $0 \leq j \leq r-1$) à j, deux cas se présentent : ou bien $M_{j+1} = M_j$, ou bien M_{j+1}/M_j est une extension cyclique de même degré premier que F_{j+1}/F_j.

Traitons d'abord le premier cas. Alors Σ_j est l'induite de Σ_{j+1}, de $W_{F_{j+1}}$ à W_{F_j}. Notons Π_j l'induite automorphe de Π_{j+1}, dans l'extension cyclique

F_{j+1}/F_j, au sens de [AC,III]. Il est clair que Σ_j et Π_j sont associées, puisque Σ_{j+1} et Π_{j+1} le sont. Que Σ_j et Π_j se correspondent à l'infini découle alors de [AC, III, § 5 et 6].

Dans le second cas, Σ_{j+1} est la restriction de Σ_j à $W_{F_{j+1}}$. Il est clair que Π_{j+1} est invariante par $\mathrm{Gal}(F_{j+1}/F_j)$ donc provient, par changement de base, d'une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_{d_j}(\mathbb{A}_{F_j})$. Par suite, Σ_j et Π se correspondent à l'infini. Par [Ha2, § 1, preuve du lemme 1.6], Π est tordue, par un caractère d'ordre fini μ de $\mathbb{A}_{F_j^\times}/F_j^\times$, d'une représentation Π' qui vérifie $\Pi'\circ c = \Pi'^\vee$.

(5.10) Supposons d'abord d_j impair. Alors Π' est algébrique et régulière à l'infini et on peut lui appliquer le théorème 5.6 : il existe un entier $a \geq 1$ et une représentation ℓ-adique semisimple

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_j) \to \mathrm{GL}_{an}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

non ramifiée presque partout, telle qu'en presque toute place w de F_j, on ait

$$(*) \qquad L(T_w, s) = L\left(\Pi'_w, s + \frac{d_j - 1}{2}\right)^a$$

Considérons la restriction U de T à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_{j+1})$; on a pour presque toute place w de F_{j+1},

$$\begin{aligned} L(U_w, s) &= L\left((\mu^{-1}\circ N_{F_{j+1}/F_j}\circ \det)\otimes \Pi_{j+1}, s + \frac{d_j-1}{2}\right)^a \\ &= L\left((\mu^{-1}\circ N_{F_{j+1}/F_j}\circ \tau_{F_{j+1}})\otimes \Sigma_{j+1}, s + \frac{d_j-1}{2}\right)^a. \end{aligned}$$

Par suite la représentation ℓ-adique U de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_{j+1})$ et la représentation complexe somme de a composants isomorphes à $((\alpha_{j+1}^{(d_j-1)/2}\cdot\mu^{-1})\circ N_{F_{j+1}/F_j})\circ \tau_{F_{j+1}}\otimes\Sigma_{j+1}$ ont les mêmes facteurs L presque partout via l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbb{C}$ du théorème 5.6. Il s'ensuit qu'il existe une représentation complexe semisimple Σ_T de W_{F_j} qui ait presque partout les mêmes facteurs L que T, et qu'elle est de la forme $\Sigma_T = ((\alpha_j^{(d_j-1)/2}\cdot\mu^{-1})\circ\tau_{F_j})\otimes\Sigma_j\otimes\left(\sum_{i=1}^a \chi_i\right)$ où chaque χ_i est un caractère de $\mathbb{A}_{F_j}^\times/F_j^\times$ trivial sur les normes de F_{j+1} à F_j.

De l'égalité $(*)$ plus haut, on déduit que la fonction $L(\Sigma_T\otimes\Sigma_T^\vee, s)$ a un pôle d'ordre a^2 en $s=0$, ce qui n'est possible que si tous les χ_i sont égaux à un même caractère χ. On voit donc que les représentations $(\chi\mu^{-1}\circ\tau_{F_j})\otimes\Sigma_j$ et Π' sont associées, ce qui implique que Σ_j et $(\chi^{-1}\circ\tau_{F_j})\otimes\Pi$ le sont aussi : on peut donc poser $\Pi_j = (\chi^{-1}\circ\tau_{F_j})\otimes\Pi$, qui est associée à Σ_j et lui correspond à l'infini.

(5.11) Supposons maintenant que d_j soit pair. Le raisonnement est analogue, mais il faut prendre garde que Π' n'est plus algébrique à l'infini.

Choisissons un caractère φ de $\mathbb{A}_{F^\times}/F^\times$ tel que $\varphi \circ c = \varphi^{-1}$, et tel que pour tout plongement τ de F dans $\mathbb{C}$, on ait $\varphi_\tau(z) = (\tau z/|\tau z|)^{\pm 1}$ pour $z \in F$ (ici la valeur absolue est la valeur absolue ordinaire).

Nous montrerons plus loin, en 5.12, l'existence d'un tel caractère. Si l'on pose $\Pi'' = (\varphi \circ N_{F_j/F} \circ \det) \otimes \Pi'$, alors Π'' est algébrique et régulière à l'infini, et vérifie $\Pi'' \circ c \simeq \Pi''^\vee$. On applique alors le théorème 5.6 à la représentation Π'', et on remplace Π' par Π'' dans le raisonnement de 5.10. La conclusion est la même.

(5.12) Il nous reste à prouver l'existence de φ, qui n'est pas immédiate. Soient $x \in F_\infty^\times$, $y \in F^\times$, $z \in \mathbb{A}_{F^\times}$ tels que $x = y \cdot z \cdot cz$; alors on a $cx/x = cy/y$, ce qui implique $cy = y$, $cx = x$. Notant F^c le sous-corps de F fixé par c, on obtient $y \in F^{c\times}$, $x \in F_\infty^{c\times}$.

Notons η le caractère quadratique de $\mathbb{A}_{F^c}^\times/F^{c\times}$ définissant l'extension quadratique F/F^c. On a $\eta(x) = \eta(y) = 1$ d'où $\eta_\infty(x) = 1$.

Choisissons un caractère φ_∞ de $F_\infty^\times$ tel que pour chaque plongement τ de F on ait $\varphi_\tau(z) = (\tau z/|\tau z|)^{\pm 1}$ pour $z \in F$; alors φ_∞ étend le caractère η_∞ de $F_\infty^{c\times}$, de sorte que, par ce qui précède, φ_∞ est trivial sur le noyau H de l'application $F_\infty^\times \to \mathbb{A}_F^\times/F^\times N_{F/F^c}(\mathbb{A}_F^\times)$, et définit donc un caractère du sous-groupe $F_\infty^\times/H$ de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times N_{F/F^c}(\mathbb{A}_F^\times)$. Le groupe $F_\infty^\times/H$ est compact, et en particulier est un sous-groupe fermé de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times N_{F/F^c}(\mathbb{A}_F^\times)$. On peut donc étendre le caractère donné de $F_\infty^\times/H$ en un caractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times N_{F/F^c}(\mathbb{A}_F^\times)$ ce qui donne bien un caractère φ de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ vérifiant $\varphi \circ c = \varphi^{-1}$ et dont le composant à l'infini est φ_∞. cqfd.

6. Conséquences globales

(6.1) A l'heure actuelle, on ne peut guère espérer obtenir des exemples de la correspondance de Langlands sur un corps de nombres F, c'est-à-dire des couples (Σ, Π) dans $\Gamma(F)$ comme en 4.5, en dehors des cas où F est un corps totalement réel ou un corps CM. Sous cette hypothèse, si (Σ, Π) appartient à $\Gamma(F)$, il est naturel de se demander si, en **toute** place finie v de F, les éléments $[\Sigma_v]$ de $\mathcal{R}_\mathcal{G}(F_v)$ et $[\Pi_v]$ de $\mathcal{R}_\mathcal{A}(F_v)$ se correspondent bien par la correspondance locale pour F_v.

Noter que dans le cadre de [HaT], où les auteurs font correspondre à certaines représentations automorphes cuspidales Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ une représentation ℓ-adique $\Sigma = \Sigma(\pi)$, ils montrent bien [HaT, § 11] qu'en une place finie v de F, la classe d'isomorphisme de la semisimplifiée de Σ_v se déduit de Π_v grâce à la correspondance locale de [HaT, § 12].

Nous démontrons ici, en nous inspirant d'ailleurs de [HaT, § 11], un résultat analogue, dans notre contexte.

Théorème. *Soit F un corps de nombres. On suppose que F est un corps totalement réel ou un corps CM. Soit $(\Sigma, \Pi) \in \Gamma(F)$. Alors, pour toute place finie v de F, la classe $[\Sigma_v]$ de Σ_v dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F_v)$ et la classe $[\Pi_v]$ de Π_v dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F_v)$ se correspondent par la correspondance locale pour F_v.*

(6.2) Supposons d'abord que F soit de la forme $F_+ I$, où F_+ est un corps de nombres totalement réel et I un corps quadratique imaginaire, scindé en p. Choisissons un corps quadratique réel R, également scindé en p, et linéairement disjoint de F_+, et fixons une place v' de FR au-dessus de la place v de F. Si (Σ, Π) appartient à $\Gamma(F)$ alors par changement de base de F à FR, on obtient un couple (Σ_{FR}, Π_{FR}) dans $\Gamma(FR)$. D'après le § 5, l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{R}_g((FR)_{v'}, FR)$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}((FR)_{v'}, FR)$ est donnée par la correspondance locale pour $(FR)_{v'}$.

Mais l'inclusion de F_v dans $(FR)_{v'}$ est un isomorphisme. On en déduit que $[\Sigma_v]$ (qui s'identifie à $[(\Sigma_{FR})_{v'}]$) correspond à $[\Pi_v]$ (identifié à $[(\Sigma_{FR})_{v'}]$) par la correspondance de Langlands pour F_v.

(6.3) Supposons ensuite que F soit totalement réel. On choisit alors un corps quadratique imaginaire I scindé en p. Choisissant une place v' de $F' = FI$ au-dessus de la place v de F, l'inclusion de F_v dans $F'_{v'}$ est un isomorphisme. Si on applique le résultat de 6.2 au couple $(\Sigma_{F'}, \Pi_{F'})$ de $\Gamma(F')$, on voit que $[(\Pi_{F'})_{v'}]$ correspond à $[(\Sigma_{F'})_{v'}]$ par la correspondance de Langlands pour $F'_{v'}$, ce qui revient à dire que $[\Pi_v]$ et $[\Sigma_v]$ se correspondent par la correspondance de Langlands pour F_v.

(6.4) Supposons enfin que F soit un corps CM. Choisissons alors un corps quadratique imaginaire I scindé en p disjoint de F, et posons $F' = FI$. Notant par un indice $+$ les corps fixés par la conjugaison complexe, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& F' \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
F \arrow[dr, dash] & F'_+ \arrow[d, dash] & F_+I \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& F_+ \arrow[dr, dash] & & I \arrow[dl, dash] \\
& & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Le corps F' a deux places v_1 et v_2 au-dessus de v. Le groupe de décomposition en v de $\mathrm{Gal}(F'/F_+)$ est trivial ou égal à $\mathrm{Gal}(F'/F_+I)$ selon que v

scindée dans F/F_+ ou non. En tout cas, les places v_1 et v_2 sont échangées par $\mathrm{Gal}(F'/F'_+)$, et correspondent donc à une unique place v' de F'_+ scindée dans F'/F'_+.

Considérons un couple $(\Sigma, \Pi) \in \Gamma(F)$. Alors par 4.8 on obtient le couple $(\Sigma_{F'}, \Pi_{F'}) \in \Gamma(F')$. On peut appliquer le cas de 6.2 à $F' = F'_+ I$ et en la place v_1 on obtient que $[(\Pi_{F'})_{v_1}]$ et $[(\Sigma_{F'})_{v_1}]$ se correspondent par la correspondance de Langlands pour F'_{v_1}, ce qui revient à dire que $[\Pi_v]$ et $[\Sigma_v]$ se corrrespondent par la correspondance de Langlands pour F_v. Cela termine la preuve du théorème 6.1.

7. Fonctorialité

(7.1) Dans ce dernier paragraphe, p est un nombre premier, K une extension finie du corps des nombres p-adiques, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et W_K le groupe de Weil de $\overline{K}$ sur K. Nous énonçons ici quelques propriétés de fonctorialité pour la correspondance de Langlands $\pi_K : \sigma \mapsto \pi_K(\sigma)$ de $\mathcal{G}_K^0$ sur $\mathcal{A}_K^0$ dont l'existence a été démontrée aux § § 4 et 5.

Les principales concernent la compatibilité au changement de base [AC, Chap. I] et à l'induction automorphe [HH], pour des extensions cycliques. Nous passons ensuite à la fonctorialité par rapport aux automorphismes de $\mathbb{C}$. Enfin, nous signalons que l'on peut paramétrer, par les représentations du groupe de Weil-Deligne (voir [Ta], par exemple, pour cette notion), toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(K)$.

Ces propriétés sont bien connues (elles apparaissent déjà dans [He 2, 3] et [Ha 1, 2]) et se déduisent aisément de l'origine globale de l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$. Nous renvoyons pour des preuves détaillées à [HaT § 12]. Noter cependant que la dernière propriété, caractérisant la correspondance étendue est nouvelle ; elle fera l'objet d'un article ultérieur, car la technique de démonstration en est très différente.

(7.2) Soit L une extension finie de K dans $\overline{K}$. Alors le groupe de Weil W_L de $\overline{K}$ sur L est un sous-groupe ouvert d'indice fini de W_K. La restriction, de W_K à W_L, des représentations continues semisimples de W_K, induit un homomorphisme de groupes $\mathrm{Res}_K^L : \mathcal{R}_\mathcal{G}(K) \to \mathcal{R}_\mathcal{G}(L)$. Si L/K est cyclique, le changement de base de K à L [AC, Chap. I] des représentations lisses irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(K)$ induit un homomorphisme de groupes $BC_K^L : \mathcal{R}_\mathcal{A}(K) \to \mathcal{R}_\mathcal{A}(L)$.

Propriété 1. *Si L est une extension cyclique de K, on a $\pi_L(\mathrm{Res}_K^L \sigma) = BC_K^L(\pi_K(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \mathcal{R}_\mathcal{G}(K)$.*

Pour prouver cette propriété, on peut supposer (voir le § 5) que K est le complété en une place v d'un corps de nombres totalement imaginaire F, que L est le complété en une place w au-dessus de v d'une extension cyclique totalement imaginaire E de F, et que σ est le composant en v d'une représentation Σ du groupe de Weil W_F, appartenant à un couple (Σ, Π) de $\Gamma(F)$. Alors le couple (Σ_E, Π_E) appartient à $\Gamma(E)$. Le résultat découle alors de 6.1.

(7.3) De manière analogue, l'induction, de W_L à W_K, des représentations complexes continues semisimples de W_L induit un homomorphisme de groupes $\mathrm{Ind}_K^L : \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(L) \to \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$. Si L est une extension cyclique de K, l'induction automorphe [HH], de L à K, des représentations lisses irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(L)$ induit un homomorphisme de groupes $AI_K^L : \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(L) \to \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$.

Propriété 2. *Si L est une extension cyclique de K, on a $\pi_K(\mathrm{Ind}_K^L \sigma) = AI_K^L(\pi_L(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(L)$.*

Comme plus haut, on peut supposer que K est le complété en une place v d'un corps de nombres totalement imaginaire F, et L le complété en une place w au-dessus de v d'une extension cyclique totalement imaginaire E de F, et que σ est le composant en w d'une représentation Σ du groupe de Weil W_E, appartenant à un couple (Σ, Π) de $\Gamma(E)$. Notons Σ^F la représentation de W_F induite par Σ, et Π^F la représentation induite automorphe (de E à F) de Π au sens de [AC, Chap. III]. Alors le couple (Σ^F, Π^F) appartient à $\Gamma(F)$. Par conséquent les composants de Σ^F et Π^F en v se correspondent par la correspondance de Langlands pour $F_v = K$. Mais $[(\Sigma^F)_v]$ n'est autre que l'induite $[\mathrm{Ind}_K^L \sigma]$ alors que $[(\Pi^F)_v]$ n'est autre que $[AI_K^L(\Pi_w)]$, grâce à la compatibilité entre l'induction automorphe globale de [AC, Chap. III] et l'induction automorphe locale de [HH], cf. [BHK, Appendice].

(7.4) Soit $\alpha_K : x \mapsto |x|_K$ le caractère de $K^\times$ donné par la valeur absolue normalisée de K. Alors l'application $\sigma \mapsto \alpha_K^{(n-1)/2} \pi_K(\sigma)$ est compatible aux automorphismes de $\mathbb{C}$. Précisons cette assertion. Si τ un automorphisme de $\mathbb{C}$ et σ une représentation de W_K sur un espace vectoriel complexe V, on note $\tau\sigma$ la représentation de W_K sur $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} V$ où l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sous-jacente au produit tensoriel est τ. Par passage au groupe de Grothendieck on obtient un homomorphisme de groupes $\tau : \sigma \mapsto \tau\sigma$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ dans lui-même. On définit de la même manière $\tau : \pi \mapsto \tau\pi$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K)$ dans lui-même.

Propriété 3. *Pour $\sigma \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$, on a*

$$\tau(\alpha_K^{(n-1)/2} \pi_K(\sigma)) = \alpha_K^{(n-1)/2} \pi_K(\tau\sigma)$$

pour tout automorphisme τ de $\mathbb{C}$.

Là encore, on peut se placer dans une situation globale (Σ, Π) choisie comme dans le § 5, et supposer en outre que le composant de Π aux places fines est défini sur un corps de nombres. La propriété exigée est vraie aux places non ramifiées donc partout, par le théorème de Cebotarev et le théorème de rigidité. Voir [HaT, § 12] pour les détails.

(7.5) Une représentation (Φ-semisimple) du groupe de Weil-Deligne de K est un couple (ρ, N), où ρ est une représentation semisimple de W_K et N un endomorphisme nilpotent de l'espace de ρ vérifiant

$$\rho(w) N \rho(w)^{-1} = \alpha_K(\tau_K(w)) N \text{ pour } w \in W_K \ .$$

On définit de manière évidente la dimension de (ρ, N), sa contragrédiente, sa classe d'isomorphisme. On peut définir le produit tensoriel de telles représentations, et des facteurs L et ε (cf. [Ta]). Pour n entier ≥ 1, on note $\mathcal{G}_K(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations (Φ-semisimples) du groupe de Weil-Deligne de K et $\mathcal{A}_K(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(K)$; on a $\mathcal{G}_K(n) \supset \mathcal{G}_K^0(n)$ et $\mathcal{A}_K(n) \supset \mathcal{A}_K^0(n)$.

Propriété 4. *Il existe une famille de bijections $\sigma \mapsto \pi(\sigma) = \pi_n(\sigma)$ de $\mathcal{G}_K(n)$ dans $\mathcal{A}_K(n)$ qui étendent les applications de $\mathcal{G}_K^0(n)$ dans $\mathcal{A}_K^0(n)$ du théorème* 1.3*, et vérifient encore les propriétés (i) à (iv) de* 1.3*.*

Cela découle de la classification de Zelevinski et des calculs de facteurs L et ε de paires de [JPSS] (cf. l'introduction de [JPSS]).

(7.6) Le résultat suivant, qui complète la propriété 4, sera prouvé dans un article ultérieur.

Propriété 5. *La famille de bijections de la propriété* 4 *est caractérisée par les propriétés exigées.*

Bibliographie

[AC] J. ARTHUR, L. CLOZEL, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula.* Annals of Math. Studies **120**, Princeton University Press, 1989.

[BHK] C. BUSHNELL, G. HENNIART, P. KUTZKO, *Correspondance de Langlands locale pour* GL_n *et conducteurs de paires.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) **31** (1998), 537–560.

[Ca1] H. CARAYOL, *Non-abelian Lubin-Tate theory.* In L. Clozel and J.S. Milne eds, "*Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions* II", Academic Press, 1990.

[Ca2] H. CARAYOL, *Preuve de la conjecture de Langlands locale pour* GL_n *: travaux de Harris-Taylor et Henniart.* Séminaire Bourbaki, exposé 857, mars 1999, Astérisque (2000), 191–243.

[Cl1] L. CLOZEL, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $\mathrm{GL}(n)$. Publ. Math. I.H.E.S. **73** (1991), 97–145.

[Cl2] L. CLOZEL, *On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties.* Duke Math. J. **72** (1993), 757–795.

[CL] L. Clozel, J.-P. Labesse, *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires.* Astérisque **257** (1999), 161 pp.

[Ha1] M. Harris, *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half-spaces; elaboration of Carayol's program.* Invent. Math. **129** (1997), 75–120.

[Ha2] M. Harris, *The local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$ *over a p-adic field,* $n < p$. Invent. Math. **134** (1998), 177–210.

[HaT] M. Harris, R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* Versions préliminaires, juillet et novembre 1998, juin 1999.

[He1] G. Henniart, *La Conjecture de Langlands pour* $\mathrm{GL}(3)$. Mém. Soc. Math. France, nouvelle série **12** (1984), 186 pp..

[He2] G. Henniart, *On the local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$ *: the cyclic case.* Ann. Math. **123** (1986), 145–203.

[He3] G. Henniart, *La conjecture de Langlands numérique pour* $\mathrm{GL}(n)$. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **21** (1988), 497–544.

[He4] G. Henniart, *Caractérisation de la correspondance de Langlands par les facteurs* ε *de paires.* Invent. Math. **113** (1993), 339–350.

[He5] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique.* Invent. Math. **139** (2000), 439–456.

[He6] G. Henniart, *A report on the proof of the Langlands conjectures for* $\mathrm{GL}(n)$ *over p-adic fields.* Exposé à la conférence "Current developments in Mathematics" de novembre 1999, à paraître en 2001.

[He7] G. Henniart, *Relèvement global d'extensions locales : quelques problèmes de plongement.* Math. Annalen **319** (2001), 75–88.

[HH] G. Henniart, R. Herb, *Automorphic induction for* $\mathrm{GL}(n)$ *(over local non-archimedean fields).* Duke Math. J. **78** (1996), 131–192.

[JPSS] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions.* Amer. J. Math. **105** (1983), 367–483.

[Ko] R. Kottwitz, *On the* λ*-adic representations associated to some simple Shimura varieties.* Invent. Math. **108** (1992), 653–665.

[Lf] L. Lafforgue, *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions.* Version préliminaire, manuscrit, 1999.

[Lg] S. Lang, *Algebraic Number Theory.* Addison Wesley, New York, 1975.

[Lm] G. Laumon, *Sur les travaux de L. Lafforgue.* Exposé au Séminaire Bourbaki en mars 2000, en préparation.

[Sh] F. Shahidi, *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* $\mathrm{GL}(n)$. Amer. J. Math. **106** (1984), 67–111.

[Ta] J. Tate, *Number theoretic background.* In A. Borel and W. Casselman eds, Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symposia in Pure Math. **33** (II) (1979), 3–26.

Guy Henniart
Département de Mathématiques
UMR 8628 du CNRS, bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex
France
E-mail : Guy.Henniart@math.u-psud.fr