Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 539–557

More on inhomogeneous Diophantine approximation

par Christopher G. PINNER

Résumé. Pour un nombre irrationnel α et un nombre réel γ, on considère la constante d'approximation non-homogène

$$M(\alpha,\gamma) := \liminf_{|n|\to\infty} |n|||n\alpha-\gamma||$$

en rapport avec le développement en fraction continue négatif semi-régulier de α

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cdots}}}$$

et un α-développement adéquat de γ. Nous donnons une majoration de

$$\rho(\alpha) := \sup_{\gamma\notin \mathbf{Z}+\alpha\mathbf{Z}} M(\alpha,\gamma),$$

dans le cas où α est mal approximé, qui s'avère fine lorsque les quotients partiels a_i sont presque tous pairs et supérieurs ou égaux à 4. Lorsque le développement de α est de période 1, on décrit entièrement le spectre des valeurs prises par

$$\mathbf{L}(\alpha) := \{M(\alpha,\gamma) \ : \ \gamma \notin \mathbf{Z}+\alpha\mathbf{Z}\},$$

au-dessus du premier point d'accumulation.

Abstract. For an irrational real number α and real number γ we consider the inhomogeneous approximation constant

$$M(\alpha,\gamma) := \liminf_{|n|\to\infty} |n|||n\alpha-\gamma||$$

via the semi-regular *negative continued fraction expansion* of α

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cdots}}}$$

and an appropriate alpha-expansion of γ. We give an upper bound on the case of worst inhomogeneous approximation,

$$\rho(\alpha) := \sup_{\gamma\notin \mathbf{Z}+\alpha\mathbf{Z}} M(\alpha,\gamma),$$

Manuscrit reçu le 3 mai 2000.

which is sharp when the partial quotients a_i are almost all even and at least four. When the negative expansion has period one we give a complete description of the spectrum of values

$$\mathbf{L}(\alpha) := \{M(\alpha,\gamma) \ : \ \gamma \notin \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}\},$$

above the first limit point.

Christopher G. Pinner
Department of Mathematics
138 Cardwell Hall
Kansas State University
Kansas 66506
USA
E-mail : pinner@math.ksu.edu