Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 249–256

A group law on smooth real quartics having at least 3 real branches

par Johan HUISMAN

RÉSUMÉ. Soit C une courbe quartique réelle lisse dans $\mathbb{P}^2$, qui admet au moins trois branches réelles B_1, B_2, B_3. On pose $B = B_1 \times B_2 \times B_3$ et soit $O \in B$. On note τ_O l'application de B sur la composante neutre $\mathrm{Jac}(C)(\mathbb{R})^0$ de l'ensemble des points réels de la jacobienne de C, définie en posant $\tau_O(P)$ comme étant la classe du diviseur $\sum P_i - O_i$. Alors, τ_O est bijective. On montre que cela permet une description géométrique explicite de la loi de groupe sur $\mathrm{Jac}(C)(\mathbb{R})^0$. Cela généralise la description géométrique classique de la loi de groupe sur la composante neutre de l'ensemble des points réels de la jacobienne d'une cubique. Si la quartique est définie sur un corps de nombres réel, alors on obtient une description géométrique d'un sous-groupe du groupe de Mordell-Weil d'indice un diviseur de 8.

ABSTRACT. Let C be a smooth real quartic curve in $\mathbb{P}^2$. Suppose that C has at least 3 real branches B_1, B_2, B_3. Let $B = B_1 \times B_2 \times B_3$ and let $O \in B$. Let τ_O be the map from B into the neutral component $\mathrm{Jac}(C)(\mathbb{R})^0$ of the set of real points of the Jacobian of C, defined by letting $\tau_O(P)$ be the divisor class of the divisor $\sum P_i - O_i$. Then, τ_O is a bijection. We show that this allows an explicit geometric description of the group law on $\mathrm{Jac}(C)(\mathbb{R})^0$. It generalizes the classical geometric description of the group law on the neutral component of the set of real points of the Jacobian of a cubic curve. If the quartic curve is defined over a real number field then one gets a geometric description of a subgroup of its Mordell-Weil group of index a divisor of 8.

Johan HUISMAN
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, France
E-mail : `huisman@univ-rennes1.fr`

Manuscrit reçu le 9 octobre 2000.