Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 275–307

Familles de fonctions L de formes automorphes et applications

par Philippe MICHEL

Résumé. Une notion importante qui a émergé de la théorie analytique des fonctions L ces dernières années, est celle de *famille*. Par exemple les familles de fonctions L interviennent naturellement dans le modèle probabiliste des matrices aléatoires de Katz/Sarnak qui vise a prédire la répartition des zéros des fonctions L. L'analyse des fonctions L en famille intervient également dans la résolution (inconditionnelle) de divers problèmes ayant une signification arithmétique profonde, tel que le problème de montrer la non-annulation de valeur spéciales de fonctions L ou encore celui de borner non-trivialement ces valeurs (le problème de convexité). Dans cet article, nous passons en revue les techniques analytiques mises en jeu pour résoudre ces questions et décrivons plusieurs applications de nature arithmétique.

Abstract. One of the important concept that has emerged these last years in the analytic theory of L functions, is the concept of *families*. For instance, families of L functions occur naturally in Katz/Sarnak's probabilistic model of Random Matrices whose goal is to predict the distribution of zeros of L functions. The study of L functions within families occurs also in the (unconditional) resolution of several problems having some deep arithmetical meaning: the question of non-vanishing of special values of L functions or the problem of giving non-trivial upper bounds for these special values (the subconvexity problem). In this paper, we review the analytic method involved in solution of some of these problems and give several applications.

Tables des matières

Manuscrit reçu le 19 novembre 2001.

1. Introduction

L'étude des propriétés analytiques des fonctions L des formes automorphes dans la bande critique [1] est un sujet fascinant de l'arithmétique contemporaine qui mêle théorie analytique des nombres, formes automorphes et géométrie arithmétique. Cet exposé aborde ces questions plutôt sous l'angle de la théorie analytique des nombres, cependant on verra que loin d'être des concurrentes, les différentes approches sont complémentaires et s'éclairent l'une l'autre.

Une notion cruciale qui s'est dégagée ces dernières années, est celle de *famille* de fonctions L. Du point de vue de la théorie analytique des nombres "classique", cette notion est très naturelle : certains des résultats les plus fameux sur les fonctions L de caractères de Dirichlet (essentiellement la seule famille qui a été étudiée jusqu'à il y a peu) sont des énoncés "en moyenne" (par exemple les Théorèmes de Densité pour leurs zéros) qui quelquefois sont une alternative (parfois plus) efficace à l'Hypothèse de Riemann Généralisée. Dans le contexte des formes automorphes, la notion de famille de fonctions L ne s'est vraiment révélée que tout récemment avec les extraordinaires développements de la géométrie arithmétique, et elle apporte bien plus qu'une simple généralisation des énoncés classiques de la théorie analytique :

- Elle apparaît naturellement dans plusieurs problèmes arithmétiques liés aux courbes modulaires et à la conjecture de Birch—Swinnerton-Dyer (question de non-annulation au point critique).
- Elle sert à résoudre des problèmes de nature analytique, qui étaient inaccessibles par les méthodes traditionnelles, pour les fonctions L générales, et qui en corollaire fournissent des résultats non-triviaux en géométrie arithmétique.
- Elle est au coeur du modèle probabiliste des matrices aléatoires pour les fonctions L de Katz-Sarnak [KaSa1] qui permet de décrire la structure fine des zéros des fonctions L et peut-être de mieux comprendre leur nature spectrale (voir aussi les survols [KaSa2, Mi1]).

Dans cet exposé nous présenterons certains progrès récents qui ont été réalisés à partir de cette notion. Nous irons pour cela des résultats quantitatifs concernant la non-annulation de fonctions L au point critique, à des majorations non-triviales pour ces fonctions sur la droite critique $\Re e s = 1/2$. A chaque fois que ce sera possible nous tâcherons de donner certaines des applications (ou quelquefois des interprétations) qui peuvent être obtenues en combinant ces résultats avec d'autres techniques.

[1] Dans la suite, nous normaliserons toutes les fonctions L de sorte que la bande critique est le domaine complexe $0 \leqslant \Re e s \leqslant 1$.

Remerciements : Je veux remercier J. Friedlander, H. Iwaniec et P. Sarnak pour de nombreuses discussions concernant les thèmes abordés dans cet article et pour m'avoir communiqué leurs travaux [DFI8], [Sa2] sur lesquels une partie de ce texte est basé.

2. Familles de fonctions L

2.1. Fonctions L de formes automorphes. On rappelle que pour une normalisation convenable (si le caractère central est unitaire) la fonction L d'une forme automorphe cuspidale f sur $GL_d(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est une série de Dirichlet qui admet une factorisation en produit eulérien

$$L(f,s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_f(n)}{n^s} = \prod_p L_p(f,s).$$

Pour chaque p, le facteur local $L_p(f,s)^{-1}$ est un polynôme en p^{-s} de degré $\leqslant d$ (et de degré $= d$ pour presque tout p)

$$L_p(f,s)^{-1} = \prod_{i=1}^{d}(1-\alpha_{f,i}(p)p^{-s})$$

où les nombres complexes $\alpha_{f,i}(p)$ sont appelés les paramètres locaux de f en p. Pour la place à l'infini, on a également un facteur local formé de fonctions "Gamma" :

$$L_\infty(f,s) = \prod_{i=1}^{d}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_{f,i}), \text{ avec } \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \text{ et } \Re e\mu_{f,i} > -1/2.$$

On sait alors [GoJ] que la fonction L complète $\Lambda(f,s) = L_\infty(f,s)L(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ (sauf si $L(f,s)$ est la fonction ζ) et qu'elle vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$q_f^{s/2}\Lambda(f,s) = \varepsilon_f q_f^{(1-s)/2}\Lambda(\overline{f},1-s) \tag{2.1}$$

où q_f est un entier (appelé le conducteur de f), $\overline{f}$ désigne la contragrédiente de f et ε_f est un nombre complexe de module 1, (le "signe" de l'équation fonctionnelle). Par la théorie de Rankin-Selberg [JS, JPPS], on sait également que le produit eulérien $L(f,s)$ converge absolument pour $\Re es > 1$, que $\Lambda(f,s)$ a tous ces zéros dans la bande critique $0 \leqslant \Re es \leqslant 1$; enfin la méthode de Hadamard—de la Vallée-Poussin fournit une région sans zéros "standard" de la forme

$$\Re es \geqslant 1 - \frac{c}{\log Q_f(1+|\Im ms|)} \tag{2.2}$$

où Q_f est le *conducteur analytique* de f définit par

$$Q_f := q_f \prod_{i=1}^{d}(1+|\mu_{f,i}|), \tag{2.3}$$

à un (éventuel) "zéro de Landau-Siegel" près : celui-ci serait contenu dans le domaine (2.2), serait réel, simple et ne pourrait apparaître que si f est autoduale. On pourra se reporter à [HL, HR] pour une étude du zéro de Siegel pour les fonctions L de formes automorphes sur GL_d pour $d \geqslant 2$.

Dans cet exposé nous considérons certaines fonctions L liées aux formes sur GL_d avec $d = 1, 2$. Pour $d = 1$ ce sont les fonctions L associées aux caractères de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{d} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Pour $d = 2$, on considère les espaces suivants de formes automorphes cuspidales. Elles sont classées suivant leur poids, un entier $k \geqslant 0$, leur niveau $q \geqslant 1$ et leur nebentypus qui est un caractère de Dirichlet $\chi \pmod q$ vérifiant la condition de compatibilité $\chi(-1) = (-1)^k$:

- l'espace $S_k(q, \chi)$ des formes holomorphes de poids k.
- pour $k = 0$ ou 1, l'espace $S_\lambda(q, \chi)$ des formes (de Maass) de poids k, réelles analytiques, vecteur propre du Laplacien
$$\Delta_k = y^2(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}) - iky\frac{\partial}{\partial x},$$
de valeur propre $\lambda = (1/2 + ir)(1/2 - ir) \geqslant 0$, (la conjecture de Ramanujan-Petersson prédit que $\Re eir = 0$.)

(si le nebentypus χ est le caractère trivial, on l'omettra de la notation). Parmi ces formes on considère l'ensemble $S_k^p(q, \chi)$ (resp. $S_\lambda^p(q, \chi)$) de celles qui sont primitives (ie vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke T_n, $n \geqslant 1$, nouvelles et normalisées) ; ces formes primitives admettent un développement de Fourier à l'infini de la forme :

- pour f holomorphe

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \rho_f(n) e(nz) = \rho_f(1) \sum_{n\geqslant 1} \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz), \tag{2.4}$$

- pour f une forme de Maass de poids $k = 0$ ou 1, de valeur propre $\lambda = (1/2 + ir)(1/2 - ir)$,

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \big(\rho_f(n) W_{\frac{k}{2},ir}(4\pi ny) e(nx) + \rho_f(-n) W_{-\frac{k}{2},ir}(4\pi ny) e(-nx)\big) \tag{2.5}$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \big(\rho_f(1)\lambda_f(n) W_{\frac{k}{2},ir}(4\pi ny) e(nx) + \rho_f(-1)\lambda_f(n) W_{-\frac{k}{2},ir}(4\pi ny) e(-nx)\big),$$

où $W_{\alpha,\beta}(y)$ est la fonction de Whittaker, et $\lambda_f(n)$ désigne la valeur propre du n-ième opérateur de Hecke T_n convenablement normalisé.

Remarque 2.1. Une forme primitive est bien définie à un scalaire près. Dans la suite, nous adopterons la normalisation L^2 en imposant que le produit scalaire de Petersson de f, $\langle f, f\rangle$, vaut 1.

La fonction L de Hecke associée à une forme primitive f est la série

$$\begin{aligned} L(f,s) &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_p \Big(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)}{p^{2s}}\Big)^{-1} \\ &= \prod_p \Big(1 - \frac{\alpha_{f,1}(p)}{p^s}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha_{f,2}(p)}{p^s}\Big)^{-1}, \end{aligned}$$

et son conducteur arithmétique vaut q.

Le troisième type de fonctions L que nous considérons est la famille des fonctions L de Rankin-Selberg, $L(f \otimes g, s)$ où g est une forme automorphe sur $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ fixée de conducteur D et nebentypus χ'. Cette série de Dirichlet peut être difficile à écrire explicitement en général, mais si q et D sont premiers entre eux, elle a une expression simple

$$L(f \otimes g, s) = L(\chi\chi_g, 2s) \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s} = \prod_p \prod_{i,j=1,2} \Big(1 - \frac{\alpha_{f,i}\alpha_{g,j}}{p^s}\Big)^{-1},$$

et son conducteur arithmétique vaut $(qD)^2$.

Remarque 2.2. Récemment, Ramakrishnan [Ra] a montré (en accord avec la philosophie de Langlands), que ce produit Eulérien de degré 4 est la fonction L d'une forme automorphe sur $GL_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

Remarque 2.3. Il n'est pas toujours nécessaire de se restreindre au cas où g est cuspidale. Par exemple prenant

$$\begin{aligned} (2.6) \quad g(z) = E'(z, \tfrac{1}{2}) &:= \frac{\partial}{\partial s} E(z,s)_{|s=1/2} \\ &= y^{1/2}\log y + 4y^{1/2} \sum_{n\geqslant 1} \tau(n)\cos(2\pi n x) K_0(2\pi n y), \end{aligned}$$

avec $E(z,s)$ la série d'Eisenstein non-holomorphe pour le groupe modulaire, on a formellement

$$L(f \otimes g, s) = L(f,s)^2,$$

ce qui permet quelquefois de considérer parallèlement le cas des fonctions L de Hecke et celui des fonctions L de Rankin-Selberg.

2.2. Familles. Dans la suite $B_?(q,\chi)$ désignera une base *de Hecke* de $S_?(q,\chi)$ c'est-à-dire une base (orthonormée) formée de vecteurs propres des opérateurs de Hecke T_n pour tout $(n,q)=1$ (et éventuellement du Laplacien) et qui contient l'ensemble des formes primitives $S_?^p(q,\chi)$.

On considère des familles $\mathcal{F}(Q)$ de fonctions L de degré donné, indexées par les élément des bases $B_?(q,\chi)$, qui dépendent d'un paramètre Q représentant la taille des conducteurs analytiques : pour $Q\to+\infty$ et $f\in\mathcal{F}(Q)$ on a $\log Q_f \simeq \log Q$.

En degré 2, ce sont les familles de fonctions de Hecke :

$$\mathcal{F}_{[K,K+K']}(q,\chi)=\{L(f,s),\ f\in B_k(q,\chi),\ k\in[K,K+K']\},$$

pour $0\leqslant K'\leqslant K$, ou bien

$$\mathcal{F}_{[\Lambda,\Lambda+\Lambda']}(q,\chi)=\{L(f,s),\ f\in B_\lambda(q,\chi),\ \lambda\in[\Lambda,\Lambda+\Lambda']\},$$

pour $0\leqslant\Lambda'\leqslant\Lambda$. En degré 4, on fixe une forme cuspidale g et on considère les familles de fonctions L de Rankin-Selberg suivantes :

$$\mathcal{F}^g_{[K,K+K']}(q,\chi)=\{L(f\otimes g,s),\ f\in B_k(q,\chi),\ k\in[K,K+K']\},$$

$$\mathcal{F}^g_{[\Lambda,\Lambda+\Lambda']}(q,\chi)=\{L(f\otimes g,s),\ f\in B_\lambda(q,\chi),\ \lambda\in[\Lambda,\Lambda+\Lambda']\}.$$

En pratique un des paramètres q,K ou Λ tendra vers $+\infty$ les autres restant essentiellement fixés ou tout au moins très petits devant le paramètre principal. Compte-tenu de la valeur du conducteur et celle des paramètres locaux à l'infini de ces fonctions L, on trouve pour les différentes familles, les équivalences suivantes :

$$\log Q_f=\log q,\ \log Q_{f\otimes g}\simeq\log(q^2)\text{ quand }q\to+\infty,$$

$$\log Q_f\simeq\log k^2\simeq\log K^2,\ \log Q_{f\otimes g}\simeq\log k^4\simeq\log K^4\text{ quand }K\to+\infty$$

et si on considère les formes de Maass

$$\log Q_f\simeq\log\lambda^2\simeq\log\Lambda^2,\ \log Q_{f\otimes g}\simeq\log\lambda^4\simeq\log(\Lambda^4)\text{ quand }\Lambda\to+\infty.$$

2.3. Moments de fonctions L. Étant donnée une famille $\mathcal{F}(Q)$, les méthodes analytiques qu'on va décrire reposent toutes sur l'évaluation des moments des fonctions $L(f,s)$ "tordus" par certains polynômes de Dirichlet $M(f,s)$. Ces moments sont définis par la donnée d'un entier L (qu'on écrit sous la forme $L=[Q^\Delta]\geqslant 1$ pour un certain paramètre $\Delta>0$ fixé), et d'un vecteur de coefficients $\vec{x}=(x_1,\dots,x_L)\in\mathbb{C}^L$ avec lequel on forme le polynôme de Dirichlet

$$M(f,s)=\sum_{l\leqslant L}\frac{\lambda_f(\ell)}{n^s}x_\ell,$$

ainsi le paramètre Δ mesure la longueur du mollifieur $M(f,s)$ relativement à la famille $\mathcal{F}(Q)$.

Pour $s \in \mathbb{C}$ dans la bande critique (disons $\Re es = 1/2$), le moment d'ordre 1 est la forme linéaire

$$M_1(\mathcal{F}(Q), \vec{x}, s) := \sum_{f \in \mathcal{F}(Q)} L(f,s) M(f,s) \tag{2.7}$$

et les moments d'ordre κ (κ entier pair) sont définis par les formes quadratiques

$$M_\kappa(\mathcal{F}(Q), \vec{x}, s) := \sum_{f \in \mathcal{F}(Q)} |L(f,s)|^\kappa |M(f,s)|^2. \tag{2.8}$$

La méthode générale pour évaluer ces moments est la suivante : on commence par représenter $L(f,s)$ sous forme d'une série rapidement convergente en utilisant l'équation fonctionnelle (2.1) ; on obtient alors

$$L(f,s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_f(n)}{n^s} V_s\Big(\frac{n}{\sqrt{Q_f}}\Big) + \varepsilon_f \sum_{n \geqslant 1} \frac{\overline{a_f(n)}}{n^{1-s}} V_{1-s}\Big(\frac{n}{\sqrt{Q_f}}\Big) \tag{2.9}$$

où pour $\Re es = 1/2$, $V_s(y)$ est une fonction à décroissance rapide quand $y > 1$. On a donc exprimé $L(f,s)$ comme somme de deux séries (essentiellement) finies de longueur $\ll Q_f^{1/2}$. Reportant (2.9) dans $M_\kappa(\mathcal{F}(Q), \vec{x}, s)$ on développe cette expression et la multiplicativité des $a_f(n)$ permet d'intervertir les sommations pour se ramener à des sommes de la forme

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(Q)} \overline{a_f(m)} a_f(n)$$

pour $m, n \ll Q^{\kappa/2+\Delta}$. On évalue ces sommes grâce à diverses formules de "traces" (cf. (5.1) pour un exemple) qui donnent lieu à une égalité du type

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(Q)} \overline{a_f(m)} a_f(n) = \delta_{m=n} + Terme\ Non-Diagonal, \tag{2.10}$$

qu'on reporte dans l'expression cherchée. La contribution du terme $\delta_{m=n}$ fournit le *Terme Diagonal* du moment. En général il est le plus facile à contrôler. La partie restante fournit le *Terme Non-Diagonal.* Bien entendu plus κ est grand, plus les variables m, n peuvent être grandes et moins on a de contrôle sur le *Terme Non-Diagonal* de (2.10). En pratique, une *transition de phase* se produit quand on calcule le moment critique d'ordre κ_0 donné par

$$\kappa_0 + 2\Delta = \liminf_{Q \to +\infty} 4 \frac{\log |\mathcal{F}(Q)|}{Q}, \tag{2.11}$$

c'est à ce point que la contribution provenant du *Terme Non-Diagonal* cesse d'être trivialement[2] négligeable devant le *Terme Diagonal* ; on verra

[2] "trivial" pouvant avoir un sens très relatif suivant les cas considérés

dans la section 4. une autre raison expliquant pourquoi cette barrière est naturelle.

Exemple 2.1. *Quand* $\Delta = 0$, κ_0 *vaut* 4 *pour les familles* $\mathcal{F}_{[K,2K]}(q,\chi)$, $\mathcal{F}_{[\Lambda,2\Lambda]}(q,\chi)$ *et* 2 *pour les familles* $\mathcal{F}^g_{[K,2K]}(q,\chi)$, $\mathcal{F}^g_{[\Lambda,2\Lambda]}(q,\chi)$ *quand* q, K, *ou bien* $\Lambda \to +\infty$.

Nous décrirons dans la section 5, les techniques qui sont utilisées pour contrôler les termes non-diagonaux dans ces cas critiques. Supposons cette barrière franchie (on verra qu'elle l'est pour les famille décrites précédemment) et que les moments sont alors convenablement évalués pour certains ordres κ. On dispose alors de deux types d'applications très différentes suivant le choix que l'on fait du vecteur $\vec{x}$.

3. La méthode de mollification

La méthode de mollification a été inventée par Bohr et Landau au début du 20ème siècle pour étudier ζ et ses zéros ; elle a ensuite été développée par Selberg [Se] et d'autres pour étudier les questions de non-annulation de fonctions L notamment dans des familles. On doit à Iwaniec et Sarnak d'avoir donné un nouvel élan à la méthode de mollification en la généralisant aux familles de fonctions L de formes automorphes dans leur tentative d'attaquer le problème du zéro de Landau-Siegel [IS1].

3.1. Le principe. Soit $\mathcal{F}(Q)$ une famille ; si l'on veut des renseignements sur le nombre de fonctions L de $\mathcal{F}$ ne s'annulant pas en un point déterminé s_0, la méthode des moments peut fournir des éléments de réponse : en effet l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne la minoration

$$|\{f \in \mathcal{F}(Q),\ L(f,s_0) \neq 0\}| \geqslant \frac{|M_1(\mathcal{F}(Q),\vec{x},s_0)|^2}{M_2(\mathcal{F}(Q),\vec{x},s_0)},$$

qui ramène ce problème de comptage à celui de minimiser la forme quadratique en $\vec{x}$, $M_2(\mathcal{F}(Q),\vec{x},s_0)$ sous la contrainte linéaire $M_1(\mathcal{F}(Q),\vec{x},s_0) = 1$. Quand on est capable d'évaluer asymptotiquement les moments d'ordre 1 et 2 pour $Q \to +\infty$, on peut montrer que ce problème de minimisation admet une solution asymptotiquement optimale qu'on peut expliciter. Le polynôme de Dirichlet $M(f,s)$ solution de ce problème est appelé un "mollifieur". On obtient alors un résultat de la forme

$$|\{f \in \mathcal{F}(Q),\ L(f,s_0) \neq 0\}| \geqslant (c(\Delta) + o(1))|\mathcal{F}(Q)|, Q \to +\infty \tag{3.1}$$

où $c(\Delta)$ est une fraction rationnelle du paramètre Δ qui s'annule en $\Delta = 0$ et est strictement croissante. En particulier (3.1) est d'autant meilleur que l'on peut prendre Δ (la longueur relative du *mollifieur*) grand. Comme le suggère le fait que $c(0)=0$, le vecteur "trivial" definit par $L=1$, $x_1=1$ est loin d'être optimal : on obtient dans ce cas la minoration plus faible

$$|\{f\in\mathcal{F}(Q),\ L(f,s_0)\neq 0\}|\gg\frac{|\mathcal{F}(Q)|}{\log Q}=o(|\mathcal{F}(Q)|),Q\to+\infty.$$

On voit donc que l'introduction d'un mollifieur $M(f,s_0)$ permet de compenser en moyenne, l'influence non négligeable des quelques $L(f,s_0)$ qui sont très grands par rapport à la valeur moyenne.

Mentionnons également que cette méthode admet des variantes qui permettent notamment de contrôler en moyenne dans une famille, le nombre et la multiplicité des zéros des fonctions L situés sur le segment critique $[0,1]$ et plus particulièrement particulier l'ordre d'annulation au point critique $s=1/2$ ([KM1, HM, KMV1, CS]). En particulier ces techniques ont permis à Conrey et Soundararajan [CS] d'obtenir le résultat frappant suivant :

Théorème 1. *Il existe une infinité (et même au moins* 20% *en un sens convenable) de caractères de Dirichlet quadratiques primitifs χ dont la fonction L, $L(\chi,s)=\sum_n\chi(n)n^{-s}$ ne s'annule pas sur le segment critique* $[0,1]$.

3.2. Mollification des fonctions L de Rankin-Selberg. Dans [KMV2, KMV3, MV] la technique de mollification a été appliquée aux familles de fonctions L de Rankin-Selberg $\mathcal{F}_k^g(q,\chi_0)$ pour $k\geqslant 2$, q premier, χ_0 le caractère trivial et pour g de niveau D sans facteurs carrés. Un point technique intéressant dans exemple est que le moment d'ordre $\kappa_0=2$ est "critique" et qu'on doit donc faire face à des termes non-diagonaux.

Dans [KMV3] le calcul asymptotique des moments d'ordre 1 et 2 mollifiés donnent le

Théorème 2. *Soit g une forme primitive cuspidale holomorphe de niveau D sans facteurs carrés et de nebentypus χ'. il existe une constante positive absolue $c>0$ telle que pour tout q premier suffisamment grand (en fonction de g) on a les minorations*

- *si g n'est pas autoduale ou si g est autoduale et $\chi'(-q)=1$*

$$|\{f\in S_2^p(q),\ L(f\otimes g,\tfrac{1}{2})\neq 0\}|\geqslant(c+o_g(1))|S_2^p(q)|,\tag{3.2}$$

- *si g est autoduale et $\chi'(-q)=-1$, alors*

$$|\{f\in S_2^p(q),\ L'(f\otimes g,\tfrac{1}{2})\neq 0\}|\geqslant(c+o_g(1))|S_2^p(q)|.\tag{3.3}$$

Remarque 3.1. On peut noter que la preuve de ce résultat utilise pour l'étape d'optimisation de la forme quadratique, l'existence d'une région sans zéros convenable pour les convolutions de Rankin-Selberg $L(g\otimes g,s)$ et $L(g\otimes\overline{g},s)$ et ainsi des résultats plutôt avancés de la théorie des formes automorphes comme la modularité de la fonction L du carré symétrique (due à Gelbart-Jacquet [GJ]) et la modularité de la fonction L de Rankin-Selberg $L(g\otimes\overline{g},s)$ due à Ramakrishnan [Ra].

On peut aussi considérer le cas où g est une série d'Eisenstein [KMV2, MV] : soit χ un caractère de Dirichlet fixé, alors pour $g = E_\chi$ une série d'Eisenstein convenable on a $L(f\otimes g, s) = L(f\otimes\chi, s)^2$. Bien que g soit alors plus élémentaire qu'une forme cuspidale, l'obtention de formules asymptotiques pour le moment d'ordre 2 (qui est donc le moment d'ordre 4 des fonctions L de Hecke des f tordues par χ) s'avère être beaucoup plus complexe que dans le cas cuspidal : cela tient au fait que des termes principaux non-diagonaux supplémentaires liés au terme constant de cette série d'Eisenstein E_χ apparaissent et qu'ils sont plutôt délicats à évaluer. L'inégalité

$$\Big(\sum_f M_1(f)M_2(f)M_3(f)\Big)^4 \leqslant \Big(\sum_{\substack{f\\ M_1(f)M_2(f)M_3(f)\neq 0}} 1\Big)\prod_{i=1,2,3}\Big(\sum_f |M_i(f)|^4\Big)$$

permet alors d'obtenir, en choisissant des mollifieurs appropriés, des résultats de non-annulation simultanée comme le

Théorème 3. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que : pour χ_i, $i = 1, 2, 3$ trois caractères primitifs de conducteur D_i sans facteurs carrés et tels que χ_i^2 est encore primitif, et pour tout q premier, on a la minoration quand $q \to +\infty$*

$$\begin{aligned}|\{f \in S_2^p(q),\ L(f\otimes\chi_1, 1/2)L(f\otimes\chi_2, 1/2)L(f\otimes\chi_3, 1/2) \neq 0\}|\\ \geqslant (c + o_{D_1D_2D_3}(1))|S_2^p(q)|.\end{aligned}$$

3.3. Interprétations. Soit $A/\mathbb{Q}$ est une variété abélienne, la détermination du rang de tous les groupes de Mordell-Weil $A(K)$ pour les extensions finies de $\mathbb{Q}$ est équivalente à celle de la multiplicité dans $A(\overline{\mathbb{Q}})\otimes\mathbb{C}$ de toutes représentations complexes, continues, de dimension finie et irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Si ρ est une telle représentation, (une variante de) la conjecture de Birch—Swinnerton-Dyer prédit sa multiplicité m_ρ dans $A(\overline{\mathbb{Q}})\otimes\mathbb{C}$ [Ro] :

$$(BSD-?) \qquad m_\rho = \mathrm{ord}_{s=1}L(A\otimes\rho, s)$$

où $L(A\otimes\rho, s)$ est la fonction L du produit tensoriel de la représentation galoisienne définie par le module de Tate de A, et (d'une réalisation ℓ-adique convenable) de ρ. Dans le cas particulier où $A = A_f$ est la variété abélienne modulaire associée à une forme holomorphe f de poids 2 et quand ρ est "modulaire" et est donc associée à une forme automorphe g_ρ (ce qui est maintenant connu pour de très nombreuses ρ de dimension 2) on a l'égalité

$$L(A_f\otimes\rho, s) = \prod_{f^\sigma} L(f^\sigma\otimes g_\rho, s - 1/2)$$

où f^σ parcours l'orbite de f sous le groupe de Galois. Grâce aux travaux de Gross-Zagier, Kolyvagin, Kato, Bertolini-Darmon, Zhang et d'autres, on dispose à ce jour de nombreux résultats en direction de la conjecture (BSD-?)

pour les quotient A_f de $J_0(q) = Jac(X_0(q))$ et pour les représentations ρ suivantes :

- quand ρ est la représentation triviale [GZ, Ko] ;
- $\dim \rho = 1$: $g_\rho = \chi$ est alors un caractère de Dirichlet [Sc] ;
- quand $\dim \rho = 2$ et ρ est dihédrale et impaire : i.e. est induite par un caractère de Hecke sur un corps quadratique imaginaire. D'après Hecke, g_ρ est une forme holomorphe de poids 1 et de nebentypus le symbole de Kronecker du corps [GZ, G, BD1, BD2, Zh2].

De plus, dans tous les cas évoqués ci-dessus, la preuve de (BSD-?) résulte d'une "formule" exacte conférant une interprétation arithmético-géométrique à la valeur spéciale $L(f \otimes g_\rho, 1/2)$ (ou à sa dérivée). Par exemple, si ρ est impaire dihédrale, $L(f \otimes g_\rho, 1/2)$ ou $L'(f \otimes g_\rho, 1/2)$ peut s'interpréter comme la hauteur de la (f, ρ)-composante isotypique d'un diviseur de Heegner sur une courbe de Shimura convenable ([GZ, G, BD1, BD2, Zh2]).

Ces résultats, sont autant de motivations pour une étude générale par voie analytique de la variable aléatoire

$$f \to L(f \otimes g, s)$$

et de la variable "rang analytique"

$$f \to r(f \otimes g) = \mathrm{ord}_{s=1/2} L(f \otimes g, s).$$

où g est fixée, s est dans un voisinage de $1/2$ et f décrit un ensemble de formes primitives holomorphes de poids 2.

Si ρ est la représentation triviale, ces questions ont été étudiées dans [IS1, KM1, KM2, KMV1, HM, V1].

Pour les représentations ρ de dimension 1, le Théorème 3, ses variantes et les travaux de Kato sur le conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer pour les corps cyclotomiques [Sc] impliquent le

Corollaire 3.1. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que pour tout corps cyclique K de degré $\leqslant 5$ sur $\mathbb{Q}$, non-ramifié en $2, 3, 5$, et pour tout q premier assez grand, la jacobienne $J_0(q)$ possède un quotient J_K définit sur $\mathbb{Q}$ de dimension $\geqslant c \dim J_0(q)$, qui vérifie la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer sur K.*

Dans le cas des représentations de dimension 2, le Théorème 2 appliquée aux fonctions theta associées aux caractères du groupe de classes d'idéaux d'un corps quadratique imaginaire et les formules de Gross-Zagier impliquent le

Corollaire 3.2. *Il existe une constante absolue $c > 0$, telle que pour tout corps quadratique imaginaire K, non-ramifié en 2, et pour tout q premier assez grand inerte dans O_K, on a*

$$rang J_0(q)(H_K) \geqslant c h_k \dim J_0(Q)$$

où H_K est le corps de classes de Hilbert de K et $h_K = [H_K : K]$.

Mentionnons aussi que l'on a aussi des interprétations moins arithmétiques ; par exemple le résultat suivant, dû à W. Luo [Lu], concerne la question de non-annulation famille de fonctions L de Rankin-Selberg associées aux formes de Maass $\mathcal{F}^g_{[0,\Lambda]}(q)$ au point critique :

Théorème 4. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que pour $q \geqslant 5$ premier fixé, et pour $g \in S_4(q)$ une forme holomorphe de poids 4 fixée, on a pour $\Lambda \to +\infty$, la minoration*

$$|\{f \in B_\lambda(q),\ L(f \otimes g, \tfrac{1}{2} + ir) \neq 0, 0 \leqslant \lambda = 1/4 + r^2 \leqslant \Lambda\}| \geqslant (c + o(1)) \frac{\mathrm{Vol}(\Gamma_0(q)\backslash \mathbf{H})}{4\pi} \Lambda^2.$$

Ce théorème s'interprète via la théorie de la déformation spectrale de Phillips-Sarnak [PS]. Il implique qu'une proportion positive de formes primitives cuspidales sont "annihilées" par une déformation réelle analytique générique de $\Gamma_0(q)$, allant (dans l'espace de Teichmüller) dans la direction définie par la différentielle quadratique g. Sous la conjecture que la multiplicité des valeurs propres du Laplacien sur $\Gamma_0(q)$ est bornée par une constante absolue, la théorie de Phillips-Sarnak implique ainsi que pour une déformation générique de $\Gamma_0(q)$, le spectre du Laplacien n'est plus essentiellement *cuspidal* : i.e. la loi de Weyl forte n'est pas vérifiée.

Pour conclure cette section, il est bon de mentionner que les résultats présentés dans cette partie sont les plus représentatifs du point de vue de la complexité des techniques engagées, mais que d'autres, plus simples, sont parfois utilisés dans certains problèmes arithmétiques : par exemple dans les travaux de Merel sur les point de torsion des courbes elliptiques (cf. [Me, KM3, KM4]). Ces méthodes fournissent aussi des énoncés d'indépendances linéaires pour les images, par les opérateurs de Hecke, de différents "cycles" arithmétiques sur les courbes modulaires [V2, KMV3].

On peut aussi noter que des énoncés de non-annulation de fonctions L peuvent aussi être obtenus par des méthodes complètement différentes. Un exemple frappant et récent est donné dans la preuve par Vatsal et Cornut [Va, Cor] de la conjecture de Mazur sur la non-trivialité de certains diviseurs de Heegner dans les extensions anticyclotomiques, dont la preuve utilise des méthodes ergodiques. Dans [Va], Vatsal a remarqué que cette question peut se ramener à un problème de non-annulation pour certaines fonctions L de Rankin-Selberg et il est bien possible que ce problème soit accessible aux techniques analytiques.

4. La méthode d'amplification

Nous décrivons dans cette partie une autre utilisation possible de l'évaluation des moments d'ordre $\kappa \geqslant 1$ définis en (2.8).

4.1. Le problème de convexité. Soit $L(f,s)$ la fonction L d'une forme automorphe cuspidale sur $GL_d(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, l'Hypothèse de Riemann pour cette fonction L a la conséquence suivante sur la taille de $L(f,s)$ pour s sur la droite critique :

Conjecture. (Hypothèse de Lindelöf Généralisée). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *et pour* $\Re es = 1/2$, *on a*

$$L(f,s) \ll_\varepsilon (|s|^d Q_f)^\varepsilon.$$

En direction de cette conjecture, on a d'abord la majoration triviale (dite de convexité)

$$\forall \varepsilon > 0,\ L(f,s) \ll_\varepsilon (|s|^d Q_f)^{1/4+\varepsilon}, \tag{4.1}$$

qui résulte de l'équation fonctionnelle (2.1) et principe de convexité de Phragmen–Lindelöf.

Remarque 4.1. Cette majoration résulterait aussi de la représentation (2.9) et de la borne de Ramanujan-Petersson $|a_f(n)| \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ (voir [Mo] pour une preuve inconditionnelle de (4.1) suivant cette méthode).

Le problème de convexité consiste à faire un (petit) pas en direction de la conjecture de Lindelöf, en améliorant l'exposant (de convexité) 1/4 :

Problème de Convexité. *Montrer qu'il existe* $\delta > 0$, *tel que pour* $\Re es = 1/2$

$$L(f,s) \ll (|s|^d Q_f)^{1/4-\delta},$$

la constante impliquée dans le symbole $\ll$ *étant absolue.*

Remarque 4.2. Dans les applications, un seul des paramètres est amené à varier, les autres restant essentiellement fixés : ce peut être la variable complexe s, le conducteur q_f ou les paramètres à l'infini $\prod_{i=1..d}(1+|\mu_{f,i}|)$ (par exemple le poids ou la valeur propre pour les formes modulaires) ; dans la pratique, il suffit souvent de resoudre le problème de convexité par rapport à tel ou tel paramètre tout en conservant un contrôle raisonnable sur les autres (par exemple une dépendance polynomiale).

La célèbre majoration de Weyl [We]

$$\zeta(s) \ll_\varepsilon |s|^{1/6+\varepsilon} \tag{4.2}$$

résout le problème de convexité pour la fonction ζ suivant le paramètre s, alors que la majoration de Burgess [Bu]

$$L(\chi,s) \ll_\varepsilon |s|^2 q^{3/16+\varepsilon}, \tag{4.3}$$

résout le problème pour les fonctions L des caractères de Dirichlet par rapport à leur conducteur q. Les méthodes utilisées dans ces deux exemples sont assez spécifiques et ne semblent pas se généraliser facilement à des fonctions L de degré supérieur (voir cependant le travail de Fouvry-Iwaniec [FoI] qui résout le problème de convexité pour certaines fonctions L de caractères de Hecke d'un corps quadratique imaginaire, en utilisant des méthodes réminiscentes de celles de Burgess).

La notion de famille et la méthode des moments fournissent ici une approche systématique du problème de convexité. Le principe est le suivant : plutôt que de résoudre le problème pour une fonction $L(f,s)$ "à la fois" (comme l'ont fait Weyl et Burgess dans les exemples précédents mais aussi Weil pour l'Hypothèse de Riemann des fonctions L des courbes sur les corps finis) on la plonge dans une famille $\mathcal{F}(Q)$ avec $Q_f \sim Q$ et on va chercher à résoudre le problème simultanément pour tous les membres de la famille (un peu comme l'a fait Deligne il y a trente ans pour les conjectures de Weil et un peu plus tard Laumon — avec une famille différente — quand il a donné une preuve alternative de ces mêmes conjecture [De1, De2, La]).

Pour notre problème, on majore simplement le moment d'ordre κ pour κ convenable. On obtient en général une majoration de la forme

$$\sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} |L(f,s)|^{\kappa} \ll_{\varepsilon} Q^{\varepsilon}|\mathcal{F}(Q)| \tag{4.4}$$

que l'on peut interpréter comme l'Hypothèse de Lindelöf Généralisée "en moyenne". Oubliant alors tous les termes de la somme (4.4) sauf un, on obtient la majoration

$$L(f,s) \ll_{\varepsilon} Q^{\varepsilon}|\mathcal{F}(Q)|^{1/\kappa}\ ;$$

ainsi le problème de convexité sera résolu si on peut prendre $\kappa > \kappa_0 = 4\frac{\log|\mathcal{F}(Q)|}{\log Q}$.

Remarque 4.3. Le choix d'une famille $\mathcal{F}(Q)$ appropriée fait aussi partie du problème et peut être non-trivial : $\mathcal{F}(Q)$ doit être à la fois suffisamment grande ("spectralement complète") pour pouvoir pratiquer de l'analyse harmonique et obtenir (4.4) et pas trop pour ne pas avoir à calculer un moment d'ordre κ trop élevé. En particulier, on retrouve Le moment limite $\kappa_0 = 4\frac{\log|\mathcal{F}(Q)|}{\log Q}$ qui est, à la fois, celui au delà duquel on brise la convexité et celui où apparaissent les termes non-diagonaux non-triviaux (cf. Section 2.3) : rien n'est jamais gratuit en ce bas monde !

En général, on peut arriver à (4.4) pour le moment critique κ_0 par des arguments assez généraux (ie des inégalités de grand crible) et pour aller au delà plusieurs options sont disponibles :

- Obtenir (4.4) pour $\kappa_0 + 1$, ce qui est parfois faisable.
- Établir (4.4) pour le moment d'ordre κ_0 mais en se restreignant à une sous-famille de $\mathcal{F}(Q)$ assez petite ; par exemple, en passant des familles $\mathcal{F}_{[K,2K]}(q,\chi)$ ou $\mathcal{F}^{g}_{[K,2K]}(q,\chi)$, aux familles $\mathcal{F}_{[K,K+K^{\alpha}]}(q,\chi)$ ou

$\mathcal{F}^g_{[K,K+K^\alpha]}(q,\chi)$ pour un certain $\alpha < 1$ aussi petit que possible. Mais il faut s'attendre à ce que — par le principe d'incertitude— l'analyse harmonique sur cette sous-famille soit plus difficile !

- Utiliser un *amplificateur* : cette méthode inventée par Iwaniec [FoI, Iw2] et utilisée à ce nombreuses reprises depuis, permet d'éviter les deux options précédentes. Rappelons (voir aussi [Fr]) que la méthode d'amplification consiste à majorer le moment d'ordre κ_0 défini par (2.8) pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{C}^L$ général afin d'obtenir l'analogue de (4.4) :

$$\sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} |L(f,s)|^{\kappa_0}|M(f,s)|^2 \ll_\varepsilon Q^\varepsilon|\mathcal{F}(Q)|\sum_{\ell\leqslant L}\frac{|x_\ell|^2}{\ell} \tag{4.5}$$

pour un certain $L = Q^\Delta$ avec $\Delta > 0$ aussi grand que possible. Ensuite on choisit les coefficient $\vec{x} = (x_1,\dots,x_L)$ de sorte que si $L(f_0,s)$ est le terme qu'on désire majorer $M(f_0,s)$ *amplifie* la contribution de ce terme : on peut choisir $\vec{x}$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour un certain $\alpha = \alpha(d) > 0$ on ait, à la fois,

$$\sum_{\ell\leqslant L}\frac{|x_\ell|^2}{\ell} \ll_\varepsilon L^\varepsilon, \text{ et } |M(f_0,s)|^2 = \Big|\sum_{\ell\leqslant L}\frac{\lambda_{f_0}(\ell)x_\ell}{\ell^s}\Big|^2 \gg L^\alpha. \tag{4.6}$$

Cette fois-ci la fonction $f \mapsto M(f,s)$ agit à l'opposé d'un *mollifieur*. On obtient alors

$$L(f_0,s) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon|\mathcal{F}(Q)|^{1/\kappa_0}L^{-\alpha/\kappa_0} \ll_\varepsilon Q_{f_0}^{1/4-\alpha\Delta/\kappa_0+2\varepsilon}.$$

Remarque 4.4. Cette méthode est tout à fait “morale” : en effet, (4.6) ne contredit en rien la majoration générale (4.5) : le vecteur $\vec{x}$ qui a été choisi est relatif à la forme particulière f_0 et pour $f \neq f_0$ dans $\mathcal{F}(Q)$ on peut montrer (sous une Hypothèse de Riemann Généralisée convenable) la majoration

$$\Big|\sum_{\ell\leqslant L}\frac{\lambda_{f_0}(\ell)x_\ell}{\ell^s}\Big|^2 \ll_\varepsilon L^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Bien entendu cette dernière majoration (conditionnelle) n'est pas utilisée dans la méthode d'amplification.

Ces trois approches ont été utilisées pour résoudre le problème de convexité pour les fonctions L associées aux formes automorphes sur $GL_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ et par rapport à chaque paramètre pris séparement (le paramètre s, le conducteur (ou niveau) q, le poids k ou la valeur propre λ).

Un cas remarquable où la première option a été utilisée (en passant de $\kappa_0 = 2$ à $\kappa = 3$) est le travail de Conrey-Iwaniec [CI] qui améliore la majoration de Burgess (4.3) pour les fonctions L de caractères de Dirichlet réels : ils montrent pour $\Re e s = 1/2$, la majoration

$$L(\chi, s) \ll_\varepsilon |s|^3 q^{1/6+\varepsilon}$$

qui est l'analogue de la majoration de Weyl (4.2). Pour cela ils réalisent $|L(\chi, s)|^2$ comme la fonction L de Hecke de la serie d'Eisenstein standard $E(z, s)$ tordue par le caractère χ et évaluée au point 1/2. Ils concluent en évaluant le moment d'ordre 3 en $s_0 = 1/2$ des fonctions L de Hecke des tordues par χ des formes de Maass pour $SL_2(\mathbb{Z})$ (provenant du spectre discret **et** continu). Ils parviennent à montrer la majoration correspondante à (4.4). Pour conclure, les auteurs invoquent alors le résultat de positivité suivant conséquence des formules de Walspurger [Wal]

$$L(f \otimes \chi, 1/2) \geqslant 0.$$

Ce cas est exemplaire à la fois par le choix (non évident) de la famille de fonctions L auxiliaire et aussi par l'utilisation d'un résultat profond de positivité pour les valeurs spéciales de fonctions L. Mentionnons également que Ivić [Iv] a utilisé un argument similaire pour résoudre le problème de convexité pour les fonctions L de formes de Maass au point spécial $s = 1/2$.

La deuxième méthode (de restriction à une sous-famille) peut être utilisée quand on cherche a résoudre le problème de convexité par rapport au poids k ou à la valeur propre λ (voir [Sa2]).

La troisième méthode (d'amplification) a été utilisée surtout pour résoudre le problème de convexité par rapport au conducteur q_f (où la méthode de restriction ne fonctionne pas), notamment dans la série de travaux de Duke, Friedlander et Iwaniec ([DFI1, DFI2, DFI3, DFI4, DFI5, DFI6, DFI7]) qui culmine dans [DFI8].

En regroupant les différents résultats connus sur le problème de convexité, on dispose maintenant de toute la technologie nécéssaire pour montrer l'énoncé particulièrement général suivant :

Théorème 5. *Soit f une forme automorphe (cuspidale) sur $GL_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ ou $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, le problème de convexité est résolu séparément par rapport à chacun des paramètres numériques dont peut dépendre f — le conducteur q, (si $d = 2$) le poids k ou la valeur propre du Laplacien λ— pour les fonctions L suivantes :*

- *La fonction de Hecke $L(f, s)$ associée à f.*
- *Toute fonction L de Rankin-Selberg $L(f \otimes g, s)$ où g est une forme automorphe cuspidale sur $GL_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ ou $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ préalablement fixée.*

De cet énoncé nous extrayons quatre cas particuliers, dont trois constituent les trois contributions les plus récentes au Théorème 5 et dont le second plus ancien, est recyclé dans la preuve du dernier cas :

Le premier cas est dû à Sarnak ; il brise la convexité par rapport au poids pour les fonctions $L(f \otimes g, s)$ de Rankin-Selberg [Sa2] :

Théorème 6. *Soit g une forme primitive cuspidale (holomorphe ou de Maass) fixée. Pour toute forme primitive cuspidale f, holomorphe de poids k, on a la majoration*

$$L(f \otimes g, s) \ll k^{1-7/165},$$

pour $\Re es = 1/2$; de plus, la constante impliquée dans la symbole $\ll$ ne dépend (polynomialement) que de s, du niveau de f et des paramètres de g.

Les trois autres cas sont relatifs au niveau : le second, plus ancien, et est dû à Duke-Friedlander-Iwaniec, et résout le problème de convexité pour les fonctions de Hecke tordues par un caractère χ en fonction du conducteur de χ [DFI1] :

Théorème 7. *Soit g une forme primitive cuspidale (holomorphe ou de Maass) fixée. Pour tout caractère primitif χ de conducteur q, on a la majoration*

$$L(g \otimes \chi, s) \ll q^{1/2-1/22},$$

pour $\Re es = 1/2$; de plus, la constante impliquée dans la symbole $\ll$ ne dépend (polynomialement) que de s, du niveau de f et des paramètres de g.

Le troisième est le résultat principal d'un article monumental de Duke-Friedlander-Iwaniec [DFI8] qui conclut un travail long de 8 ans qui achève la résolution du problème de convexité pour les fonctions L de Hecke par rapport au niveau :

Théorème 8. *Pour toute forme primitive cuspidale f, holomorphe ou de Maass de niveau q et de nebentypus primitif, on a la majoration*

$$L(f, s) \ll q^{1/4-1/23041},$$

pour $\Re es = 1/2$; de plus, la constante impliquée dans la symbole $\ll$ ne dépend (polynomialement) que de s, du niveau de f et des paramètres de g.

Remarque 4.5. En particulier, ce résultat résout potentiellement le problème de convexité pour les fonctions L d'Artin de degré 2 par rapport au conducteur (et en tout cas pour toutes celles qui sont "modulaires") au moins quand le conducteur de la représentation coïncide avec celui du déterminant.

Enfin, le dernier résultat rompt la convexité, pour la fonction de Rankin-Selberg $L(f \otimes g, s)$, par rapport au niveau de f et quand g est fixé. Il a été obtenu en deux temps, d'abord quand f holomorphe et de nebentypus trivial par Kowalski, l'auteur et Vanderkam [KMV3] puis dans le cas général par l'auteur [Mi2] (en particulier dans le cas extrême où le nebentypus de f est primitif) en combinant les méthodes (complémentaires) développées pour montrer les cas precédents [KMV3, DFI8, Sa2] avec le Théorème 7 :

Théorème 9. *Soit g une forme primitive cuspidale (holomorphe ou de Maass) fixée. Pour toute forme primitive cuspidale f, holomorphe ou de Maass sur $\Gamma_1(q)$, on a la majoration*

$$L(f \otimes g, s) \ll q^{1/2-1/1100},$$

pour $\Re e s = 1/2$; de plus, la constante impliquée dans la symbole $\ll$ ne dépend (polynomialement) que de s, du niveau de f et des paramètres de g.

4.2. Applications. Il est remarquable que le fait d'améliorer l'exposant de convexité, même de manière microscopique (par exemple de 1/23041) suffit à apporter une solution complète à certaines questions qui n'ont apparemment rien a voir avec les fonctions L.

Avant de passer à des applications plus élaborées, voici un corollaire très simple du Théorème 9.

Corollaire 4.1. *Soient $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \rho_f(n)e(nz)$ et $g(z) = \sum_{n\geqslant 1} \rho_g(n)e(nz)$ deux formes modulaires holomorphes de poids 2 (disons) pour $\Gamma_0(q)$ et $\Gamma_0(D)$ respectivement. Alors si f est primitive et $f \neq g$, le premier nombre premier p pour lequel $\rho_f(p) \neq \rho_g(p)$ est majoré par $\ll_D q^{1-1/550}$, la constante impliquée ne dépendant polynomialement que de D.*

Notons que le Theorème de Riemann-Roch appliqué à la courbe modulaire $X_0(qD)$ donnerait une majoration de la forme $\ll qD$ qui correspondrait essentiellement à la borne de convexité pour $L(f \otimes g, s)$. Cette borne est donc plus faible que celle du corollaire quand q est suffisamment grand devant D. Il serait intéressant de disposer d'une preuve géométrique de résultat.

4.2.1. *Application aux corps quadratiques imaginaires.* Le théorème 8 peut être utilisé pour donner des information non-triviales et inaccessibles jusqu'à present sur le groupe des classes d'ideaux $\mathrm{Pic}(O_K)$ d'un corps quadratique imaginaire K. Plus généralement pour tout ordre O contenu dans K et pour tout caractère ψ du groupe des classes d'idéaux $\mathrm{Pic}(O)$, on associe une fonction theta g_ψ qui est holomorphe de poids 1, de niveau $|\mathrm{Disc}(O)|$ et de nebentypus χ_K (le symbole de Kronecker de K). En appliquant le théorème 8 aux formes g_ψ pour $O = O_K$ on obtient par exemple le

Corollaire 4.2. *Tout sous-groupe cyclique de $\mathrm{Pic}(O_K)$ d'indice m est engendré par un ideal de norme $\ll m^2 D^{1/2-1/11521}$, où D est la valeur absolue du discriminant de K.*

Notons que la majoration de convexité fournirait essentiellement une borne de la forme $\ll D^{1/2}$ qui provient également du théorème de Minkowski (notons que le concept de convexité intervient aussi dans le théorème de Minkowski mais de manière assez différente). En particulier le corollaire est non-trivial dés que m n'est pas trop grand ($m \ll D^{1/23041}$).

4.2.2. *Applications aux points de Heegner.* Certaines applications du problème de convexité proviennent d'une interprétation arithmétique des valeurs spéciales des fonctions L : c'est notamment le cas dans la théorie des points de Heegner associés à un ordre d'un corps quadratique imaginaire. On rappelle que l'ensemble des points de Heegner sur $X_0(q)$ associés à un ordre $O \subset O_K$ est muni d'une action transitive de $\mathrm{Pic}(O)$. Etant donné un de ces points e, on défini alors pour tout caractère ψ de $\mathrm{Pic}(O)$ la ψ-composante isotypique de e

$$e_\psi := \sum_{\sigma \in \mathrm{Pic}(O)} \overline{\psi}(\sigma)(e^\sigma - (\infty)) \in \mathrm{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{C}.$$

Pour $f \in S_2^p(q)$, les formules de type Gross et Gross-Zagier interprètent la valeur spéciale en $1/2$ de la dérivée de la fonction de Rankin-Selberg $L(f \otimes g_\psi, s)$ comme la hauteur de Neron-Tate de la f-composante de e_ψ : on a

$$\langle e_{\psi,f}, e_{\psi,f} \rangle = c|\mathrm{Disc}(O)|^{1/2} L'(f \otimes g_\psi, 1/2)$$

pour une certaine constante absolue $c > 0$. On dispose également de formules analogues pour les diviseurs de Heegner sur les courbes de Shimura associées à une algèbre de quaternions (éventuellement définie) sur $\mathbb{Q}$ (cf. [G, GZ, BD1, BD2, Zh2]).

En particulier le théorème 9 appliqué à $f = f_E$ la forme modulaire associée à une courbe elliptique $E/\mathbb{Q}$ et $g = g_\psi$ la forme de poids 1 associée à un caractère de $\mathrm{Pic}(O)$ fournit une majoration "non-triviale" de la hauteur (de la projection sur E) du diviseur de Heegner $e_{\psi,E}$ qui est défini sur $E(H_O) \otimes \mathbb{C}$, soit quand le conducteur de E varie, soit quand le discriminant de O varie. Mais on ne dispose pas encore d'une interprétation géométrique de la borne de convexité dans ce contexte.

Le théorème 9 fournit également des renseignements sur la répartition des points de Heegner dans $X_0(q)$ (suivant la mesure hyperbolique). Quand le corps quadratique K est fixé et que le discriminant de l'ordre non-maximal O tend vers l'infini, l'équirépartition de points de Heegner correspondant à cet ordre a été établie par Clozel-Ullmo (voir aussi [Va] pour une variante sur les courbes de Shimura définies). Ici, on considère le cas "orthogonal" (plus difficile) de la répartition des points de Heegner relatifs à l'ordre maximal O_K quand K varie. Ainsi pour toute forme de Maass f, $L(f \otimes g_\psi, 1/2)$ s'interprète en termes de "somme de Weyl" relative à f : si on pose

$$W(f, \psi) := \frac{1}{|\mathrm{Pic}(O_K)|} \sum_\sigma \overline{\psi}(\sigma) f(e^\sigma)$$

on a (au moins si $\mathrm{Disc}(O_K)$ est premier avec q) la formule suivante due à Zhang [Zh2]

$$|W(f,\psi)|^2 = c\frac{|\mathrm{Disc}(O_K)|^{1/2}L(f\otimes g_\psi,1/2)}{|\mathrm{Pic}(O_K)|^2}. \tag{4.7}$$

Remarque 4.6. Dans le cas le plus simple de la courbe modulaire $X_0(1)$ et pour $\psi=\psi_0$ le caractère trivial de $\mathrm{Pic}(O_K)$ une telle formule résulte de travaux de Maass, et de la formule de Waldspurger reliant les coefficients de Fourier de poids demi-entiers aux valeurs spéciales de tordues quadratiques de fonctions L [Wal]).

Le théorème 9 appliqué par rapport au niveau de g_ψ, (4.7) et le théorème (ineffectif) de Siegel impliquent le

Corollaire 4.3. *Pour tout sous-groupe $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Pic}(O_K)$ d'indice m et pour tout forme cuspidale f on a*

$$W_{\mathcal{C}}(f) := \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{C}} f(e^\sigma) \ll m|\mathrm{Disc}(O_K)|^{-1/401}.$$

Le critère d'équirépartition de Weyl, et un résultat analogue au Corollaire 4.3 quand f est une série d'Eisenstein (dont la preuve utilise le Théorème 8) donne finalement le

Corollaire 4.4. *Soit q fixé. Quand $D=|\mathrm{Disc}(O_K)|\to+\infty$, pour tout sous-groupe $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Pic}(O_K)$ d'indice $m\leqslant D^{1/23042}$ l'orbite (incomplète) des points de Heegner $\{e^\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{C}}$ devient équirépartie relativement à la mesure hyperbolique sur $X_0(q)$.*

Plus généralement, les formules de Gross [G, BD1] (pour les algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$ qui sont définies) et de Zhang [Zh2] (dans le cas indéfini), impliquent l'équirépartition des orbites incomplètes de points de Heegner sur les courbes de Shimura correspondantes quand $D\to+\infty$.

Remarque 4.7. Quand l'orbite est complète ($\mathcal{C}=\mathrm{Pic}(O_K)$), ce théorème a été démontré par Duke [Du] en utilisant une méthode de Iwaniec [Iw1] pour majorer non-trivialement les coefficients de Fourier des formes de Maass de poids demi-entier. On peut aussi noter que ce cas résulte aussi du Théorème 7. Un résultat d'équirépartition analogue a été obtenu récemment par Paula Cohen pour les points de Heegner sur les surfaces modulaires de Hilbert et par Zhang pour les variétés modulaires de hilbert [Zh2], la preuve de ces deux résultats repose sur la généralisation par Cogdell, Piatetski-Shapiro et Sarnak [Cor, CPSS] du Théorème 7 aux formes modulaires de Hilbert sur les corps totalement réels. L'extension aux orbites incomplètes resulterait de la généralisation du Théorème 9 aux formes modulaires de Hilbert.

4.2.3. *Applications au Chaos Quantique Arithmétique.* Une conjecture de base de la théorie du chaos quantique — la conjecture QUE (pour "Quantum Unique Ergodicity", [RS]) —, quand on la spécialise aux courbes modulaires $X_0(q)$ (ou plus généralement aux surface de Riemann de type arithmétique) — prédit le comportement probabiliste des formes primitives cuspidales quand leur poids ou leur valeur propre tend vers l'infini.

Plus précisement, à une telle forme f on associe la mesure de probabilité

$$\mu_f := y^k |f(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2}$$

(où k est le poids de f) on a la conjecture suivante due à Rudnick-Sarnak

Conjecture 1. Quand k ou $\lambda \to +\infty$, la mesure μ_f converge faiblement vers la mesure de Poincaré $\frac{dxdy}{\mathrm{Vol}(X_0(q))y^2}$.

Remarque 4.8. Une conséquence particulièrement élégante de cette conjecture a été établie par Rudnick [Ru] : il montre que la conjecture QUE implique l'équirépartition des *zéros* de f quand f est holomorphe et de poids k tendant vers $+\infty$.

Cette foism les sommes de Weyl correspondantes à ce problème d'équirépartition s'expriment en terme de la valeur spéciale en $1/2$ de la fonction L du produit triple $L(f \otimes f \otimes g, s)$ introduite par Garrett [Ga] et étudiée par Rallis–Piatetski-Shapiro et Harris-Kudla [HK]. En effet, on a la formule suivante, due à T. Watson [Wat], qui est une forme précise et explicite de la formule de [HK] : pour toute forme primitive de Maass g sur $X_0(1)$

$$(4.8) \quad \Big| \int_{X_0(1)} g(z) d\mu_{f(z)} \Big|^2 = c \frac{\Lambda(f \otimes f \otimes g, 1/2)}{\Lambda(sym^2 f, 1/2)\Lambda(sym^2 f, 1/2)\Lambda(sym^2 g, 1/2)},$$

où c est une constante positive absolue. Notons aussi que si g est une série d'Eisenstein l'analogue de cette formule est simplement l'expression intégrale de la fonction de Rankin-Selberg $L(f \otimes f, s)$.

A partir de la formule (4.8) il est facile de voir que la critère d'équidistribution de Weyl (*i. e. que pour toute forme g fixée qu'elle soit cuspidale, ou d'Eisenstein, on a*

$$\int_{X_0(1)} g(z) d\mu_{f(z)} \to 0,$$

quand λ ou $k \to +\infty$) et donc la conjecture QUE est équivalente au problème de convexité pour $L(f \otimes f \otimes g, s)$ en $s = 1/2$ par rapport au poids ou à la valeur propre de f. En particulier la conjecture QUE est une conséquence (faible) de l'Hypothése de Riemann Généralisé ce qui la rend extrêmement plausible.

En fait le produit eulérien $L(f \otimes f \otimes g, s)$ de degré 8 se factorise en une fonction L de degré 2 et une de degré 6 : on a

$$L(f \otimes f \otimes g, s) = L(g, s) L(sym^2 f \otimes g, s)$$

et on est ramené au problème de convexité pour la fonction L de Rankin-Selberg d'une forme sur $GL_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ par une forme sur GL_2, un problème qui sera sans doute accessible dans un futur proche.

Dans le cas particulier où f est de type CM (provenant d'un caractère de Hecke sur un corps quadratique K) Sarnak a pu résoudre complètement la question, en remarquant qu'on a une factorisation supplémentaire

$$L(sym^2 f \otimes g, s) = L(\chi_K \otimes g, s) L(f^{(2)} \otimes g, s)$$

où $f^{(2)}$ est la forme de type CM obtenue en prenant le carré du caractère de Hecke attaché à f. Appliquant le théorème 6 on obtient le corollaire suivant [Sa2]

Corollaire 4.5. *La conjecture QUE est vraie pour les formes holomorphes de type CM : soit q fixé si f est une forme holomorphe de type CM et de poids k sur $X_0(q)$, alors quand $k \to +\infty$, la mesure μ_f converge faiblement vers la mesure de Poincaré sur $X_0(q)$. En particulier (cf. Remarque 4.8) les zéros de f deviennent équirépartis sur $X_0(q)$ relativement à la mesure hyperbolique. En particulier pour tout $z_0 \in X_0(q)(\mathbb{C})$ on a $\mathrm{ord}_{z=z_0} f(z) = o(k)$.*

Remarque 4.9. Du point de vue arithmétique, il sera sans doute très intéressant de developper des analogues de ces techniques par rapport au niveau plutôt que par rapport au poids. Elles devraient permettre d'étudier la distribution des valeurs des formes modulaires holomorphes de poids fixe (disons 2) et de grand niveau et en particulier la répartition de leurs zéros (dans un sens convenable). Ainsi, il devrait être possible donner des informations non-triviales sur la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique de grand conducteur. A titre d'exemple voici un analogue suivant le niveau q de la conjecture QUE 4.5 :

Conjecture 2. ([KMV3]) Soit $f \in S_2^p(q)$ un forme primitive holomorphe de poids 2 et de niveau q. On note $\pi_q : X_0(q) \to X_0(1)$ la projection canonique. Quand $q \to +\infty$ la mesure $\pi_{q,*}\mu_f$ converge faiblement vers la mesure de Poincaré sur $X_0(1)$.

Pour les formes de type CM, cette conjecture résulterait immédiatement du Théorème 9 et d'un analogue convenable de la formule (4.8).

5. Survol des techniques analytiques utilisées

Dans cette section, nous décrivons dans les grandes lignes, les méthodes utilisées pour montrer les Théorèmes 6, 8 et 9, ce qu'elles ont de commun et ce en quoi elles diffèrent.

Rappelons qu'on veut résoudre le problème de convexité pour $L(f \otimes g, s)$ dans le cas où g est fixée ; pour simplifier nous supposons que g est de niveau 1.

Remarque 5.1. Si on choisit $g(z) = E'(z, 1/2)$ on a $L(f \otimes g, s) = L(f, s)^2$ ce qui permet de résoudre paralèllement le problème de convexité pour les fonction L de Hecke.

D'après (2.9) et (2.4) ou (2.5), il suffit de majorer convenablement des sommes partielles de la forme

$$S(f, N) = \sum_n \rho_f(n)\rho_g(n)V(n/N)$$

où V est à décroissante rapide et $N \ll Q_{f\otimes g}^{1/2}$. On majore ces sommes, en les plongeant dans une famille appropriée, par la méthode des moments telle qu'elle a été décrite dans la section 2.3 en estimant le moment d'ordre 2 avec un amplificateur (cf. Section 4). Le point délicat est de choisir une famille appropriée $\mathcal{F}$: on choisit une famille de formes cuspidales dont les paramètres sont proches de ceux de f, par exemple si $f \in S_k^p(q, \chi)$ on peut choisir la famille $B_k(q, \chi)$ une base orthonormée convenable de l'espace $S_k(q, \chi)$ contenant f. Pour une majoration non-triviale suivant le poids, une telle famille est trop petite et on choisit plutôt la réunion $B_{[k,k+k^\alpha]}(q, \chi)$ des $B_{k'}(q, \chi)$ pour $k' \in [k, k + k^\alpha]$ et un certain $\alpha \leqslant 1$.

Remarque 5.2. Il y a une difficulté pour le poids $k = 1$ (quand on désire faire varier le niveau) : l'espace des formes de poids 1 est trop "petit" pour qu'on puisse y pratiquer une analyse harmonique convenable (en particulier on n'a pas de formule de traces), pour résoudre ce problème structurel Duke, Friedlander et Iwaniec considèrent au lieu de la forme holomorphe f, la forme réelle analytique $y^{1/2}f(z)$ qui est une forme de Maass de poids 1 de valeur propre 1/4. On choisit alors comme famille la réunion de bases orthogonales de formes de Maass poids 1 dont les valeurs propres sont dans un voisinage convenable de 1/4.

Une fois la famille choisie on estime le moment d'ordre 2 avec un amplificateur :

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} |S(f, N)|^2 |M(f)|$$

(ω_f est un facteur de normalisation convenable) ce qui nous amène essentiellement à majorer des sommes de la forme

$$\sum_{m,n} \rho_g(m)\overline{\rho_g(n)}V(m/M)V(n/N) \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \overline{\rho_f}(\ell m)\rho_f(n),$$

avec $M, N \approx Q \approx Q_{f_0}$ la variable ℓ provenant de l'amplificateur utilisé. On emploie alors une formule de trace ; dans ce cas, c'est la formule de Petersson (dans le cas holomorphe) ou l'une de ses généralisations non-holomorphes (Kuznetzov/Proscurin) : dans la cas des formes holomorphes de poids k la formule s'écrit

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}}\sum_{f\in B_k(q)}\overline{\rho_f}(m)\rho_f(n)=\delta_{m,n}+\Delta(m,n) \tag{5.1}$$

avec

$$\Delta(m,n)\ :=2\pi i^{-k}\sum_{\substack{c\equiv 0(q)\\ c>0}}\frac{S_\chi(m,n;c)}{c}J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\Big)$$

et $S_\chi(m,n;c)$ est la somme de Kloosterman (tordue par la caractère χ)

$$S_\chi(m,n;c)=\sum_{x(c),(x,c)=1}\chi(\overline{x})e\Big(\frac{m\overline{x}+nx}{c}\Big).$$

Reportant cette formule dans la précédente on obtient un terme diagonal qui est facile à estimer et le terme non-diagonal provenant de $\Delta(m,n)$ qui est plus difficile :

$$M_2^{ND}:=\frac{(4\pi)^k i^{-k}}{2\Gamma(k-1)}\sum_{\substack{c\equiv 0(q)\\ c>0}}\frac{1}{c} \tag{5.2}$$

$$\times\sum_{m,n}\overline{\rho_g}(m)\rho_g(n)S_\chi(\ell m,n;c)V(m/M)V(n/N)J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{\ell mn}}{c}\Big).$$

L'étape suivante consiste à ouvrir la somme de Kloosterman pour dualiser la variable m en utilisant une formule sommatoire de type Voronoi : par simplicité nous la donnons ici pour g holomorphe (on pourra consulter [KMV3] par exemple pour une version beaucoup plus générale).

Proposition 5.1. *Soit g une forme primitive holomorphe de poids k' et de niveau D et de nebentypus χ_g . Soient a,c premiers entre eux avec $c\equiv 0(D)$ et $F\in C^\infty(\mathbb{R}^{*+})$ une fonction lisse et à décroissance rapide aux bords, on a*

$$c\sum_{n\geqslant 1}\rho_g(n)e\Big(n\frac{a}{c}\Big)F(n)=\overline{\chi}_g(a)\sum_{n\geqslant 1}\rho_g(n)e\Big(-n\frac{\overline{a}}{c}\Big)\check{F}(n)$$

avec

$$\check{F}(y):=\int_0^\infty F(x)2\pi i^{k'}J_{k'-1}\Big(\frac{4\pi}{c}\sqrt{xy}\Big)dx.$$

En pratique, l'application de cette formule ne change pas de manière essentielle la longueur des sommes pour la variable m et la nouvelle variable n, en revanche la somme de Kloosterman $S(\ell m,n;c)$ est transformée en une somme de Gauss-Ramanujan

$$S_{\chi\chi_g}(\ell m-n,0;c)=\sum_{x(c)}\chi\chi_g(\overline{x})e((\ell m-n)\overline{x};c)=G_{\chi\chi_g}(n-m;c)$$

qui est structurellement plus simple. Par le changement de variable $h = \ell m - n$ on se ramène alors à majorer des sommes de la forme

$$\sum_h G_{\overline{\chi}}(h;c)S(g,\ell,1,h), \tag{5.3}$$

avec

$$S(g,\ell,1,h) := \sum_{\substack{m,n \\ \ell m - n = h}} \overline{\rho_g}(m)\rho_g(n)F(m,n)$$

où $F(x,y)$ est une certaine fonction lisse et m,n sont des variables de taille essentiellement Q.

Les sommes $S(g,\ell,1,h)$ qui sont des sortes de convolutions de Rankin-Selberg avec un décalage additif ont été étudiées dans des contextes variés en théorie analytique des nombres.

Pour la fréquence dégénérée $h = 0$, on obtient une somme partielle de la fonction L de Rankin-Selberg de g ; en particulier le terme correspondant dans le moment d'ordre 2 peut alors être évalué explicitement en fonction de $L(g \otimes \overline{g}, s)$ pour s proche de 1 (cf. par exemple KMV)).

Le point crucial est d'évaluer la somme $S(g,\ell,1,h)$ quand $h \neq 0$. Dans [DFI2], on trouve une technique relativement élémentaire, pour évaluer les sommes $S(g,\ell,1,h)$, basée sur la méthode du "δ-symbol" et sur les majorations de sommes de Kloosterman (voir [KMV3] où cette technique est généralisée). Dans beaucoup de cas, l'estimation qui en résulte est suffisamment bonne pour résoudre le problème de convexité, en particulier pour les fonctions $L(f,s)$ et $L(f\otimes g,s)$ suivant le poids de f et aussi suivant le niveau q quand le nebentypus de f est trivial [KMV3]. Mais cette technique seule ne suffit pas pour résoudre le problème de convexité suivant le niveau quand le nebentypus de f est primitif. En effet, si $\chi\chi_g$ est trivial, la somme de Gauss-Ramanujan $G_{\chi\chi_g}(h;c)$ dégénère en une somme de Ramanujan qui est essentiellement bornée alors que pour l'autre cas extrême où $\chi\chi_g$ est primitif, on obtient la somme de Gauss $G_{\chi\chi_g}(h;q)$ dont le module vaut essentiellement $\sqrt{q}$. Cette difficulté est résolue dans [Mi2] en exploitant la sommation supplémentaire sur la variable h et les oscillations du signe de $G_{\chi\chi_g}(h;q)$ qui est déterminé par $\overline{\chi\chi_g}(h)$. Avant de donner plus de détail sur la technique utilisée nous allons expliquer comment Duke, Friedlander et Iwaniec sont parvenus à résoudre ce problème délicat pour les fonctions L de Hecke de formes modulaires ayant un nebentypus primitif.

5.1. L'équation du déterminant. Dans [DFI7, DFI8], le problème posé par la somme de Gauss $G_{\chi\chi_g}(h;q)$ est résolu purement et simplement en la supprimant (!) grâce à une approche initiale légèrement différente de celle donnée précédemment. Rappelons que l'on désire majorer le moment d'ordre 4 (amplifié) de $L(f,s)$. Partons de l'identité (triviale)

$$|L(f,s)^2|^2 = |L(f,s)|^4 = (|L(f,s)|^2)^2,$$

la méthode présentée ci-dessus consiste a utiliser l'identité de gauche. L'approche choisie dans [DFI7, DFI8] est d'utiliser celle de droite. L'effet est qu'alors la somme partielle

$$S(f,N)=\sum_{n}\rho_f(n)\tau(n)V(n/N)$$

est remplacée par

$$S(f,N)=\sum_{n}\rho_f(n)\tau_\chi(n)V(n/N)$$

où dans le premier cas $\tau(n)$ est la convolution $(1*1)(n)$ et dans le second $\tau_\chi(n)=(1*\chi)(n)$, en particulier $\tau_\chi(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier d'une série d'Eisenstein $E_\chi(z)$ de niveau q et de nebentypus χ et non plus de niveau 1. On procède comme précédemment et après l'application d'une formule de Voronoi convenable (cf. Proposition 5.1) à $E_\chi(z)$ on obtient (car $q|c$) que la somme de Kloosterman est cette fois-ci transformée en une somme de Ramanujan! Cette manipulation a donc permis d'éliminer les problèmes liés à la taille de la somme de Gauss. Le prix à payer est l'estimation des sommes $S(g,\ell,1,h)$ avec $g=E_\chi$:

$$S(g,\ell,1,h)=\sum_{\substack{m,n\\ \ell m-n=h}}\overline{\tau_\chi}(m)\tau_\chi(n)F(m,n)$$

mais cette fois-ci le problème est considérablement plus difficile que précédemment puisque la fonction τ_χ dépend elle aussi de q.

Cette question délicate est résolue dans les deux articles [DFI5, DFI6] en considérant la somme précédente comme une somme portant sur les solutions $((m_1,m_2,n_1,n_2))$ de l'équation du déterminant $\ell m_1m_2-n_1n_2=h$. On interprète encore cette equation comme la congruence $\ell m_1m_2\equiv h \pmod{n_1}$:

$$\begin{aligned}S(g,\ell,1,h) &= \sum\sum_{\substack{m_1,m_2,n_1,n_2\\ \ell m_1m_2-n_1n_2=h}}\overline{\chi}(m_1)\chi(n_1)F(m_1m_2,n_1n_2)\\ &=\sum_{m_1,n_1}\alpha_{m_1}\beta_{n_1}\sum_{\substack{m_2\\ \ell m_2m_1\equiv h(n_1)}}F(m_1m_2,\ell m_1m_2-h).\end{aligned}$$

où α_{m_1},β_{n_1} désignent respectivement les complexes $\overline{\chi}(m_1)$ et $\chi(n_1)$. Ce changement de notation est justifié par le fait que le traitement qui suit est valable pour des coefficients complexes arbitraires α_{m_1}, β_{n_1}. Après quelques manipulations élémentaires et une application de la formule de Poisson à la variable m_2, on isole un terme non-diagonal principal provenant de la fréquence nulle $h=0$ dans la formule de Poisson et les autres fréquences $h \neq 0$ produisent des sommes de la forme

$$\sum_{\substack{m_1,n_1 \\ (\ell m_1,n_1)=1}} \alpha_{m_1}\beta_{n_1} e\Big(\frac{h\overline{\ell m_1}}{n_1}\Big) \leqslant ||\alpha||\Big(\sum_{m_1}\Big|\sum_{(\ell m_1,n_1)=1}\beta_{n_1} e\Big(\frac{h\overline{\ell m_1}}{n_1}\Big)\Big|^2\Big)^{1/2}$$

où les définitions de $\alpha_{m_1}, \beta_{n_1}$ peuvent avoir changé. La somme de droite est alors traitée par une nouvelle application de la méthode d'amplification mais dans une direction completement inattendue : on amplifie la somme correspondant au caractère trivial (donc invisible !) modulo m_1 dans la famille de sommes

$$\Big|\sum_{(\ell m_1,n_1)=1}\psi(n_1)\beta_{n_1} e\Big(\frac{a\overline{\ell m_1}}{n_1}\Big)\Big|$$

ψ parcourant l'ensemble des caractères multiplicatifs de module m_1. Nous renvoyons aux 4 articles [DFI5, DFI6, DFI7, DFI8] pour plus de détails. Le résultat technique fondamental est l'énoncé très général suivant et dont les applications avérées ou potentielles dépassent le cadre du problème de convexité (il sert par exemple pour des théorèmes de type Bombieri-Vinogradov) :

Théorème 10. *Soient α_m $M \leqslant m < 2M$ et β_n $N \leqslant n < 2N$ des nombres complexes, $a > 0$ un entier fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a la majoration*

$$\sum_{\substack{M\leqslant m<2M \\ N\leqslant n<2N,\ (m,n)=1}}\sum \alpha_m\beta_n e\Big(a\frac{\overline{m}}{n}\Big) \ll_\varepsilon ||\alpha||||\beta||(a+MN)^{14/29}(M+N)^{1/58+\varepsilon}.$$

Remarque 5.3. la majoration triviale est $||\alpha||||\beta||(MN)^{1/2}$; donc si $a \leqslant MN$ le théorème 10 est non-trivial dès que $M > N^\varepsilon$ et $N > M^\varepsilon$.

En conclusion le problème de convexité pour les fonction L de Hecke associée aux formes de nebentypus quelconque est résolu par une double application de la méthode d'amplification.

Mentionnons toutefois que pour les formes de poids 1 une difficulté technique supplémentaire se présente ; elle est liée au fait que la valeur propre 1/4 du le spectre discret est aussi contenue dans le spectre continu ; Dans ce cas précis la contribution du terme non-diagonal provenant de la fréquence dégénérée $h = 0$ n'est pas petit, mais il se compense exactement avec une contribution similaire provenant des séries d'Eisenstein (en fait seulement celles des pointes 0 et ∞) ; un point délicat est de vérifier que cette compensation a bien lieu (cf. [DFI8] 10.).

5.2. Retour sur les convolutions de Rankin-Selberg avec un décalage additif. Dans [Sa2], Sarnak a proposé une méthode alternative pour traiter les sommes de convolution "décalées"

$$S(g,a,b,h) = \sum_{\substack{m,n \\ am-bn=h}} \rho_g(m)\overline{\rho_g(n)}F(m,n) \tag{5.4}$$

rencontrées précédemment. Sa méthode repose sur une idée qui remonte à Selberg [Se] et qui a le mérite de dépendre explicitement de la conjecture de Ramanujan-Petersson pour les formes automorphes de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Plus précisement, on considère l'énoncé suivant :

Hypothèse $\mathbf{H}(\theta)$. *Pour toute forme automorphe cuspidale π définie sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, ses paramètres de Hecke, notés $\alpha_\pi^{(1)}(p)$, $\alpha_\pi^{(2)}(p)$ pour $p<\infty$ et $\mu_\pi^{(1)}(\infty)$, $\mu_\pi^{(j)}(\infty)$ vérifient les majorations :*
si π_p (resp. π_∞) est non-ramifiée, on majoration

$$|\alpha_\pi^{(j)}(p)| \leqslant p^\theta,\ j=1,2$$
$$(resp. \quad |\Re e\mu_\pi^{(j)}(\infty)| \leqslant \theta,\ j=1,2 \quad).$$

La conjecture de Ramanujan-Petersson prédit que $\mathbf{H}(\theta)$ est vraie pour $\theta=0$. D'autre part $\mathbf{H}(\theta)$ est vraie trivialement. Les progrès réalisés dans le programme de Langlands ont fait diminuer cette valeur de validité de $\mathbf{H}(\theta)$ au cours du temps ; actuellement la meilleure valeur connue est $\theta=7/64$ (valeur due a Kim et Sarnak en utilisant les travaux récents de Kim et Shahidi sur les puissances symétriques troisièmes et quatrièmes d'une forme automorphe [Ki, KiSh]). L'évaluation de la somme (5.4) est directement liée aux propriétés analytiques de la série de Dirichlet suivante :

Théorème 11. *On suppose que $\mathbf{H}(\theta)$ est vraie. Soit $\Re es>1$, $a,b,h>0$ et g une forme holomorphe cuspidale de poids k et de niveau D, posons*

$$D(g,a,b,h;s) = \sum_{\substack{m,n \\ am-bn=h}} \lambda_g(m)\overline{\lambda_g}(n)\Big(\frac{\sqrt{abmn}}{am+bn}\Big)^{k-1}(am+bn)^{-s}.$$

Soit $\theta'>\theta$, $D(g,a,b,h;s)$ s'étend en une fonction holomorphe dans le domaine $\Re es =: \sigma \geqslant 1/2+\theta'$ et vérifie dans ce même domaine la majoration, pour tout $\varepsilon>0$

$$D(g,a,b,h;s) \ll_{g,\varepsilon} (ab)^{1/2+\varepsilon}h^{\theta'+1/2-\sigma}|s|^3.$$

La preuve suit la démarche originale de Selberg : on considère la fonction $\Gamma_0(N)$ invariante (où $N=abD$)

$$V(z) = y^k g(az)\overline{g}(bz)$$

qui décroit rapidement aux pointes. Par un calcul standard, la série de Dirichlet est proportionnelle au produit scalaire de Petersson

$$\langle V, U_h(.,s)\rangle = \int_{X_0(N)} V(z)U_h(z,s)\frac{dxdy}{y^2}$$

où

$$U_h(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \Im m(\gamma z)^s e(-h\Re e\gamma z)$$

est une série de Poincaré. Soit $\phi_0 = 1/\mathrm{Vol}(X_0(N))^{1/2}, \phi_1, \dots, \phi_j, \dots$ une base orthonormée du spectre discret du Laplacien sur $X_0(N)$ de valeurs propres $\lambda_j = 1/4 + r_j^2$, on peut considérer le développement de $U_h(z,s)$ dans cette base pour en déduire

$$\langle V, U_h(.,s)\rangle = \sum_{j\geqslant 1}\langle U_h(.,s),\phi_j\rangle\langle V,\phi_j\rangle + \text{Eisenstein}. \tag{5.5}$$

où "Eisenstein" désigne la contribution du spectre continu. Par un autre calcul bien connu, on a l'égalité

$$\langle U_h(.,s),\phi_j\rangle = 2^s\frac{\overline{\rho_j(-h)}}{|h|^{s-1/2}}\Gamma\Big(\frac{s-1/2+ir_j}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s-1/2-ir_j}{2}\Big)$$

où $\rho_j(-h)$ est le coefficient de Fourier de ϕ_j d'indice $-h$; en particulier $\langle V, U_h(.,s)\rangle$ est holomorphe pour $\Re es > 1/2+\theta$.

Dans [Sa1], Sarnak a obtenu la majoration

$$\langle V,\phi_j\rangle \ll N^{1/2}(ab)^{-k/2}(1+|r_j|^{k+5})e^{-\pi|r_j|/2}$$

le point important dans cette majoration était d'obtenir exactement décroissance exponentielle en $e^{-\pi|r_j|/2}$. Elle permet de montrer le convergence absolue de la série (5.5) puis de conclure la preuve du Théorème 11 grâce aux majorations individuelles $\rho_j(-h) \ll_\varepsilon |h|^{\theta+\varepsilon}$.

Remarque 5.4. Cette méthode apparemment plus compliquée présente un certain nombre d'avantage sur la méthode élémentaire utilisant le $\delta-$ *symbol* et les sommes de Kloosterman

- Via le paramètre θ, elle tire directement avantage des progrès concernant la conjecture de Ramanujan-Petersson sur $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, (qui prédit que $\mathbf{H}(0)$ est vraie) alors que les majorations utilisant les sommes de Kloosterman fournissent des résultats correspondant à $\theta = 1/4$. On pourra donc sans doute améliorer certains des exposants de convexité précédents.
- Elle est très robuste et peut être étendue à des corps de nombres généraux (cf. l'exposé de J. Cogdell dans ce volume).
- Avec un ingredient supplémentaire, elle permet de résoudre le problème de convexité pour les convolutions de Rankin-Selberg $L(f\otimes g,s)$ suivant le niveau.

5.3. Le problème de convexité pour les fonctions L de Rankin-Selberg suivant le niveau. Nous pouvons maintenant évoquer la fin de la preuve du Théorème 9 suivant la méthode de [Mi2]. Notons d'abord que l'astuce décrite dans la section 5.1 ne peut être utilisée si g est cuspidale ($L(f \otimes g, s)$ n'est pas factorisable). On en revient donc à l'étape (5.3) et à traiter la somme $G_{\overline{\chi}}(h; c)$. Les techniques de la section précédente, permettent de découper la somme $S(g, \ell, 1, h)$ en sous-sommes correspondant aux différentes composantes du spectre de $X_0(D\ell)$: la partie Eisenstein et celles des différentes formes de Maass ϕ_j. Cette fois on va tirer avantage de la sommation par rapport à la variable h qui est de longueur $\approx q$: pour chaque ϕ_j, on est ramené à majorer des sommes de la forme

$$\sum_h \overline{\rho_j}(-h) G_{\chi\chi_g}(h; c) G(h/H)$$

pour G une fonction lisse à décroissance rapide et H de l'ordre de q. Comme de plus c vaut essentiellement q la somme se ramène à une somme de la forme

$$G_{\chi\chi_g}(q) \sum_h \rho_j(h) \chi\chi_g(h) G(h/H)$$

qui peut être evaluée en fonction de $L(\phi_j \otimes \chi\chi_g, s)$ sur la droite $\Re e s = 1/2$. En particulier, on montre que le problème de convexité pour $L(\phi_j \otimes \chi\chi_g, s)$ par rapport à q suffit à montrer que le terme (5.3) est petit. Et comme ce problème a déjà été résolu via le Théorème 7 on peut conclure (noter cependant un point important : dans cette majoration la dépendance en les autre paramètres de ϕ_j doit impérativement être au plus polynomiale).

Remarque 5.5. A nouveau, la solution de ce problème de convexité nécessite deux applications de la méthode d'amplification, (tout comme dans la section 5.1 quoique de manière assez différente) : il est assez remarquable que le problème de convexité pour des fonctions L de rang 4 se réduise au problème de convexité pour des fonctions L de rang inférieur. C'est sans doute un phénomène général.

Remarque 5.6. La technique présentée dans cette dernière partie doit pouvoir s'étendre au cas où g est une série d'Eisenstein (pour fournir une autre preuve du Théorème 8). La seule différence est que, quand g est Eisenstein, la série $D(g, a, b, h; s)$ admet un pôle en $s = 1$ et son résidu fournira un terme non-diagonal supplémentaire dont il faudra tenir compte dans les estimations. Une telle preuve aurait certains avantages sur celle de [DFI7, DFI8] :

- Elle est (conceptuellement) plus directe et en poids 0 ou 1, elle devrait permettre d'éviter la fastidieuse vérification d'une compensation entre le terme provenant de la fréquence dégénérée $h = 0$ et d'un autre provenant du spectre continu. En effet dans notre cas ce terme est nul dès que le caractère $\chi\overline{\chi}_g$ est non-trivial.

- Elle devrait fournir de meilleurs exposants de convexité (comparer 1/1100 avec 1/11521).
- Avec beaucoup d'effort, elle est susceptible de s'étendre dans certains cas aux corps de nombres totalement réels.

En revanche, cette approche n'aurait pas permis de découvrir le Théorème 10.

Bibliographie

[BD1] M. Bertolini, H. Darmon, *Heegner points of Mumford-Tate curves.* Invent. Math. **126** (1996), 413–456.

[BD2] M. Bertolini, H. Darmon, *A rigid analytic Gross-Zagier formula and arithmetic applications*, with an appendix by Bas Edixhoven. Ann. of Math. **146** (1997), 111–147.

[Bu] D. A. Burgess *On character sums and L-series.* Proc. London Math. Soc. **12** (1962), 193–206.

[Co] J. Cogdell, *On sums of three squares.* J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 33–44.

[CPSS] J. Cogdell, I.I. Piatetskii-Shapiro, P. Sarnak. En préparation.

[Cor] C. Cornut, *Mazur's conjecture on higher Heegner points.* Invent. Math. **148** (2002), 495–523.

[CI] B. Conrey, H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L-functions.* Annals of Math. **151** (2000), 1175–1216.

[CS] J. B. Conrey, K. Soundararajan, *Real zeros of quadratic Dirichlet L-functions.* Invent. Math. **150** (2002), 1–44.

[De1] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.* Publ. Math. IHES **43** (1974), 273–308.

[De2] P. Deligne, *La conjecture de Weil II.* Publ. Math. IHES **52** (1981), 313–428.

[Du] W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms.* Invent. Math. **92** (1988), 73–90.

[DFI1] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions.* Invent. Math. **112** (1993), 1–8.

[DFI2] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *A quadratic divisor problem.* Invent. Math. **115** (1994), 209–217.

[DFI3] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions, II.* Invent. Math. **115** (1994), 219–239.

[DFI4] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Class group L-functions.* Duke Math. J. **79** (1995), 1–56.

[DFI5] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bilinear forms with Kloosterman fractions.* Invent. Math. **128** (1997), 23–43.

[DFI6] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Representations by the determinant and mean values of L-functions.* Sieve methods, exponential sums, and their applications in number theory (Cardiff, 1995), 109–115, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 237, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[DFI7] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions, III.* Invent. Math. **143** (2001), 221–248.

[DFI8] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *The subconvexity problem for Artin L functions.* Invent. Math. **149** (2002), 489–577.

[FoI] É. Fouvry, H. Iwaniec, *A subconvexity bound for Hecke L-functions.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), 669–683.

[Fr] J. B. Friedlander, *Bounds for L-functions.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 363–373, Birkhäuser, Basel, 1995.

[Ga] P. Garrett, *Decomposition of Eisenstein series; Rankin triple products.* Annals of Math. **125** (1987), 209–235.

[GJ] S. GELBART, H. JACQUET, *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3). Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), 471–542.

[GoJ] R. GODEMENT, H. JACQUET, *Zeta functions of simple algebras.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260, 1972.

[G] B. GROSS, *Heights and the special values of L-series.* Number theory (Montreal, Que., 1985), 115–187, CMS Conf. Proc. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[GZ] B. GROSS, D. ZAGIER, *Heegner points and derivatives of L-series.* Invent. Math. **84** (1986), 225–320.

[HK] M. HARRIS, S. KUDLA, *the central value of a triple product L fuunction.* Annals of Math. **133** (1991), 605–672.

[HM] D. R. HEATH-BROWN, P. MICHEL, *Exponential decays for the frequency of the analytic rank of Automorphic L-functions.* Duke Math. Journal **102** (2000), 475–484.

[HL] J. HOFFSTEIN, P. LOCKHART, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero. With an appendix by Dorian Goldfield, Hoffstein and Daniel Lieman.* Ann. of Math. (2) **140** (1994), 161–181.

[HR] J. HOFFSTEIN, D. RAMAKRISHNAN, *Siegel zeros and cusp forms.* Internat. Math. Res. Notices 1995, no. 6, 279–308.

[Iw1] H. IWANIEC, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight.* Invent. Math. **87** (1987), 385–401.

[Iw2] H. IWANIEC, *The spectral growth of automorphic L functions.* J. Reine Angew. Math. **428** (1992), 139–159.

[IS1] H. IWANIEC, P. SARNAK, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros.* Israel J. Math. **120** (2000), part A, 155–177.

[IS2] H. IWANIEC, P. SARNAK, *Perspectives in the Analytic Theory of L functions.* GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 705–741.

[Iv] A. IVIĆ, *On sums of Hecke series in short intervals.* J. Théor. Nombres Bordeaux **13** (2001), 453–468.

[JS] H. JACQUET, J. A. SHALIKA, *On Euler products and the classification of automorphic representations. I.* Amer. J. Math. **103** (1981), 499–558.

[JPPS] H. JACQUET, I.I. PIATETSKII-SHAPIRO, J. A. SHALIKA, *Rankin–Selberg convolutions.* Amer. J. Math. **105** (1983), 367–464.

[KaSa1] N. M. KATZ, P. SARNAK, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 45. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[KaSa2] N. M. KATZ, P. SARNAK, *Zeroes of zeta functions and symmetry.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 1–26.

[Ki] H. KIM, *Functoriality for the exterior square of GL_4 and symmetric fourth of GL_2.* With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak. J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 139–183.

[KiSh] H. KIM, F. SHAHIDI, *Cuspidality of symmetric powers with applications.* Duke Math. J. **112** (2002), 177–197.

[Ko] V. KOLYVAGIN, *Euler Systems*, The Grothendieck festschrift. Prog. in Math. Boston, Birkhauser, 1990.

[KM1] E. KOWALSKI, P. MICHEL, *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions.* Duke Math. Journal **100** (1999), 503–542.

[KM2] E. KOWALSKI, P. MICHEL, *A lower bound for the rank of $J_0(q)$.* Acta Arith. **94** (2000), 303–343.

[KM3] E. KOWALSKI, P. MICHEL, *Deux Théorèmes de non-annulation pour les valeurs spéciales de fonctions L* . Manuscripta Math. **104** (2001), 1–19.

[KM4] E. KOWALSKI, P. MICHEL, *Appendice à "Sur la nature non cyclotomique des points d'ordre fini des courbes elliptiques" de L.* Merel. Duke Math. J. **110** (2001), 110–119.

[KMV1] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM, *Non-vanishing of higher derivatives of automorphic L-functions.* J. Reine Angew. Math. **526** (2000), 1–34.

[KMV2] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM, *Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications.* Invent. Math. **142** (2000), 95–151.

[KMV3] E. Kowalski, P. Michel, J. Vanderkam, *Rankin-Selberg L-functions in the level aspect.* Duke Math. J. **114** (2002), 123–191.

[La] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **65** (1987), 131–210.

[Lu] W. Luo, *On the nonvanishing of Rankin-Selberg L-functions.* Duke Math. J. **69** (1993), 411–425.

[Me] L. Merel, *Sur la nature non-cyclotomique des points d'ordre fini des courbes elliptiques.* Duke Math. J. **110** (2001), 81–119.

[Mi1] P. Michel, *Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires.* Exposé Bourbaki 887, Mars 2001.

[Mi2] P. Michel, *the subconvexity problem for Rankin-Selberg L functions with nebentypus and the equidistribution of Heegner points.* Annals of Math, à paraître.

[MV] P. Michel, J. Vanderkam, *Simultaneous non-vanishing of twists of automorphic L-functions.* Compositio Math. **134** (2002), 135–191..

[Mo] G. Molteni, *Upper and lower bounds at $s = 1$ for certain Dirichlet series with Euler product.* Duke Math. J. **111** (2002), 133–158.

[PS] R. S. Phillips, P. Sarnak, *On cusp forms for co-finite subgroups of* $\mathrm{PSL}(2, R)$. Invent. Math. **80** (1985), 339–364.

[Ra] D. Ramakrishnan, *modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for* $SL(2)$. Annals of Math. **152** (2000), 45-111.

[Ru] Z. Rudnick, *Notes on zeros of modular forms*, preprint, 1999.

[RS] Z. Rudnick, P. Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds.* Comm. Math. Phys. **161** (1994), 195–213.

[Ro] D. Rohrlich, *Elliptic curves and the Weil-Deligne group.* Elliptic curves and related topics, 125–157, CRM Proc. Lecture Notes, 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Sa1] P. Sarnak, *Integrals of products of eigenfunctions.* Internat. Math. Res. Notices 1994, no. 6, 251–260.

[Sa2] P. Sarnak, *Estimates for Rankin-Selberg L-functions and Quantum Unique Ergodicity.* J. Funct. Anal. **184** (2001), 419–453.

[Sc] A. Scholl, *An introduction to Kato's Euler systems*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 379–460, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[Se] A. Selberg, *Collected papers. Vol. I, II*, (With a foreword by K. Chandrasekharan). Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[V1] J. VanderKam, *The rank of quotients of* $J_0(N)$. Duke Math. J. **97** (1999), 545–577.

[V2] J. VanderKam, *Linear independence of Hecke operators in the homology of* $X_0(N)$. J. London Math. Soc. **61** (2000), 349–358.

[Va] Vatsal, *Uniform distribution of Heegner points*, preprint, 2001.

[Wal] J.-L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier.* J. Math. Pures Appl. (9) **60** (1981), 375–484.

[Wat] T. Watson, *Rankin triple products and quantum chaos.* Thesis, Princeton Univ., Princeton, NJ, 2000.

[We] H. Weyl, *Zur Abschtzung von* $\zeta(1 + ti)$. Math. Z. **10** (1921), 88–101.

[Zh1] S. Zhang, *Heights of Heegner points on Shimura curves.* Ann. of Math. **153** (2001), 27–147.

[Zh2] S. Zhang, *Gross-Zagier formula for GL(2).* Asian J. Math. **5** (2001), 183–290.

Philippe Michel
Université Montpellier II
CC 051
34095 Montpellier Cedex 05
France
E-mail : `michel@darboux.math.univ-montp2.fr`