Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 319–349

Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa

par Emmanuel PEYRE

Résumé. Si V est une variété algébrique projective sur un corps de nombres dont les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir V d'une hauteur et d'étudier de manière asymptotique les points de hauteur bornée sur V. Le but de ce texte est de faire le survol d'un programme initié par Manin visant à interpréter de façon géométrique ce comportement.

Abstract. Let V be a projective algebraic variety over a number field such that the rational points of V are Zariski dense. It is natural to equip V with a height and to study the asymptotic behavior of the points of bounded height on V. The purpose of this text is a survey of the program started by Manin which proposes an interpretation of this behavior in terms of the geometry of V.

Soit $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ une variété projective dont les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. On peut alors munir $V(\mathbf{Q})$ de la hauteur exponentielle $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie par

$$H((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$$

si les x_i sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Il est alors naturel de vouloir étudier, de manière asymptotique, l'ensemble fini des points de $V(\mathbf{Q})$ dont la hauteur est bornée, lorsque la borne tend vers $+\infty$.

De manière plus générale, si F est un corps de nombres, il existe une hauteur naturelle $H_N : \mathbf{P}^N(F) \to \mathbf{R}$ et, pour tout morphisme de variétés $\phi : V \to \mathbf{P}^N_F$, on obtient par composition une hauteur $H : V(F) \to \mathbf{R}$. On souhaite alors étudier de manière asymptotique, pour tout ouvert U de V, le cardinal, éventuellement infini,

$$N_{U,H}(B) = \#\{\, x \in U(F) \mid H(x) \leqslant B \,\}$$

Manuscrit reçu le 13 décembre 2001.

lorsque le nombre réel B tend vers $+\infty$. Supposons que $U(F)$ soit non vide et que $N_{U,H}(B)$ soit fini pour tout B de $\mathbf{R}_+^*$. Sous ces hypothèses, dans tous les cas connus de l'auteur dans lesquels le terme dominant du comportement asymptotique a pu être déterminé, il est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ et $b \geqslant 1$. L'objectif est donc d'interpréter a, b et C de manière aussi géométrique que possible. Dans une série d'articles publiés entre 1989 et 1993, Manin a proposé, avec Batyrev, Franke et Tschinkel, une interprétation conjecturale pour les valeurs de a et b où n'interviennent que la classe du faisceau inversible $\phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_F}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$, la classe du faisceau canonique et le cône des classes de diviseurs effectifs. Un des points cruciaux dans cette interprétation fut de noter qu'il n'était possible de lier le comportement asymptotique à des invariants globaux de la variété qu'à la condition de se restreindre à des ouverts de V dans le dénombrement des points de hauteur bornée. Autrement dit, la compréhension du comportement asymptotique passe par celle de la répartition asymptotique des points de hauteur bornée pour la topologie de Zariski.

Par la suite, l'auteur de ce texte, Batyrev et Tschinkel mirent en évidence une formule empirique pour la constante C, qui, dans le cas où le faisceau $L = \phi^*(\mathscr{O}(1))$ est le faisceau anticanonique ω_V^{-1}, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace adélique $V(\boldsymbol{A}_F)$ associé à V. Là encore, un point crucial dans cette interprétation conjecturale est l'étude de la répartition asymptotique des points de hauteur bornée, mais cette fois pour la topologie adélique. De manière plus précise, on définit pour tout B de $\mathbf{R}_+^*$ la mesure

$$\boldsymbol{\mu}_{U,H\leqslant B} = \frac{1}{N_{U,H}(B)} \sum_{\substack{x\in U(F)\\ H(x)\leqslant B}} \delta_{(x)}$$

sur $V(\boldsymbol{A}_F)$, où U est un ouvert de Zariski de V et $\delta_{(x)}$ la mesure de Dirac en x. L'interprétation de C est directement liée à la compréhension de la limite éventuelle de cette mesure lorsque B tend vers $+\infty$.

Dans ce texte nous avons l'intention de présenter ces interprétations conjecturales lorsque $L = \omega_V^{-1}$ en faisant un survol des cas où elles ont été démontrées ainsi que des questions encore ouvertes.

Nous commencerons par quelques exemples élémentaires. Après quelques rappels sur les hauteurs et les conjectures de Manin, nous construirons la mesure adélique associée à une hauteur relative au faisceau anticanonique. Nous pourrons ensuite donner la formule empirique en précisant son lien avec la répartition adélique des points de hauteur bornée. Au paragraphe 6 nous donnerons une liste d'indices en faveur de cette formule. Nous décrirons ensuite comment, au niveau des torseurs universels, cette formule s'interprète naturellement, donnant un analogue de la notion de variété d'Hardy-Littlewood au sens de Borovoi et Rudnick. Le paragraphe 8 présente les perspectives ouvertes par le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel. Nous terminerons en décrivant brièvement la généralisation de la formule empirique au cas où $L \neq \omega_V^{-1}$ par Batyrev et Tschinkel.

Table des matières

1. Deux exemples, en marche d'approche

L'exemple le plus classique est celui de l'espace projectif. Rappelons une construction des hauteurs sur celui-ci

Notations 1.1. Dans la suite, F est un corps de nombres, et $\mathscr{O}_F$ son anneau des entiers. On note M_F l'ensemble des places de F, $M_{F,f}$ l'ensemble des places finies qu'on identifiera avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathscr{O}_F$ et $M_{F,\infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de F. Pour toute place w de F, on note F_w le complété de F pour w. On normalisera la valeur absolue $|\cdot|_w$ en w de la façon suivante :

$$\forall x \in F_w, \quad |x|_w = |N_{F_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

où v est la place de $\mathbf{Q}$ induite par w. Ces valeurs absolues présentent l'avantage de satisfaire la formule du produit :

$$\forall x \in F^*, \quad \prod_{w \in M_F} |x|_w = 1.$$

Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on note $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$ l'anneau des entiers dans $F_\mathfrak{p}$ et $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel. La hauteur H_n sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_F$ est alors donnée par la formule

$$H_n((x_0 : \ldots : x_n)) = \prod_{w \in M_F} \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_w.$$

Notons que pour $F = \mathbf{Q}$, on retrouve la hauteur classique

$$H_n((x_0 : \ldots : x_n)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \text{ si } \begin{cases} x_i \in \mathbf{Z} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ \mathrm{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant n}(x_i) = 1. \end{cases}$$

On note comme ci-dessus $N_{\mathbf{P}^n_F, H_n}(B)$ le nombre de points x de $\mathbf{P}^n(F)$ tels que $H_n(x) \leqslant B$.

Théorème 1.2 (Schanuel [Sc]). *Le comportement asymptotique, lorsque B tend vers $+\infty$, de $N_{\mathbf{P}^n_F, H_n}(B)$ est donné par la formule*

$$N_{\mathbf{P}^n_F, H_n}(B) = C_n \frac{1}{\zeta_F(n+1)} B^{n+1} + \begin{cases} O(B \log B) & \textit{si } n{=}1, \\ O(B^n) & \textit{sinon}, \end{cases}$$

avec

$$C_n = \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} \frac{hR}{w} (n+1)^{r_1 + r_2 - 1}$$

où r_1 désigne le nombre de places réelles de F, r_2 le nombre de places complexes, w le nombre de racines de l'unité dans ce corps, h le cardinal du groupe des classes d'idéaux, R le régulateur de F et d la valeur absolue de son discriminant.

En outre, la contribution de tout fermé de Zariski est négligeable. Cela est même valable pour tout sous-ensemble mince de $\mathbf{P}^n_F$, ces ensembles étant définis de la manière suivante :

Définition 1.3. Un sous-ensemble W de $\mathbf{P}^n(F)$ est dit mince s'il existe un morphisme de variétés algébriques sur F

$$\pi : X \to \mathbf{P}^n_F$$

tel que $W \subset \pi(X(F))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle définie sur F.

Un exemple typique est celui des éléments de la forme $(x^3 : y^3)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Précisons que, dans cette définition, la variété X n'est pas supposée irréductible.

Théorème 1.4 (Serre, [Se2, §13.1.3]). *Si W est un sous-ensemble mince de $\mathbf{P}^n(F)$ alors le nombre $N_{W, H_n}(B)$ des points de W de hauteur majorée par B vérifie*

$$N_{W, H_n}(B) = O(B^{n+\frac{1}{2}} (\log B)^\gamma)$$

avec $\gamma < 1$.

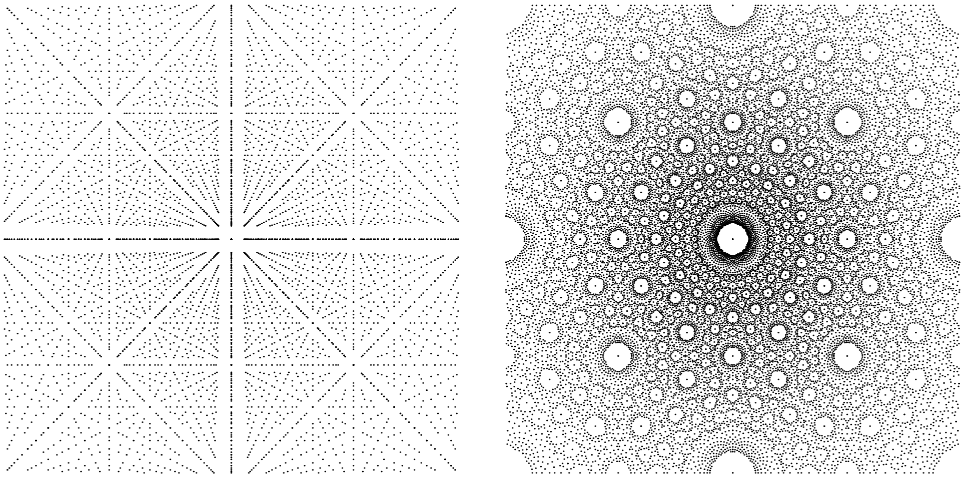
Afin d'illustrer le théorème de Schanuel nous avons représenté sur la figure 1 d'une part l'ensemble

$$\{\, x = (x_0 : x_1 : 1) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) \mid \ |x_0| < 1,\, |x_1| < 1,\ H_2(x) \leqslant 20 \,\}$$

et d'autre part l'ensemble

$$\{\, x = (x_0 + iy_0 : 1) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}(i)) \mid \ |x_0| < 1,\, |y_0| < 1,\ H_1(x) \leqslant 20 \,\}.$$

FIG. 1 – Le cas d'un espace projectif



$\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ $\qquad$ $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}(i))$

Exemple 1.5. Comme deuxième exemple, nous considérerons la surface V obtenue en éclatant les points

$$P_0 = (1:0:0), \quad P_1 = (0:1:0) \quad \text{et} \quad P_2 = (0:0:1)$$

sur le plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Cette surface peut être vue comme une hypersurface du produit $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ dont les points rationnels sont donnés par

$$V(\mathbf{Q}) = \{\, ((x_0 : y_0), (x_1 : y_1), (x_2 : y_2)) \mid x_0x_1x_2 = y_0y_1y_2 \,\}.$$

La surface V contient 6 diviseurs exceptionnels donnés par les équations

$$E_{i,j} : \quad x_i = y_j = 0$$

pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant 2$ et $i \neq j$. On notera U le complémentaire de ces diviseurs exceptionnels. Le faisceau anticanonique $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(1,1,1)$ est très ample et définit un plongement de V dans $\mathbf{P}^7_{\mathbf{Q}}$ correspondant aux monômes $X_0X_1X_2$, $X_0X_1Y_2$, $X_0Y_1X_2$, $Y_0X_1X_2$, $X_0Y_1Y_2$, $Y_0X_1Y_2$, $Y_0Y_1X_2$ et $Y_0Y_1Y_2$. La hauteur correspondante est donc donnée par

$$H((x_0 : y_0), (x_1 : y_1), (x_2 : y_2)) = \prod_{i=0}^{2} \sup(|x_i|, |y_i|)$$

si les (x_i, y_i) sont des paires d'entiers premiers entre eux.

Proposition 1.6. *Le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur U est donné par la formule*

$$N_{U,H}(B) \sim \frac{1}{3} \prod_{p \text{ premier}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^4 \Big(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) B (\log B)^3.$$

Par ailleurs, le nombre de points de hauteur bornée sur chacun des $E_{i,j}$ est donné par la formule

$$N_{E_{i,j},H}(B) \sim \frac{2}{\zeta_{\mathbf{Q}}(2)} B^2.$$

Nous renvoyons à [Pe1, §7] pour la démonstration de ce résultat.

Remarques 1.7. (i) On constate donc que $N_{U,H}(B)$ est négligeable devant $N_{E_{i,j},H}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$. Si on considère le terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur V tout entier, celui-ci est donné par le nombre de points sur la réunion des diviseurs exceptionnels et ne dépend que de la restriction de la hauteur à cette réunion de droites. Un des points cruciaux dans les conjectures de Manin est de noter que la géométrie globale de la variété puisse réapparaître si on considère le comportement asymptotique sur le complémentaire U de ces droites.

(ii) En ce qui concerne la constante, c'est Beukers qui, le premier, a noté dans ce cas que le produit eulérien peut se mettre sous la forme

$$\prod_{p \text{ premier}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic}(V)} \frac{\# V_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_p)}{p^{\dim V}}$$

où $V_{\mathbf{F}_p}$ est la surface sur $\mathbf{F}_p$ obtenue en éclatant les trois points P_0, P_1 et P_3 dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_p}$. Notons que cette réécriture vaut également pour l'espace projectif : le quotient $\frac{1}{\zeta_{\mathbf{F}}(n+1)}$ se met en effet sous la forme

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f}} \Big(1 - \frac{1}{\# \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}\Big)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic}(\mathbf{P}^n_F)} \frac{\# \mathbf{P}^n(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{\# \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^n}.$$

Ces descriptions suggèrent immédiatement que la constante puisse se décrire dans certains cas en termes d'un volume pour une mesure de Tamagawa convenablement choisie.

2. Point de vue sur les hauteurs

Depuis Weil (cf. [We1], [Né]), de nombreuses variantes de la notion de hauteur ont été utilisées (cf., par exemple, [Ar], [Se2], [BGS]). Dans ce texte, nous utiliserons, comme Batyrev et Manin [BM], les hauteurs exponentielles définies par des métriques adéliques sur des faisceaux inversibles. C'est en effet en ces termes que la construction de la mesure de Tamagawa est la plus simple.

Notations 2.1. Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, $\mathscr{X}(B)$ désigne l'ensemble des B-points de $\mathscr{X}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{X})$, et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si X est une variété sur un corps E de clôture algébrique $\overline{E}$, $X(E)$ est donc l'ensemble des points rationnels de X et on notera $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{E}}$. Nous dirons qu'une variété sur E est *bonne* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre.

Si V est une bonne variété sur F et L un faisceau inversible sur V, alors pour toute extension E de F et tout x de $V(E)$, on note $L(x)$ la fibre du fibré en droites associé donnée par

$$L(x) = L_x \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} E$$

où L_x désigne la fibre de L en x au sens des faisceaux ; $L(x)$ est un espace vectoriel de dimension un sur E.

Si v est une place de F et L un faisceau inversible sur une bonne variété V, une *métrique v-adique* est une application qui à tout point x de $V(F_v)$ associe une fonction

$$\| \cdot \|_v : L(x) \to \mathbf{R}_+$$

vérifiant les conditions

M1 $\forall x \in V(F_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = 0 \Leftrightarrow y = 0,$

M2 $\forall x \in V(F_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \forall \lambda \in F_v, \quad \|\lambda y\|_v = |\lambda|_v \|y\|_v,$

M3 si s est une section de L définie sur un ouvert U de V, l'application de $U(F_v)$ dans $\mathbf{R}_+$ envoyant x sur $\|\mathsf{s}(x)\|_v$ est continue pour la topologie v-adique.

Un exemple fondamental de métrique est celle définie par un modèle du fibré :

Exemple 2.2. Si $S \subset M_{F,f}$ est un ensemble fini de places non-archimédiennes, on note $\mathscr{O}_S$ l'anneau des S-entiers. Si $\mathscr{V}$ est un modèle projectif et lisse de V sur $\mathscr{O}_S$ et $\mathscr{L}$ un modèle de L sur $\mathscr{V}$, pour toute place v de $M_{F,f} - S$, on peut définir une métrique v-adique sur L de la façon suivante : Comme $\mathscr{V}$ est projective, un point x de $V(F_v)$ se relève en un unique point $\tilde{x}$ de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v)$. Le faisceau inversible $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_v)$ correspond à un

$\mathscr{O}_v$-module libre de rang un dans $L(x)$. Soit y_0 un générateur de ce module, la métrique est alors donnée par

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v .$$

On dira que $\|\cdot\|_v$ est la métrique définie par le modèle $\mathscr{L}$.

Définition 2.3. Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}$, où $\|\cdot\|_v$ est une métrique v-adique sur L, telle qu'il existe une partie finie S de $M_{F,f}$, un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ de sorte que, pour tout place v de $M_{F,f} - S$, la métrique $\|\cdot\|_v$ soit définie par $\mathscr{L}$.

Par abus de langage, nous appelerons ici *hauteur d'Arakelov* sur une bonne variété V une paire $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ formée d'un faisceau inversible L sur V et d'une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}$ sur L. La hauteur d'un point rationnel x de V relativement à H est définie par

$$\forall y \in L(x) - \{0\}, \quad H(x) = \prod_{v\in M_F} \|y\|_v^{-1}.$$

En effet pour tout y de $L(x) - \{0\}$, $\|y\|_v = 1$ sauf pour un nombre fini de places. Le produit ci-dessus a donc bien un sens et la formule du produit assure qu'il est indépendant du choix de y.

On note $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov quotienté par la relation d'équivalence engendrée par

$$(L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F}) \sim (L, (\lambda_v\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$$

si $(\lambda_v)_{v\in M_F}$ est une famille de nombres réels presque tous égaux à un et tels que le produit $\prod_{v\in M_F} \lambda_v$ vaille 1. Notons que si $x \in V(F)$ et H est une hauteur, $H(x)$ ne dépend que de la classe de H dans $\mathscr{H}(V)$.

On dispose d'une notion naturelle de produit tensoriel sur les hauteurs d'Arakelov. Celle-ci vérifie :

$$\forall x \in V(F), \quad (H_1 \otimes H_2)(x) = H_1(x)H_2(x)$$

et munit $\mathscr{H}(V)$ d'une structure de groupe. L'application qui à une hauteur associe la classe du fibré correspondant dans le groupe de Picard de V définit un morphisme d'oubli

$$\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \to \operatorname{Pic} V.$$

Remarques 2.4. (i) Si $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ et $H' = (L, (\|\cdot\|'_v)_{v\in M_F})$ sont deux hauteurs relatives à un même faisceau inversible L alors les métriques $\|\cdot\|_v$ et $\|\cdot\|'_v$ coïncident pour presque toute place v. En outre, pour toute place v, $\|\cdot\|'_v$ peut s'écrire $f_v\|\cdot\|_v$ où $f_v : V(F_v) \to \mathbf{R}_+^*$ est continue et donc bornée. Il existe donc des constantes C et C' telles que

$$\forall x \in V(F), \quad 0 < C < \frac{H(x)}{H'(x)} < C'.$$

Cette assertion reste vraie si la différence $\boldsymbol{o}(H) - \boldsymbol{o}(H')$ est un élément de torsion dans $\operatorname{Pic}(V)$, [Se2, §2.9].

(ii) Si $V = \operatorname{Spec} F$, alors on a un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \deg : \mathscr{H}(\operatorname{Spec} F) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}_+^* \\ H & \mapsto & H(x) \end{array}$$

où x est l'unique point de V.

(iii) Tout morphisme $\phi : V \to W$ entre bonnes variétés induit un morphisme de groupes $\phi^* : \mathscr{H}(W) \to \mathscr{H}(V)$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}(W) & \longrightarrow & \mathscr{H}(V) \\ {\scriptstyle \boldsymbol{o}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{o}}\big\downarrow \\ \operatorname{Pic}(W) & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(V). \end{array}$$

et tel que pour tout point rationnel x de V, on ait $\phi^*(H)(x) = H(\phi(x))$. En particulier, pour tout x de $V(F)$ l'application

$$\begin{array}{rcl} \text{év}_x : \mathscr{H}(V) & \to & \mathbf{R}_+^* \\ H & \mapsto & H(x) \end{array}$$

est la composée $\deg \circ x^*$.

Exemple 2.5. Si $V = \mathbf{P}_F^N$ et $L = \mathscr{O}(1)$, on note $\mathrm{s}_0, \ldots, \mathrm{s}_N$ la base usuelle de l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}_F^N, \mathscr{O}(1))$. Pour toute place v de F, on considère alors la métrique donnée par

$$\forall x \in \mathbf{P}^N(F), \quad \forall y \in \mathscr{O}(1)(x), \quad \|y\|_v = \inf_{\substack{\mathrm{s}_i(x) \neq 0 \\ 0 \leqslant i \leqslant N}} \left| \frac{y}{\mathrm{s}_i(x)} \right|_v$$

pour toute place finie v de F, cette métrique est la métrique définie par le faisceau inversible $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^N_{\mathscr{O}_F}$. La famille $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_F}$ est donc une métrique adélique sur $\mathscr{O}(1)$ et la hauteur d'un point est donnée par la formule

$$\forall (x_0 : \ldots : x_N) \in \mathbf{P}^N(F), \quad H((x_0 : \ldots, x_N)) = \prod_{v \in M_F} \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v$$

et on retrouve ainsi la hauteur H_N. Plus généralement, si $\phi : V \hookrightarrow \mathbf{P}_F^N$ est un plongement, $\phi^*(H)$ est une hauteur d'Arakelov sur V relative à $\phi^*(\mathscr{O}(1))$.

Remarque 2.6. Si V est une bonne variété, tout faisceau inversible s'écrit $L_1 \otimes L_2^{-1}$ où L_1 et L_2 sont très amples. Il résulte donc de l'exemple précédent que tout faisceau inversible peut être muni d'une métrique adélique. En particulier, le morphisme d'oubli $\boldsymbol{o}$ est surjectif.

Définition 2.7. On appelle *système de hauteurs* tout morphisme $\boldsymbol{H} : \mathrm{NS}(V) \to \mathscr{H}(V)$ qui est une section de la composée
$$\mathscr{H}(V) \xrightarrow{\boldsymbol{o}} \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{NS}(V)$$
un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ induit un accouplement
$$\boldsymbol{H} : \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(F) \to \mathbf{C}$$
qui est l'exponentielle d'une forme linéaire en la première variable et tel que
$$\forall L \in \mathrm{NS}(V), \quad \forall x \in V(F), \quad \boldsymbol{H}(L, x) = \boldsymbol{H}(L)(x).$$

Ces dénominations étant précisées, on peut aborder les questions de comportement asymptotique.

Notations 2.8. Si H est une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété V et W une partie de $V(F)$, on note pour tout réel strictement positif B
$$N_{W,H}(B) = \#\{\, x \in W \mid H(x) \leqslant B \,\}.$$
La fonction zêta associée est définie pour $s \in \mathbf{C}$ par la série
$$\zeta_{W,H}(s) = \sum_{x \in W} \frac{1}{H(x)^s}$$
lorsque celle-ci converge. Si $\boldsymbol{H}$ est un système de hauteurs sur V, on considérera également pour $\boldsymbol{s} \in \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ la série
$$\zeta_{W,\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{x \in W} \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{s}, x).$$
Si X est un sous-ensemble constructible de V, on notera $N_{X,H}$ (resp. $\zeta_{X,H}$, $\zeta_{X,\boldsymbol{H}}$) pour $N_{X(F),H}$ (resp. $\zeta_{X(F),H}$, $\zeta_{X(F),\boldsymbol{H}}$).

3. Une conjecture de Manin

Dans une série d'articles publiés entre 1989 et 1993, [FMT], [BM], [Ma], Manin a mis en place avec Batyrev, Franke et Tschinkel un programme en vue d'interpréter le terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Nous allons nous intéresser à une variante de la conjecture C′ de [BM].

Dans [BM, §3], Batyrev et Manin précisent que les conjectures énoncées sont à considérer plutôt comme des questions. Cette remarque vaut également pour les conjectures énoncées dans ce texte.

Avant d'énoncer la conjecture, il convient de préciser le type de variétés que nous utiliserons.

Définition 3.1. Si V est une bonne variété, on note $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs dans le groupe $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ et ω_V le faisceau canonique, puissance extérieure maximale du fibré cotangent Ω^1_V.

Nous dirons qu'une bonne variété V sur F est *presque de Fano* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

PF1 le groupe de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ est nul si $i = 1$ ou $i = 2$,

PF2 la torsion dans le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est triviale,

PF3 la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} est à l'intérieur de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.

Dans la suite, nous dirons qu'un fibré L sur V est *pseudo-ample* si sa classe appartient à l'intérieur de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.

Exemples 3.2. Si V est une variété de Fano, alors elle est presque de Fano ; en effet PF1 résulte du théorème d'annulation de Kodaira, PF2 du lemme 1.2.1 de [Pe1], et PF3 des définitions. Ces conditions sont également vérifiées par toute variété torique projective et lisse (cf. [Pe3], exemple 2.1.4).

Dans la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

Hypothèses 3.3. Désormais V est une variété presque de Fano telle que le groupe de Brauer cohomologique $H^2_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{G}_m)$ soit trivial et qui vérifie la condition suivante :

CP Il existe une famille finie $(n_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(\overline{V})$ telle que

$$C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_+ n_i.$$

Remarque 3.4. L'hypothèse CP nous sera utile pour donner un interprétation conjecturale de la puissance du logarithme et de la constante. Toutefois la structure du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est mal connue en général, même pour les variétés de Fano. Si V est une surface de Del Pezzo, cette hypothèse découle de la théorie de Mori. Cela est également le cas pour les variétés de Fano de dimension trois, comme l'a démontré Batyrev [Ba]. Cette condition est aussi vérifiée pour diverses familles de variétés (variétés de drapeaux, variétés toriques,...).

Nous pouvons alors définir les invariants géométriques intervenant dans la conjecture de Manin.

Définitions 3.5. Si L est un faisceau inversible pseudo-ample, on note

$$a_V^g(L) = \inf\{\, \gamma \in \mathbf{R} \mid \gamma[L] \in [\omega_V^{-1}] + C^1_{\mathrm{eff}}(V)\,\}.$$

On a alors que $a_V^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}] \in \partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ et on définit $b_V^g(L)$ comme la codimension de la face minimale de $\partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ contenant

$$a_V^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}].$$

Comme nous le verrons par la suite, la formule suivante, qui est une variante de la conjecture C′ de [BM], est vérifiée pour de nombreuses familles de variétés. Batyrev et Tschinkel [BT2] en ont toutefois donné un contre-exemple sur lequel nous reviendrons au paragraphe 8.

Formule empirique 3.6. *Si V vérifie les hypothèses précédentes et si H est une hauteur d'Arakelov relative à un fibré en droites L pseudo-ample, alors pour toute extension finie assez grande E de F et tout ouvert dense assez petit U de V, il existe une constante C_{H_E} telle que*

$$N_{U_E,H_E}(B) \quad \sim \quad C_{H_E} B^{a^g_{V_E}(L)} (\log B)^{b^g_{V_E}(L)-1}.$$

Remarques 3.7. (i) Ici, « corps assez grand » signifie contenant une extension convenable F_0 de F. De même, « ouvert assez petit » signifie contenu dans un ouvert convenable de V.

(ii) Notons que $a^g_{V_E}(L) = a^g_V(L)$ est stable par extension de corps, mais cela ne vaut pas pour $b^g_{V_E}(L)$.

(iii) Si on prends $L = \omega_V^{-1}$, la formule asymptotique s'écrit

$$N_{U,H}(B) \sim C_H B (\log B)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic} V - 1}$$

et c'est sur la demi-droite $\mathbf{R}^*_+ \omega_V^{-1}$ que la puissance de $\log B$ devrait être maximale.

(iv) L'analogue de cette assertion pour les fonctions zêtas des hauteurs est que pour tout corps de nombre assez grand et tout ouvert U assez petit, la série zêta ζ_{U_E,H_E} converge pour $\operatorname{Re}(s) > a^g_{V_E}(L)$ et s'étend en une fonction méromorphe sur un voisinage de la droite $\operatorname{Re}(s) = a^g_{V_E}(L)$ avec un unique pôle d'ordre $b^g_{V_E}(L)$ en $s = a^g_{V_E}(L)$.

Le cas d'une conique montre qu'il peut être nécessaire de passer à une extension du corps de base. A ce sujet, on peut se demander si toute extension sur laquelle les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski convient. D'autre part, l'exemple du plan projectif éclaté en trois points illustre le fait qu'il est crucial de se restreindre à un ouvert de la variété, un fermé pouvant avoir « trop » de points. Ceci amène aux définitions suivantes :

Notations 3.8. Soit X une partie constructible de V, pour toute hauteur H relative à un fibré pseudo-ample, on note

$$a_X(H) = \varlimsup_{B \to +\infty} \frac{\log(N_{X,H}(B))}{\log B}.$$

Remarques 3.9. (i) Le nombre $a_X(H)$ ne dépend en fait que de la classe de $L = \boldsymbol{o}(H)$ dans le groupe de Néron-Severi [BM, §1.4] et nous noterons également $a_X([L])$ ou $a_X(L)$ pour $a_X(H)$.

(ii) La formule empirique implique l'égalité entre $a_U(L)$ et $a^g_V(L)$.

Définition 3.10. On suppose que les points rationnels de V sont denses pour la topologie de Zariski. Un fermé irréductible strict X de V sera dit strictement accumulateur si pour tout ouvert non vide W de X, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$a_W(L) > a_U(L).$$

On dit que X est faiblement accumulateur si pour tout ouvert non vide W de X, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\varlimsup_{B\to+\infty} \frac{N_{W,H}(B)}{N_{U,H}(B)} > 0 \tag{3.1}$$

pour toute hauteur H relative à L.

Remarque 3.11. Il semble raisonnable d'espérer que la condition (3.1) ne dépende pas du choix de la métrique adélique sur L. Cela est vrai si les comportements asymptotiques pour U et W sont de la forme $CB^a(\log B)^{b-1}$.

Exemple 3.12. Nous reprenons les notations de l'exemple 1.5 pour le plan éclaté en trois points rationnels en position générale. Dans ce cas, on a vu que les diviseurs exceptionnels $E_{i,j}$ sont strictement accumulateurs pour ω_V^{-1}. On peut également montrer que leur complémentaire U ne rencontre pas de sous-variétés faiblement accumulatrices. Notons que cette dernière assertion reste valide si on considère une hauteur relative à $\omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1}$. En effet le fibré est alors l'image inverse de $\omega_{\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}}$ par la contraction $V \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ des diviseurs $E_{1,2}$, $E_{2,3}$ et $E_{3,1}$ et compter des points de U revient à compter des points sur un ouvert de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Par contre, si on considère une hauteur relative à $\omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{1,3}$, alors chacune des fibres de la première projection, qui correspond au système linéaire défini par $E_{1,2} + E_{1,3}$, est faiblement accumulatrice et le terme dominant du comportement asymptotique, qui est de la forme conjecturée, est obtenu en sommant les termes dominants sur chaque fibre. L'ensemble $V(F)$ est alors réunion de sous-variétés faiblement accumulatrices.

Pour déterminer l'ouvert de la conjecture, il conviendrait donc de donner une caractérisation géométrique des sous-variétés strictement accumulatrices. L'idée pour cela est de définir $a^g_X(L)$ pour tout fermé irréductible X de V, autrement dit d'étendre aux variétés éventuellement singulières la définition de $a^g_V(L)$. Si $X \subset V$ est un fermé irréductible de V, soient $\widetilde{X}$ une normalisation de X, $\varphi : \widetilde{X} \to V$ le morphisme induit et $X_0 \subset \widetilde{X}$ le lieu des points lisses de $\widetilde{X}$. On pose alors

$$a^g_X(L) = \inf\left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \;\middle|\; h^0(X_0, \varphi^*(L)^p \otimes \omega^q_{X_0}) > 0 \right\}$$

les candidats pour les fermés strictement accumulateurs pour L sont ceux pour lesquels $a^g_X(L) > a^g_V(L)$.

4. Hauteurs et mesures de Tamagawa

Supposons un instant que la formule empirique 3.6 soit vérifiée et que le complémentaire dans V des sous-variétés faiblement accumulatrices soit un ouvert dense U de V. Autrement dit, pour tout ouvert W de U, on a une équivalence

$$N_{W,H}(B) \sim N_{U,H}(B)$$

quand B tend vers $+\infty$. Il est alors naturel de s'interroger sur la répartition des points pour la topologie adélique. Comme nous allons le voir, cela est directement lié à l'interprétation de la constante C_H.

Notations 4.1. Si V est une bonne variété sur F, on note $V(\boldsymbol{A}_F)$ l'ensemble des adèles de V, qui est donné par

$$V(\boldsymbol{A}_F) = \prod_{v \in M_F} V(F_v),$$

puisque la variété est projective. Si H est une hauteur d'Arakelov sur V et U un ouvert non vide de V, pour tout B de $\mathbf{R}_+^*$ tel que $N_{U,H}(B)$ soit fini et non nul, on considère la mesure de probabilité sur $V(\boldsymbol{A}_F)$ définie par la formule

$$\boldsymbol{\mu}_{U,H\leqslant B} = \frac{1}{N_{U,H}(B)} \sum_{\substack{x \in U(F)\\ H(x)\leqslant B}} \delta_{(x)}$$

où $\delta_{(x)}$ est la mesure de Dirac en x.

Remarque 4.2. L'étude de la répartition asymptotique des points de hauteur bornée sur V revient donc à l'étude de la convergence de la mesure $\boldsymbol{\mu}_{U,H\leqslant B}$. De manière plus précise, existe-t-il une mesure borélienne de probabilité $\boldsymbol{\mu}_H$ sur $V(\boldsymbol{A}_F)$ de sorte que pour toute fonction continue $f : V(\boldsymbol{A}_F) \to \mathbf{R}$ on ait que

$$\int_{V(\boldsymbol{A}_F)} f\boldsymbol{\mu}_{U,H\leqslant B} \xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_{V(\boldsymbol{A}_F)} f\boldsymbol{\mu}_H.$$

Nous allons maintenant construire, dans le cas où $\boldsymbol{o}(H) = \omega_V^{-1}$ une mesure qui fournira une interprétation conjecturale à la fois pour C_H et pour la mesure $\boldsymbol{\mu}_H$. La construction de cette mesure est basée d'une part sur une généralisation immédiate du fait qu'une section continue du faisceau canonique d'une variété réelle définit une mesure, d'autre part sur les techniques d'intégration sur un espace adélique mises au point par Weil [We2].

Notations 4.3. Soit $H = (\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_F})$ une hauteur relative au faisceau anticanonique sur une variété presque de Fano V.

Pour toute place v de F, on normalise la mesure de Haar $\mathrm{d}x_v$ sur le corps localement compact F_v de la façon suivante :

– Si $v \in M_{F,f}$, $\int_{\mathscr{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$,
– Si $F_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$, alors $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$,
– Si $F_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, alors $\mathrm{d}x_v = i\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} = 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

On définit alors une mesure borélienne $\boldsymbol{\omega}_{H,v}$ sur $V(F_v)$ par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{n,v}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ est un système de coordonnées locales v-analytiques sur $V(F_v)$ et la forme $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ est vue comme section de ω_V^{-1}. Le fait que ces mesures se recollent bien résulte de la formule de changement de variables [We2, §2.2.1].

Remarque 4.4. Soit $\mathscr{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur un anneau de S-entiers $\mathscr{O}_S$ pour une partie finie S de $M_{F,f}$. Comme dans [We2], on peut déduire du fait que $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_F}$ est une métrique adélique que pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on a

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v}(V(F_\mathfrak{p})) = \frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_\mathfrak{p})}{\#\mathbf{F}_\mathfrak{p}^{\dim V}}.$$

En particulier, comme l'illustre le cas de l'espace projectif, le produit

$$\prod_\mathfrak{p} \boldsymbol{\omega}_{H,\mathfrak{p}}(V(\mathbf{F}_\mathfrak{p}))$$

diverge. Pour définir une mesure adélique, il convient donc, en imitant les contructions de Tamagawa et Weil [We2], d'introduire des facteurs de convergence.

Notations 4.5. Comme dans [Pe1, lemme 2.1.1], sous les hypothèses PF1–3, on peut se donner un ensemble fini de places finies et un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_S$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que pour toute place finie $\mathfrak{p}$ en-dehors de S, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ de façon compatible avec les actions des groupes de Galois.

Si $\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S$, le terme local de la fonction L associée à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ s'écrit

$$L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-s}\,\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \mid \mathrm{Pic}(V_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}}) \otimes \mathbf{Q})}$$

où $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ est le Frobenius en $\mathfrak{p}$. La fonction L globale est alors donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S} L_\mathfrak{p}(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})).$$

En utilisant des résultats d'Artin [Art, Satz 3], on obtient que ce produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'odre $t = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V)$ en $s = 1$.

Les facteurs de convergence que nous utiliserons sont définis de la façon suivante :

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic}(\overline{V})) \text{ si } v \in M_{F,f} - S, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition 4.6. Avec les notations qui précèdent, la *mesure de Tamagawa* associée à H est la mesure borélienne sur $V(\boldsymbol{A}_F)$ définie par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_H = \lim_{s \to 1} (s-1)^t L_S(s, \operatorname{Pic}(\overline{V})) \frac{1}{\sqrt{d_F}^{\dim V}} \prod_{v \in M_F} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,v}$$

où d_F désigne la valeur absolue du discriminant de F.

Remarque 4.7. Les arguments principaux pour montrer que cette mesure est bien définie sont les suivants : il suffit de montrer que pour tout S assez grand, le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic}(\overline{V}))^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}}))$$

converge, c'est-à-dire que le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_{F,f} - S} \operatorname{Det}(1 - \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{-1} \operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid \operatorname{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Q}) \frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{\dim V}}$$

converge. Soit ℓ un nombre premier et supposons que S contienne les idéaux premiers contenant ℓ. La formule de Lefschetz due à Grothendieck (cf. [Se1]) s'écrit

$$\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(\operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid H^i_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

En utilisant la conjecture de Weil démontrée par Deligne [Del, théorème 1.6] sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius et le fait que, pour presque tout $\mathfrak{p}$, le groupe $H^{2n-1}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ est trivial, on obtient que

$$\frac{\#\mathscr{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{\dim V}} = 1 + \frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}} \operatorname{Tr}(\operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid H^{2n-2}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell(n-1))) + O\Big(\frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{3/2}}\Big).$$

Enfin pour presque tout $\mathfrak{p}$, on a un isomorphisme issu de la dualité de Poincaré

$$\operatorname{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})^\vee \otimes \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} H^{2n-2}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_\ell(n-1)).$$

Définition 4.8. Soit $\overline{V(F)}$ l'adhérence des points rationnels dans $V(\boldsymbol{A}_F)$, on pose

$$\tau_H(V) = \boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(F)}).$$

On note également

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!} \int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \omega_V^{-1}, y\rangle} \mathrm{d}y$$

où $t = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V)$, $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ défini par

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{\, y \in \mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in C^1_{\mathrm{eff}}(V), \quad \langle x, y\rangle \geqslant 0 \,\}$$

et $\mathrm{d}y$ est la mesure de Haar sur $\mathrm{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}^\vee$ normalisée par le réseau $\mathrm{Pic}(V)^\vee$. Pour terminer, on pose

$$\beta(V) = \# H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$$

et

$$\theta_H(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V).$$

Remarques 4.9. (i) C'est Swinnerton-Dyer [SD] qui a mis clairement en évidence que le domaine d'intégration naturel est l'adhérence des points rationnels.

(ii) La constante $\alpha(V)$ peut être également décrite comme le volume du domaine

$$\{\, y \in C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \mid \langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1 \,\}$$

pour une mesure convenablement normalisée de l'hyperplan $\langle y, \omega_V^{-1}\rangle = 1$ (cf. [Pe1, §2.2.5]). En conséquence, sous les hypothèses 3.3, $\alpha(V)$ est un nombre rationnel.

(iii) C'est Batyrev et Tschinkel qui ont montré la nécessité d'introduire la constante $\beta(V)$ dans ce contexte (cf. [BT1]).

5. Une formule empirique

Lorsque $\boldsymbol{o}(H) = \omega_V^{-1}$, une version raffinée de la conjecture de Manin s'écrit :

Formule empirique 5.1. *Soit V une variété vérifiant les hypothèses 3.3 et H une hauteur d'Arakelov sur V relative au faisceau anticanonique. Si $V(F)$ est dense pour la topologie de Zariski et le complémentaire des sous-variétés faiblement accumulatrices pour H est un ouvert dense U de V, on a*

$$\text{(F)} \qquad \begin{array}{rcl} N_{U,H}(B) & \sim & \theta_H(V) B (\log B)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}\,V - 1} \\ B & \to & +\infty. \end{array}$$

Remarque 5.2. (i) L'analogue en termes de la fonction $\zeta_{U,H}(s)$ est d'espérer que

$$\lim_{s\to 1} (s-1)^t \zeta_{U,H}(s) = (t-1)!\,\theta_H(V).$$

En ce qui concerne la répartition des points pour la topologie adélique, on obtient dans plusieurs cas un résultat de la forme :

Répartition empirique 5.3. *Sous les mêmes hypothèses, si $f : V(\boldsymbol{A}_F) \to$ $\mathbf{R}$ est une fonction continue, alors*

$$\int_{V(\boldsymbol{A}_F)} f \boldsymbol{\mu}_{U,H\leqslant B} \xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_{\overline{V(F)}} f \frac{\boldsymbol{\omega}_H}{\theta_H(V)}$$

Ces deux aspects du comportement asymptotique sont liés par l'assertion suivante :

Proposition 5.4. *La formule (F) est vraie pour toute hauteur relative au faisceau anticanonique si et seulement si (F) et (E) sont vérifiées pour une hauteur relative à ce faisceau.*

Remarque 5.5. On peut noter qu'alors (E) est vraie pour toute hauteur relative à ω_V^{-1}.

On peut être également tenté de réunir la formule (F) et la formule empirique 3.6 en utilisant un système de hauteurs. On utilise pour cela la notion de fonction caractéristique du cône introduite dans ce contexte par Batyrev et Tschinkel.

Définition 5.6. La fonction caractéristique du cône $C^1_{\text{eff}}(V)$ est définie, pour $\boldsymbol{s}$ appartenant à $\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{C}$, par la formule

$$\chi_{C^1_{\text{eff}}(V)}(\boldsymbol{s}) = \int_{C^1_{\text{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle \boldsymbol{s}, y\rangle} \mathrm{d}y$$

Cette intégrale convergeant lorsque $\operatorname{Re} \boldsymbol{s}$ appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\text{eff}}(V)$.

Remarque 5.7. Sous les hypothèses 3.3, $\chi_{C^1_{\text{eff}}(V)}(\boldsymbol{s})$ s'étend en une fonction rationnelle sur $\operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{C}$.

Question 5.8. *Avec les notations qui précèdent, existe-t-il un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ sur V tel que la série $\zeta_{U,\boldsymbol{H}}$ converge sur le domaine*

$$\omega_V^{-1} + \overbrace{C^1_{\text{eff}}(V)}^{\circ} + i \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$$

et s'étende en une fonction méromorphe au voisinage de ω_V^{-1} avec comme partie principale en ce point la fraction rationnelle

$$\chi_{C^1_{\text{eff}}(V)}(\boldsymbol{s} - \omega_V^{-1})\beta(V)\tau_{H(\omega_V^{-1})}(V)?$$

Remarque 5.9. (i) Comme me l'a signalé Yuri Tschinkel, la question 2.6.1 de [Pe2] est mal posée, et il est facile de lui trouver une réponse négative parmi les variétés toriques.

(ii) Par partie principale, nous entendons terme de plus haut degré dans la décomposition de la fonction au voisinage de ω_V^{-1} (cf. [BV], par exemple).

6. Une liste de résultats

• La formule asymptotique (F) est compatible avec le produit de variétés au sens suivant : Soient H_1 et H_2 des hauteurs d'Arakelov sur des variétés presque de Fano V_1 et V_2 vérifiant les hypothèses 3.3. S'il existe des ouverts U_i de V_i tels que

$$N_{U_i,H_i}(B) = \theta_H(V_i)B(\log B)^{\mathrm{rg\,Pic}\,V_i-1} + O(B(\log B)^{\mathrm{rg\,Pic}\,V_i-2})$$

alors une formule analogue vaut pour le produit $U_1 \times U_2$ (Franke, Manin et Tschinkel [FMT]). Un énoncé analogue vaut pour (E).

• (F) et (E) sont compatibles avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$. En particulier, si V est une intersection complète lisse définie par m équations de même degré d en $N+1$ variables de sorte que

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$$

et si $V(\mathbf{Q}_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$ alors (F) et (E) sont vérifiées pour l'ouvert $U = V$ (Birch, [Bir], cf. également [Va] pour une description de la méthode du cercle, Franke, Manin et Tschinkel [FMT, §1] et [Pe1, §5] pour la constante).

• (F) et (E) sont vraies pour les variétés de drapeaux généralisés, c'est-à-dire pour les quotients G/P où G est un groupe algébrique linéaire sur F et P un F-sous-groupe parabolique de G avec $U{=}V$. Le cas de l'espace projectif sur $\mathbf{Q}$ est traité dans [HW], résultat généralisé à un corps de nombres par Schanuel [Sc], Schmidt avait traité le cas des Grassmanniennes sur $\mathbf{Q}$ dans [Sch]. Le cas général résulte des travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein (Langlands [Lan], Franke-Manin-Tschinkel [FMT, §2], [Pe1, §6] pour la constante). Cela s'applique en particulier aux quadriques.

• (F) a été démontrée pour les variétés toriques projectives et lisses, c'est-à-dire les compactifications équivariantes projectives et lisses de tores algébriques, en prenant comme ouvert U l'orbite ouverte du tore dans V (Batyrev et Tschinkel [BT1], [BT3] et [BT4], puis, avec une autre méthode sur $\mathbf{Q}$, Salberger [Sa] et la Bretèche [Bre1]).

• (F) est vraie pour certaines fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisés (Strauch et Tschinkel [ST1] et [ST2]).

• (F) et (E) sont valides pour des compactifications équivariantes lisses d'espaces affines, en choisissant l'orbite ouverte comme ouvert U (Chambert-Loir et Tschinkel [CLT1], [CLT2] et [CLT3]).

• (F) est vérifiée pour la surface de Del Pezzo de degré 5 obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, U étant obtenu comme complémentaire des dix diviseurs exceptionnels (Salberger, la Bretèche [Bre2]).

• En ce qui concerne les surfaces cubiques, différentes majorations pour le nombre de points sur le complémentaire des 27 droites ont été obtenues (cf. notamment Heath-Brown [HB2] et Broberg [Bro]) ainsi que des minorations (Swinnerton-Dyer [SSD]). D'autre part des tests numériques en bon accord avec la formule (F) ont été réalisés (Heath-Brown [HB1], [PT1] et [PT2]).

Remarque 6.1. Il est possible de considérer un analogue de ces formules sur un corps global de caractéristique finie (cf. [BM]). Quelques résultats ont été obtenus pour les variétés de drapeaux généralisés [Pe4] et les variétés toriques déployées [Bo].

7. Hauteurs et techniques de descente

L'objet de cette partie est d'apporter un nouvel indice en faveur de la formule (F) en expliquant comment, au niveau des torseurs universels, les facteurs $\alpha(V)$ et $\beta(V)$ recoivent une explication naturelle. Salberger fut le premier a mettre en lumière ce point dans [Sa], lui permettant de redémontrer le résultat de Batyrev et Tschinkel dans le cas de variétés toriques déployées sur $\mathbf{Q}$.

7.1. Les torseurs universels. La notion de torseur universel a été développée par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS1], [CTS2] et [CTS3], en vue de déterminer l'adhérence des points rationnels pour certaines classes de variétés. L'idée derrière cette introduction est que ces torseurs, d'un point de vue arithmétique, sont plus simples que la variété de départ. En particulier, à leur niveau, les obstructions de Brauer-Manin à l'approximation faible sont triviales. Il n'est donc pas très surprenant qu'ils apparaissent également dans le cadre des conjectures de Manin.

Si E est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et V une variété presque de Fano sur E, un torseur universel sur V peut être décrit de la façon suivante : soit $(L_1, \dots, L_t)$ une famille de fibré en droites dont les classes donnent une base de $\operatorname{Pic} V$. Considérons L_i^* le complémentaire de la section nulle dans L_i et

$$\mathcal{T} = L_1^* \times_V \cdots \times_V L_t^*$$

alors on a un morphisme naturel $\pi : \mathcal{T} \to V$ qui fait de V un quotient de $\mathcal{T}$ sous l'action du groupe $\mathbf{G}_{m,E}^t$ et on peut vérifier qu'à un isomorphisme près, le morphisme obtenu ne dépend pas de la base choisie. Les définitions suivantes permettent de généraliser cette notion à un corps arbitraire.

Définition 7.1.1. Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps E et X une variété sur E, un *G-torseur au-dessus de X* est la donnée d'un morphisme fidèlement plat π de Y vers X et d'une action $\mu : G \times Y \to Y$

de G sur Y telle que $\pi \circ \mu = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ et que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times_E Y & \to & Y \times_X Y \\ (g, y) & \mapsto & (gy, y) \end{array}$$

soit un isomorphisme.

Si G est lisse et abélien, alors un torseur $\pi : Y \to X$ est localement trivial pour la topologie étale, c'est-à-dire localement de la forme $U \times G \to U$. Les classes d'isomorphisme de G-torseurs sur X sont alors classifiées par le groupe de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(X, G)$ (cf. [Mi, théorème III.3.9 et corollaire III.4.7]).

Si T est un tore algébrique sur E et X une bonne variété sur E, corps de caractéristique nulle, ayant un point rationnel, alors on dispose par [CTS3, (2.0.2) et proposition 2.2.8] d'une suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(E, T) \to H^1_{\text{ét}}(X, T) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)}(X^*(T), \mathrm{Pic}\,\overline{X}) \to 0$$

où $X^*(T)$ désigne le groupe de caractères de $\overline{T}$ c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Hom}(\overline{T}, \mathbf{G}_{m,\overline{E}})$.

Si X est une variété presque de Fano sur F, on note T_{NS} le tore dont le groupe de caractères est le $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-module $\mathrm{Pic}(\overline{V})$. Un *torseur universel sur* X est un T_{NS}-torseur $\mathcal{T}$ au-dessus de X dont l'invariant $\rho(\mathcal{T})$ coïncide avec $\mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}(\overline{V})}$.

Exemple 7.1.2. Si V est une compactification équivariante projective et lisse d'un tore T sur F, soient $\Sigma(1)$ l'ensemble des diviseurs irréductibles équivariant de $\overline{V}$ et $D(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre sur cet ensemble. On a alors une suite exacte

$$0 \to X^*(T) \to D(\overline{V}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to 0$$

et donc par dualité une suite exacte

$$1 \to T_{\mathrm{NS}} \to T_{D(\overline{V})} \to T \to 1$$

où $T_{D(\overline{V})}$ est le tore associé à $D(\overline{V})$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit sur l'ensemble $\Sigma(1)$ et on considère l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\Sigma(1)} = \mathrm{Spec}\Big(\overline{F}[X_D, D \in \Sigma(1)]^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\Big).$$

Pour toute partie I de $\Sigma(1)$ telle que $\bigcap_{D \in I} D = \emptyset$, on note $V_I \subset \mathbf{A}_{\Sigma(1),\overline{F}}$ le sous-espace défini par l'annulation des X_D pour $D \in I$. Soit $U_{\overline{F}}$ le complémentaire de la réunion de ces sous-espaces. Il est invariant sous l'action de Galois et provient d'un ouvert U de $\mathbf{A}_{\Sigma(1)}$. On a les inclusions

$$T_{D(\overline{V})} \subset U \subset \mathbf{A}_{\Sigma(1)}.$$

Pour tout point x de $T(F)$, on a un morphisme de variétés $T_{D(\overline{V})} \to T$ qui envoie l'origine sur x et qui s'étend en un morphisme

$$\pi_x : U \to V.$$

On obtient de cette manière une bijection entre les $T_{D(\overline{V})}(F)$-orbites dans $T(F)$ et les classes d'isomorphismes de torseurs universels sur V (cf. [CTS2], la description de Delzant [Delz] dans le cadre symplectique, Cox [Co], Merkur′ev et Panin [MP] et Salberger [Sa]).

Exemple 7.1.3. Si V est obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_F$, alors en tant que variété un torseur universel sur V peut être décrit comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 F^5$ au-dessus de la Grassmanienne $\mathrm{Gr}(2,5)$. Ce cône est donc donné par les équations de Plücker (cf. Skorobogatov [Sk]).

7.2. Montée aux torseurs universels. Nous allons tout d'abord munir les torseurs universels de deux structures naturelles : tout d'abord une forme de jauge et d'autre part une structure adélique qui pourra être munie d'une mesure canonique.

Notations 7.2.1. Soit V une variété presque de Fano sur F et $\mathcal{T}$ un torseur universel sur V, alors le fibré canonique $\omega_{\mathcal{T}}$ est trivial (cf [Pe3, lemme 3.1.12]) et il découle de [CTS3, proposition 2.1.1] que

$$\Gamma(\mathcal{T}, \mathscr{O}^*_{\mathcal{T}}) = F^*.$$

Par conséquent à une constante multiplicative près, il existe une unique section partout non nulle de $\omega_{\mathcal{T}}$. Nous noterons $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ une telle section.

On peut noter que cette section définit pour toute place v de F une mesure locale $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ sur $\mathcal{T}(F_v)$ donnée localement par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v} = \left|\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_N}, \breve{\omega}_{\mathcal{T}} \right\rangle\right|_v \mathrm{d}x_{\,1,v} \dots \mathrm{d}x_{\,N,v}$$

où $x_1, \dots, x_N$ sont des coordonnées locales analytiques au voisinage d'un point de $\mathcal{T}(F_v)$.

On considère la variété torique affine

$$\mathbf{A}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})} = \mathrm{Spec}\Big(\big(\overline{F}[\mathrm{Pic}(\overline{V}) \cap -C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})]\big)^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\Big)$$

qui est une variété torique affine pour le tore T_{NS} et on considère le produit contracté

$$\widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})} = \mathcal{T} \times^{T_{\mathrm{NS}}} \mathbf{A}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}.$$

C'est un fibré en variétés toriques affines sur V qui contient $\mathcal{T}$ comme ouvert. Soit $\widetilde{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ un modèle de $\widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ sur un anneau de S-entiers $\mathscr{O}_S$.

on considère alors l'espace adélique $\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)$ qui est défini comme l'ensemble des $(P_v)_{v\in M_F} \in \prod_{v\in M_F} \mathcal{T}(F_v)$ tel que P_v appartienne à $\widetilde{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\mathscr{O}_v)$ pour presque toute place finie v de F. Il s'agit donc de l'intersection

$$\prod_{v\in M_F} \mathcal{T}(F_v) \cap \widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F).$$

On peut alors montrer que la mesure

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim \mathcal{T}}} \prod_{v\in M_F} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$$

converge et définit une mesure borélienne sur $\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)$. Par la formule du produit, elle est indépendante du choix de la forme $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$, on l'appelle donc la mesure canonique sur l'espace $\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)$.

Exemple 7.2.2. Dans le cas d'une intersection complète lisse dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, de dimension supérieure ou égale à trois, et de faisceau anticanonique ample, le torseur universel est donné par le cône épointe C au-dessus de V. La variété $\widehat{\mathcal{T}}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}$ peut être vue comme l'éclaté du cône au-dessus de V en l'origine, l'espace adélique coïncide avec l'ensemble des $(P_v)_{v\in M_F}$ de $\prod_{v\in M_F} C(F_v)$ tels que pour presque toute place v de F, P_v aient des coordonnées dans $\mathscr{O}_v$. On peut choisir comme forme $\breve{\omega}_{\mathcal{T}}$ la forme de Leray. On retrouve ainsi les structures utilisées pour la méthode du cercle.

Pour énoncer les résultats, on aura également besoin des fonctions L de Draxl [Dr] :

Notation 7.2.3. Soit E/F une extension finie de F telle que $\mathrm{Pic}(V_E)$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$ et soit S l'ensemble des places de F ramifiées dans E/F. On définit alors pour toute place finie v de F et pour tout $\boldsymbol{s} \in \mathrm{Pic}\,V \otimes \mathbf{C}$

$$L_v(\boldsymbol{s}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \sum_{y\in C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^\vee \cap \mathrm{Pic}(\overline{V})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}} (\#\mathbf{F}_v)^{-\langle y,\boldsymbol{s}\rangle}$$

et

$$L_S(\boldsymbol{s}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \prod_{v\in M_{F,f}-S} L_v(\boldsymbol{s}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})).$$

Enfin on notera $W(T_{\mathrm{NS}})$ la partie de torsion de $T_{\mathrm{NS}}(F)$ et, pour toute partie finie S de M_F,

$$\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}}) = \sum_{v\in M_{F,f}-S} (X^*(T_{\mathrm{NS}})^\vee)^{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}.$$

On dispose alors des résultats suivants (cf. [Pe2] et [Pe3]) : soit V une variété presque de Fano sur F vérifiant les conditions 3.3. On suppose que les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible c'est-à-dire que les points rationnels sont denses dans $\prod_{v\in S}\mathcal{T}(F_v)$ pour toute partie finie S de M_F. Par [CTS2, proposition 2] le nombre de classes d'isomorphismes de torseurs universels au-dessus de V ayant un point rationnel est fini. On note $(\mathcal{T}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille de représentants de ces classes d'isomorphisme. On se donne un système de hauteurs $\boldsymbol{H}$ et on pose $H=\boldsymbol{H}(\omega_V^{-1})$.

• Il existe un ouvert non vide C de $\mathrm{Pic}(V)\otimes\mathbf{C}$ et des fonctions

$$\phi_i^{\boldsymbol{H}}:C\times\mathcal{T}_{i_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}}(\boldsymbol{A}_F)\to\mathbf{C}$$

telles que pour $\boldsymbol{s}\in C$ on ait

$$\zeta_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})L_S(\boldsymbol{s},T_{\mathrm{NS}},C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))=\sum_{i=1}^r\sum_{y\in\mathcal{T}_i(F)}\phi_i^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s},y)$$

$$\chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(\boldsymbol{s}-\omega_V^{-1})\beta(V)\tau_H(V)L_S(\omega_V^{-1},T_{\mathrm{NS}},C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))=\sum_{i=1}^r\int_{\mathcal{T}_{i_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}}(\boldsymbol{A}_F)}\phi_i^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s},y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y).$$

• Il existe une partie finie S de $M_{F,f}$ et une fonction $\mu:\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})\to\mathbf{Z}$ et des fonctions $\psi_i^H:\mathbf{R}\times\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})\times\mathcal{T}_{i_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}}(\boldsymbol{A}_F)\to\mathbf{R}$ telles que

$$N_{U,H}(B)=\frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\sum_{i=1}^r\sum_{b\in\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})}\mu(b)\sum_{y\in\mathcal{T}_i(F)}\psi_i^H(B,b,y),$$

$$\theta_H(V)\int_0^{\log B}u^{t-1}e^u\mathrm{d}u=\frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})}\times\sum_{i=1}^r\sum_{b\in\mathscr{I}_S(T_{\mathrm{NS}})}\mu(b)\int_{\mathcal{T}_{i_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}}(\boldsymbol{A}_F)}\psi_i^H(B,b,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y).$$

Remarques 7.2.4. (i) En conclusion on est ramené, au niveau des torseurs universels, à des majorations de termes de la forme

$$\sum_{y\in\mathcal{T}_i(F)}\phi(y)-\int_{\mathcal{T}_{i_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}}(\boldsymbol{A}_F)}\phi(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y).$$

L'équivalence entre ces deux termes peut être vu comme un analogue de la notion de variété strictement d'Hardy-Littlewood introduite par Borovoi et Rudnick dans [BR].

(ii) Dans le cas d'une intersection complète dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ on retrouve la méthode permettant de passer du dénombrement des points dans V à celui de points dans le cône épointé au-dessus de V et donc de déduire la formule (F) de la méthode du cercle lorsque celle-ci s'applique.

(iii) Les torseurs universels ont également été utilisés par Salberger dans sa démonstration de (F) pour les variétés toriques déployées sur $\mathbf{Q}$ [Sa], qui fut ensuite reprise avec un terme d'erreur affiné par la Bretèche [Bre1]. Ils les ont également utilisés dans le cas de la surface de Del Pezzo déployée de degré 5 [Bre2], première surface de Del Pezzo traitée qui ne soit pas torique.

(iv) Sans rentrer dans les détails de la démonstration, l'obtention de la première formule intégrale ci-dessus repose sur des égalités de la forme

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{T}_{C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_F)} \phi^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s}, y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}(y)\\ &= \chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(\boldsymbol{s} - \omega_V^{-1}) L_S(\omega_V^{-1}, T_{\mathrm{NS}}, C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))\tau(T_{\mathrm{NS}})\boldsymbol{\omega}_H\Big(\pi\Big(\prod_{v\in M_F} \mathcal{T}(F_v)\Big)\Big),\end{aligned}$$

où $\pi : \mathcal{T} \to V$ est un torseur universel et $\tau(T_{\mathrm{NS}})$ désigne le nombre de Tamagawa du tore T_{NS}. On applique alors le théorème fondamental d'Ono [Ono] qui donne l'égalité

$$\tau(T_{\mathrm{NS}}) = \frac{\#H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V}))}{\#\text{Ш}^1(F, T_{\mathrm{NS}})}.$$

L'hypothèse faite sur les torseurs universels assure alors que tout point x de l'adhérence de $V(F)$ dans $V(\boldsymbol{A}_F)$ appartient exactement à l'image de $\#\text{Ш}^1(F, T_{\mathrm{NS}})$ torseurs universels parmi les $\mathcal{T}_i$. Salberger a été le premier à utiliser de tels arguments dans [Sa].

8. Le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel

Notations 8.1. On se donne un entier $n > 0$ et quatre formes linéaires linéairement indépendantes l_0, l_1, l_2 et $l_3 \in \mathbf{Q}[X_0, \ldots, X_n]$. Soit V l'hypersurface de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(x)y_i^3 = 0.$$

Théorème 8.2 (Batyrev et Tschinkel [BT2])**.** *La variété de Fano V est un contre-exemple à la conjecture 3.6.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante : par le théorème de Lefschetz, on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V).$$

La formule attendue pour un ouvert dense assez petit U et une hauteur H relative au faisceau anticanonique après extension éventuelle des scalaires est donc de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB \log B.$$

Mais le faisceau canonique de V est donné par $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(n,1)$. Autrement dit, on peut prendre comme hauteur relative au faisceau anticanonique

$$H((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)) = H_n((x_0 : \ldots : x_n))^n \\ \times H_3((y_0 : y_1 : y_2 : y_3)).$$

D'un autre côté, si $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ vérifie

$$\prod_{i=0}^{3} l_i(x_0, \ldots, x_n) \neq 0,$$

alors la fibre V_x au-dessus de x est une surface cubique lisse et la restriction de H à une telle fibre est une hauteur relative à $\mathscr{O}_{V_x}(1) = \omega_{V_x}^{-1}$. Supposons maintenant que F contienne les racines cubiques de l'unité. Alors pour tout x de $\mathbf{P}^n(F)$ tel que les $l_i(x_0, \ldots, x_n)$ soient des cubes dans F, V_x est une surface cubique déployée contenant 27 droites rationnelles qui peut être obtenue en éclatant $\mathbf{P}^2$ en 6 points rationnels. Si X est l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en trois de ces points, on dispose d'un morphisme

$$V_x \xrightarrow{\pi} X.$$

En étendant une base de $\Gamma(V_x, \omega_{V_x}^{-1})$ en une base de $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$, on obtient une hauteur H_x sur X relative à ω_X^{-1} telle que

$$\forall y \in U_x(F), \quad H_{V_x}(y) \leqslant H_X(\pi(y)),$$

où U_x désigne le complémentaire des 27 droites dans V_x. La conjecture étant connue pour X, il existe $C > 0$ tel que pour tout ouvert dense U de V_x, on ait

$$N_{U,H}(B) \geqslant N_{\pi(U),H_x}(B) \geqslant CB(\log B)^3.$$

L'ensemble des points $(x_0 : \ldots : x_n)$ tels que les $l_i(x_i : \ldots : x_n)$ soient des cubes est Zariski dense dans $\mathbf{P}^n$. Donc pour tout ouvert U de V, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant CB(\log B)^3,$$

en contradiction avec la formule attendue. □

Plusieurs directions sont disponibles pour modifier la conjecture de Manin et prendre en compte ce contre-exemple :

Tout d'abord, les fibres de pr_1 dont le rang du groupe de Picard est maximal sont vraisemblablement faiblement accumulatrices. Une première solution consiste donc à faire l'hypothèse arithmétique peu pratique que le complémentaire des variétés faiblement accumulatrices est un ouvert de Zariski dense. C'est l'hypothèse que nous avons faite pour la formule (F).

Une deuxième direction, plus élégante, est de procéder par récurrence sur la dimension de la variété en utilisant des fibrations successives, la conjecture obtenue s'appliquant à chaque fibre. Une telle démarche est explorée par Batyrev et Tschinkel dans [BT5].

Enfin, on peut également noter que la réunion W des fibres ayant un groupe de Picard de rang plus grand que deux constitue un ensemble mince en un sens analogue de la définition 1.3 : il existe un morphisme de variétés algébriques sur F, $\pi : X \to V$ tel que W soit contenu dans $\pi(X(F))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle sur F. Dans ce cas le comportement asymptotique devrait pouvoir s'interpréter en termes de $\pi^*(H)$. D'autre part, W ne contient pas tous les points rationnels et il serait naturel de s'interroger sur le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire.

Nous manquons à l'heure actuelle d'exemples pour dire laquelle de ces approches devrait se révéler la plus fructueuse.

9. Extensions

Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes placés dans le cas où $\boldsymbol{o}(H) = \omega_V^{-1}$. Dans leur article [BT5], Batyrev et Tschinkel proposent une interprétation de la constante pour des fibrés distincts du fibré anticanonique. Une des difficultés pour faire cela apparaît clairement dans le cas du plan projectif éclaté en trois points : pour $L = \omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{1,3}$, il apparaît une fibration dont les fibres sont faiblement accumulatrices, tandis que si $L = \omega_V^{-1} + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1}$, l'étude des points de hauteur bornée se ramène à celle d'une variété obtenue par contraction et la constante est à nouveau issue d'une mesure de Tamagawa. Cela amène aux constructions suivantes.

Notations 9.1. Soit V une bonne variété vérifiant les conditions 3.3. Un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif D sur X est dit rigide si et seulement s'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \dim_F(\Gamma(V, nn_0D)) = 1.$$

Supposons que l'on ait $L = \omega_V^{-1} + D$ avec D rigide. Soit $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_F})$ une hauteur d'Arakelov, on peut alors écrire H comme un produit tensoriel $H = H_1 \otimes H_2$ avec $H_1 = (\omega_V^{-1}, (\|\cdot\|_v^1)_{v \in M_F})$ et $H_2 = (D, (\|\cdot\|_v^2)_{v \in M_F})$. Soit m tel que $\dim_F \Gamma(V, mD) = 1$ et soit s une section non nulle de mD. Pour toute place v de F, on peut définir une fonction continue $f_v : V(F_v) \to \mathbf{R}$ de la façon suivante : $\|\cdot\|_v^2$ induit une métrique $\|\cdot\|_v^{2\otimes m}$ sur mD et on pose

$$f_v(x) = \left(\|\mathsf{s}(x)\|_v^{2\otimes m}\right)^{1/m}.$$

On considère ensuite les mesures

$$\boldsymbol{\omega}_{H,v} = f_v \boldsymbol{\omega}_{H_1,v}.$$

Il faut alors utiliser les facteurs de convergence suivants : on considère le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i)$ et on utilise les termes locaux de la fonction L associée. Pour toute place finie v en dehors d'un ensemble fini S

$$L_v\Big(s, \mathrm{Pic}\Big(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i\Big)\Big) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - \#\mathbf{F}_v^{-s} \mid \mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i) \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction L globale associée

$$L_S\Big(s, \mathrm{Pic}\Big(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i\Big)\Big) = \prod_{v \in M_{F,f} - S} L_v\Big(s, \mathrm{Pic}\Big(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i\Big)\Big).$$

On pose alors

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i)) \text{ si } v \in M_{F,f} - S, \\ 1 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et on définit

$$\boldsymbol{\omega}_H = \lim_{s \to 1} (s-1)^{\mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V - \bigcup_{i=1}^r D_i)} L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V} - \bigcup_{i=1}^r D_i)) \times \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}} \prod_{v \in M_F} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{H,v}.$$

Cette mesure ne dépend que de la hauteur H. Le nombre

$$\tau_H(V) = \boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(F)})$$

donne alors, à un facteur rationnel près, la constante espérée dans le comportement asymptotique.

Dans le cas général, il faut introduire des fibrations en variétés faiblement accumulatrices de sorte que la restriction de H à chacune des fibres soit du type ci-dessus après résolution éventuelle des singularités et la constante s'obtient en sommant sur ces fibres. Dans [BT5], Batyrev et Tschinkel montrent des formules asymptotiques avec ces constantes pour les variétés de drapeaux généralisés et les variétés toriques.

Terminons sur un cas qui résiste encore et qui permettrait de tester la validité des différentes approches. Il a été suggéré par Colliot-Thélène et est considéré dans [BT5] : il s'agit de l'hypersurface de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ d'équation :

$$X_0 Y_0^2 + X_1 Y_1^2 + X_2 Y_2^2 + X_3 Y_3^2 = 0$$

qui est une fibration en quadriques sur $\mathbf{P}^3(F)$. L'auteur de ce texte a tendance à penser que le comportement asymptotique pour une hauteur relative au fibré anticanonique devrait être de la forme :

$$\begin{array}{rcl} N_{U,H}(B) & \sim & CB\log B \\ B & \to & +\infty \end{array}$$

avec

$$C = \theta_H(V) + \sum_{\substack{x\in\mathbf{P}^3(F)\\ \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V_x)=2}} \theta_{H_{|V_x}}(V_x),$$

la constante $\theta_{H_{|V_x}}(V_x)$ étant nulle si la fibre n'a pas de points rationnels. Il faudrait donc additionner un terme global à la contribution de chaque fibre.

Je remercie le rapporteur pour ses nombreuses remarques pertinentes.

Bibliographie

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface.* Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Art] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **3** (1924), 89–108.

[Ba] V. V. Batyrev, *The cone of effective divisors of threefolds.* Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 337–352.

[BM] V. V. Batyrev, Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques.* Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori.* Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), 41–46.

[BT3] ———, *Height zeta functions of toric varieties.* J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT4] ———, *Manin's conjecture for toric varieties.* J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[BT5] ———, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties.* Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables.* Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[BR] M. Borovoi, Z. Rudnick, *Hardy-Littlewood varieties and semi-simple groups.* Invent. math. **119** (1995), 37–66.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms.* J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.

[Bo] D. Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel.* J. Number Theory **94** (2002), 343–358.

[Bre1] R. de la Bretèche. *Compter des points d'une variété torique*, J. Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bre2] ———, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5.* Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[BV] M. BRION, M. VERGNE, *Arrangement of hyperplanes. I : rational functions and Jeffrey-Kirwan residue.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), 715–741.

[Bro] N. BROBERG, *Rational points on cubic surfaces.* Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 13–35.

[CLT1] A. CHAMBERT-LOIR, Y. TSCHINKEL, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I.* Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ———, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II.* J. Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CLT3] ———, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups.* Invent. Math. **148** (2002), n° 2, 421–452.

[CTS1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif ; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles.* Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS3] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II.* Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[Co] D. COX, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* J. Algebraic Geom. **4** (1995), 17–50.

[Del] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil I.*. Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1973), 273–307.

[Delz] T. DELZANT, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment.* Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 315–339.

[Dr] P. K. J. DRAXL, *L-Funktionen algebraischer Tori.* J. Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. FRANKE, Y. I. MANIN, Y. TSCHINKEL, *Rational points of bounded height on Fano varieties.* Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[HW] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers, 3rd ed.*. Oxford, Clarendon Press, 1954.

[HB1] D. R. HEATH-BROWN, *The density of zeros of forms for which weak approximation fails.* Math. Comp. **59** (1992), 613–623.

[HB2] ———, *Counting rational points on cubic surfaces.* Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 13–30.

[Lan] R. P. LANGLANDS, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series.* Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Ma] Y. I. MANIN, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds.* Compositio Math **85** (1993), 37–55.

[MP] A. S. MERKURJEV, I. A. PANIN, *K-theory of algebraic tori and toric varieties.* K-Theory **12** (1997), n° 2, 101–143.

[Mi] J. S. MILNE, *Étale cohomology.* Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Né] A. NÉRON, *L'arithmétique sur les variétés algébriques [d'après A. Weil].* Séminaire Bourbaki 4-ème année, 1951/52, n° 66.

[Ono] T. ONO, *On the Tamagawa number of algebraic tori.* Ann. of Math. (2) **78** (1963), n° 1, 47–73.

[Pe1] E. PEYRE, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano.* Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels.* Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ———, *Torseurs universels et méthode du cercle.* Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 221–274.

[Pe4] ———, *Points de hauteur bornée sur les variétés de drapeaux en caractéristique finie.* Prépublication (2001).

[PT1] E. Peyre, Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces, numerical evidence.* Math. Comp. **70** (2000), n° 233, 367–387.

[PT2] ———, *Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces of higher rank.* Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 275–305.

[Sa] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties.* Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields.* Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Sch] W. Schmidt, *Asymptotic formulae for points lattices of bounded determinant and subspaces of bounded height.* Duke Math. J. **35** (1968), 327–339.

[Se1] J.-P. Serre, *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d'après P. Deligne).* Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n° 446.

[Se2] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem.* Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n° 3, 429–440.

[SSD] J. B. Slater, H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting points on cubic surfaces, I.* Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 1–12.

[ST1] M. Strauch, Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products.* Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[ST2] ———, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties.* Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces.* Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[Va] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method.* Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

[We1] A. Weil, *Arithmetic on algebraic varieties.* Ann. of Math. (2) **53** (1951), 412–444.

[We2] ———, *Adèles and algebraic groups.* Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

Emmanuel Peyre
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
UMR 5582
Université de Grenoble I et CNRS
BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX
France
E-mail : `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`
URL : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`