Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 383–391

The correction factor in Artin's primitive root conjecture

par Peter STEVENHAGEN

Résumé. En 1927, E. Artin proposait une densité conjecturale pour l'ensemble des nombres premiers p pour lesquels un entier donné g est une racine primitive modulo p. Des calculs effectués en 1957 par D. H. et E. Lehmer ont mis en évidence des écarts inattendus par rapport à cette densité conjecturale, incitant Artin à y introduire un facteur correctif. La conjecture ainsi modifiée a été prouvée par C. Hooley en 1967 conditionnellement à l'hypothèse de Riemann généralisée.

Cet article a pour sujet deux développements récents relatifs à ce facteur correctif. Le premier est de nature historique, et se rapporte à des lettres, récemment découvertes à Berkeley dans les archives des Lehmer, entre Artin et les Lehmer durant les années 1957-58. Le second concerne une nouvelle interprétation du facteur correctif, due à H. W. Lenstra, P. Moree et l'auteur, qui peut s'appliquer à de nombreuses généralisations au problème originel d'Artin.

Abstract. In 1927, E. Artin proposed a conjectural density for the set of primes p for which a given integer g is a primitive root modulo p. After computer calculations in 1957 by D. H. and E. Lehmer showed unexpected deviations, Artin introduced a correction factor to explain these discrepancies. The modified conjecture was proved by Hooley in 1967 under assumption of the generalized Riemann hypothesis.

This paper discusses two recent developments with respect to the correction factor. The first is of historical nature, and is based on letters between Artin and the Lehmers from 1957–58 that were discovered in the Lehmer archives in Berkeley in December 2000. The second concerns a new interpretation of the correction factor in terms of local contributions by H. W. Lenstra, P. Moree and the author that is well-suited to deal with many generalizations of Artin's original primitive root problem.

Peter Stevenhagen
Mathematisch Instituut

Manuscrit reçu le 25 décembre 2001.

Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
The Netherlands
E-mail : psh@math.leidenuniv.nl