Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 697–725

Combinatorial properties of infinite words associated with cut-and-project sequences

par Louis-Sébastien GUIMOND, Zuzana MASÁKOVÁ et Edita PELANTOVÁ

Résumé. Le but de cet article est d'étudier certaines propriétés combinatoires des suites binaires et ternaires obtenues par "coupe et projection". Nous considérons ici le processus de coupe et projection en dimension deux où les sous-espaces de projection sont en position générale. Nous prouvons que les distances entre deux termes adjacents dans une suite ainsi obtenue prennent toujours soit deux soit trois valeurs. Une suite obtenue par coupe et projection détermine ainsi de manière naturelle une suite symbolique (mot infini) sur deux ou trois lettres. En fait ces suites peuvent aussi être obtenues comme codages d'échanges de deux ou trois intervalles. Du point de vue de la complexité, la construction par coupe et projection donne des mots de complexité $n + 1$, $n +$ *constante* et $2n + 1$. Les mots binaires ont une complexité égale à $n + 1$ et sont donc sturmiens. Les mots ternaires ont une complexité égale à $n +$ *constante* ou $2n + 1$. Une coupe et projection a trois paramètres dont deux spécifient les sous-espaces de projection, le troisième déterminant la bande de coupe. Nous classifions les triplets qui correspondent à des mots infinis combinatoirement équivalents.

Abstract. The aim of this article is to study certain combinatorial properties of infinite binary and ternary words associated to cut-and-project sequences. We consider here the cut-and-project scheme in two dimensions with general orientation of the projecting subspaces. We prove that a cut-and-project sequence arising in such a setting has always either two or three types of distances between adjacent points. A cut-and-project sequence thus determines in a natural way a symbolic sequence (infinite word) in two or three letters. In fact, these sequences can be constructed also by a coding of a 2- or 3-interval exchange transformation. According to the complexity the cut-and-project construction includes words with complexity $n + 1$, $n + const.$ and $2n + 1$. The words on two letter alphabet have complexity $n+1$ and thus are Sturmian. The

Manuscrit reçu le 22 octobre 2001.

ternary words associated to the cut-and-project sequences have complexity $n + const.$ or $2n + 1$. A cut-and-project scheme has three parameters, two of them specifying the projection subspaces, the third one determining the cutting strip. We classify the triples that correspond to combinatorially equivalent infinite words.

Louis-Sébastien GUIMOND
Department of Mathematics and Statistics
McGill University, Burnside Hall
805 Sherbrooke Street West
Montréal (Québec) H3A 2K6, Canada
E-mail : guimond@math.mcgill.ca

Zuzana MASÁKOVÁ
Department of Mathematics
Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University, Trojanova 13
120 00 Praha 2, Czech Republic
E-mail : masakova@km1.fjfi.cvut.cz

Edita PELANTOVÁ
Department of Mathematics
Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University, Trojanova 13
120 00 Praha 2, Czech Republic
E-mail : pelantova@km1.fjfi.cvut.cz