МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
46 (1994), 11–15

UDC 517.955
оригинални научни рад
wissenschaftliche Forschungsarbeit

METHODE VON EULER-SCHEN TYPUS ZUM NÄHERUNGSWEISEN AUFLOSEN EINER AREOLAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Miloš Čanak

Abstract. Es sei eine areoläre Differentialgleichung

$$Dw = F(z, \bar{z}, w) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha_{a/z} w = w_0(z) \tag{2}$$

gegeben, wobei $w_0(z)$ eine gegebene analytische Funktion ist, und

$$Dw = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2w'_{\bar{z}}$$

den bekannten Differentialoperator von Kolossov darstellt.

In dieser Arbeit löst man die Gleichung (1) mit der Anfangsbedingung (2) durch eine Näherungsmethode vom Euler-schen Typus.

Definition 1. Es sei $\{\, W \mid w = w(z, \bar{z}) \,\}$ die Menge der komplexen Funktionen, die differenzierbar nach $\bar{z}$ in einem Gebiet G sind, und es sei $\{\, \Omega \mid \Omega = \Omega(z) \,\}$ die Menge der analytischen Funktionen in G. Führen wir eine Abbildung $\alpha_{g(z)}$ ($g(z)$ ist eine beliebige analytische Funktiom) der Menge W auf die Menge Ω auf folgende Art und Weise ein: Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ ist eine solche Funktion, die aus der Funktion $w = w(z, \bar{z})$ entstehen kann, wenn wir den Wert $\bar{z}$ mit $g(z)$ vertauschen und den Wert z unveräderlich lassen. Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ enthält keine Veränderliche $\bar{z}$, und darum ist sie analytisch. Leicht kann man sehen, dass $\alpha_{g(z)}$ die menge W auf die Menge Ω abbildet und dass jedem Original w ein und nur ein Bild Ω entspricht. Der geometrische Sinn dieses Operators ist folgender: Wenn $\bar{z} = g(z)$ die Gleichung einer glatten, einfachen, geschlossen oder nichtgeschlossen Kontur ist, so besitzen die Funktionen $w(z, \bar{z})$ und $\alpha_{g(z)} w$ den gleichen Randwert auf dieser Kontur.

Es sei $W(z, \bar{z})$ eine gegebene komplexe Funktion die beliebig oft im Kreisring P: $\sqrt{a} - \delta/2 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{a} + \delta/2$ nach $\bar{z}$ differenzierbar ist. Nehmen wir an, dass die positive Zahl $b = \sup b_k$, $k = n+1, n+2, \dots$, existiert, wobei b_k Majoranten von $|\alpha_{a/z} D^k W|$ sind. In der Arbeit [1] hat der Verfasser gezeigt, dass sich die Funktion $W(z, \bar{z})$ in P durch ein areoläres Polynom n-ter Ordnung der Form

$$W(z, \bar{z}) \approx f_0(z) + (\bar{z} - a/z) f_1(z) + \cdots + (\bar{z} - a/z)^n f_n(z),$$

approximieren lässt. Die Koeffizienten $f_k(z)$ lassen sich durch die Formel

$$f_k(z) = \frac{\alpha_{a/z} D^k W}{2^k k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

ausrechnen, wobei

$$DW = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2W'_{\bar z}, \quad W = u + iv, \quad (D^k W = D[D^{k-1} W])$$

der bekannte Operator von Kolossov ist. Für die Abschätzung des Approximationsfehlers können wir die Ungleichkeit

$$|R| \leqslant b \frac{(\delta/2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta/2}$$

nützen und $|R| \to 0$ wenn $n \to \infty$. Im speziellen Fall $n = 1$ haben wir die Approximation

$$W(z, \bar z) \approx \alpha_{a/z} W + \frac{\bar z - a/z}{2} \alpha_{a/z} DW \tag{3}$$

mit dem Approximationsfehler $|R| \leqslant (b\delta^2 e^{\delta/2})/8$.

Es sei eine areoläre Differentialgleichung

$$DW = F(a, \bar z, W) \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha_{a/z} W = w_0(z) \tag{5}$$

gegeben, wobei $w_0(z)$ eine gegebene analytische Funktion ist. Nehmen wir an, dass die Funktion $F(z, \bar z, W)$ im Gebiet

$$\Pi : \begin{cases} \sqrt{a} - \delta/2 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{a} + \delta/2 \\ |W - w_0| \leqslant d \end{cases}$$

stetig ist und dass sie der Bedingung $|F(z, \bar z, W) - F(z, \bar z, W_1)| \leqslant L|W_2 - W_1|$ genügt. In seiner Arbeit [2] hat der Verfasser die Existenz einer solchen reellen Zahl $\delta > 0$ gezeigt, dass im Kreisring P: $\sqrt{a} - \delta/2 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{a} + \delta/2$ eine einzige Lösung der Gleichung (4) mit der Anfangsbedingung (5) existiert.

Es sei ein endliches Intervall $[a, A]$, $(a,\ A \in \mathbf{R})$ gegeben. Teilen wir dieses Intervall auf n gleicher Abschnitten $a = x_0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $\dots$, $A = x_n = x_0 + nh$, $(h = (A - a)/n)$ und konstruiren wir ein System von Kreisen: K_i: $\bar z = x_i/z$, $(i = 0, 1, \dots, n)$. Eine nichtanalytische, komplexe Funktion kann einerseits in der expliziten Form $W = W(z, \bar z)$ erscheinen. Andererseits lässt sie sich auch in der Form einer Tabelle, wenn ihre Grenzenwerte auf den gegebenen Kreisen $W(z, \bar z)|_{K_i}$ bekannt sind, darstellen. Durch Ausnützung des Operators α ist manchmal möglich, eine Folge der analytischen Funktionen $w_0(z), w_1(z), \dots, w_n(z)$ zu konstruiren, dere Grenzenwerte auf K_i mit den entsprechenden Grenzenwerten von $W(z, \bar z)$ identisch sind. Darstellung einer nichtanalytischen Funktion $W(z, \bar z)$ in folgender tabellaren Form

K_i	$K_0 : \bar z = x_0/z$	$K_1 : \bar z = x_1/z$	$\dots$	$K_n : \bar z = x_n/z$
$w_i(z)$	$w_0(z)$	$w_1(z)$	$\dots$	$w_n(z)$

(6)

nennen wir α-*Repräsetation* dieser Funktion auf dem System der Kreissen K_i. Wenn $\alpha_{x_i/z}W(z,\bar{z}) = w_i(z)$, $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, so ist die Repräsentation (6) eindeutig und jedem Wert $\bar{z} = x_i/z$ entspricht eine und nur eine analytische Funktion $w_i(z)$. In siner Arbeit [3] hat der Verfasser das sgn. α-Interpolationspolynom konstruirt, das die nichtanalytische Funktion $W(z,\bar{z})$ approximiert und der Tabelle (6) entspricht.

Suchen wir die näherungsweise Lösung der Aufgabe (4)–(5) in der Form (6). Dabei suchen wir solche Folge der analytischen Funktionen $w_i(z)$, $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$ dere Grenzenwerte auf den Kreisen $\bar{z} = x_i/z$, $(x_{i+1} - x_i = h = (A-a)/N)$ mit den Grenzenwerten der exakten Lösung näherungsweise gleich sind.

Die Formel (3) auf Grund (4) geht in

$$W(z,\bar{z}) \approx \alpha_{a/z}W + \frac{\bar{z} - a/z}{2}\alpha_{a/z}F(z,\bar{z},W) \tag{7}$$

über.

Den ersten näherungsweisen Wert w_1 erhalten wir durch Anwendung des Operators $\alpha_{x_1/z}$ auf (7), d.h.

$$\alpha_{x_1/z}W = w_1 = \alpha_{a/z}W + \frac{x_1 - a}{2z}\alpha_{a/z}F(z,\bar{z},W)$$

oder $w_1 = w_0 + \dfrac{h}{2z}F(z, x_0/z, w_0)$.

Auf dem Kreis $\bar{z} = x_1/z$ geht die Formel (7) in

$$W(z,\bar{z}) \approx \alpha_{x_1/z}W + \frac{\bar{z} - x_1/z}{2}\alpha_{x_1/z}F(z,\bar{z},W) \tag{8}$$

über.

Den zweiten näherungsweisen Wert w_2 erhalten wir durch Anwendung des Operators $\alpha_{x_2/z}$ auf (8), d.h.

$$\alpha_{x_2/z}W = w_2 = w_1 + \frac{h}{2z}F(z, x_1/z, w_1).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir auf eine gleiche Art und Weise die allgemeine rekurrente Formel

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2z}F(z, x_n/z, w_n) \tag{9}$$

die uns die näherungsweise Lösung der Aufgabe (4)–(5) in der tabellaren Form (6) gibt.

Beispiel. Es sei die areolare Differentialgleichung

$$DW = W \tag{10}$$

mit dem Anfangsbedingung

$$\alpha_0 W = 1 \tag{11}$$

gegeben. Teilen wir das Intervall $[0,1]$ auf N gleicher Abschnitten $h=1/N$, $x_n = nh$, $(n = 0,\ 1,\ \dots,\ N)$ und konstruiren wir ein System von Kreisen K_n: $\bar{z} = x_n/z$, $(n = 0,\ 1,\ \dots,\ N)$. Man soll die α-Repräsentation der näherungsweisen Lösung von der Aufgabe (10)-(11) in der tabellaren Form (6) finden und den Fehler auf dem n-ten Kreis abschätzen. Hier ist $F(z, x_n/z, w_n) = w_n$ und

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2z} w_n = w_n(1 + h/2z). \tag{12}$$

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (12) hat die Form $w_n = (1 + h/2z)^n \varphi(z)$, wobei $\varphi(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist. Durch Ausnützung der Anfangsbedingung (11), $(n = 0)$ erhalten wir $w_0 = \varphi(z) = 1$ und

$$w_n = (1 + h/2z)^n = (1 + h/2z)^{x_n/h}.$$

Anderseits hat die exakte Lösung der Aufgabe (10)–(11) die Form $W(z,\bar{z}) = e^{\bar{z}/2}$ und $\alpha_{x_n/z}W = e^{x_n/2z}$. Nach einer kürzen Rechnung erhält man

$$w_n = e^{x_n/2z}(1 - x_n h/8z^2) + O(h^2)$$

und

$$e(x_n) = |\alpha_{x_n/z}W - w_n| = |e^{x_n/2z} x_n h/8z^2 + O(h^2)|.$$

Dabei sehen wir dass $e(x_n) \to 0$ wenn $h \to 0$.

Bemerkung 1. Näherungsweise Methode vom Euler-schen Typus (9) für die Aufgabe (4)–(5) lässt sich verallgemeinern. Anstatt (9) können wir die allgemeine lineare Methode der Form

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i W_{n+i} = \frac{h}{2z} \sum_{i=0}^{k} \beta_i F_{n+i} \tag{13}$$

betrachten. Wegen $F_{n+i} = F(z, x_{n+i}/z, w_{n+i})$ stellt die Relation (13) im allgemeinen Fall eine nichtlineare Differenzengleichung dar.

Definition 2. Es lässt sich die sgn. α-*Abweichung* der methode (13) auf dem n-ten Kreis K_n: $\bar{z} = x_n/z$ als $e(x_n) = |\alpha_{x_n/z}W - w_n|$ definieren, wobei die Folge der analytischen Funktionen $\{\alpha_{x_n/z}W\}$, $n = 0,\ 1,\ \dots,\ N$, die α-Repräsentation der exakten Lösung ist und die Folge $\{w_n\}$, $n = 0, 1, \dots, N$, die α-Repräsentation der näherungsweisen Lösung von der Aufgabe (4)–(5) darstellt.

Definition 3. Die α-Repräsentation $\{w_n\}$ der näherungsweisen Lösung konvergiert nach der α-Repräsentation $\{\alpha_{x_n/z}W\}$ der exakten Lösung von der Aufgabe (4)–(5) im Falle wenn

$$\lim_{h\to 0} e(x_n) = \lim_{h\to 0} |\alpha_{x_n/z}W - w_n| = 0.$$

Diese Konvergenz nennen wir α-*Konvergenz*, wenn es sich um die α-Repräsentation der nichtanalytischen Funktionen handelt.

BEMERKUNG 2. Im speziellen Fall reduziert sich die lineare näherungsweise Methode (13) auf die Methode vom Euler-schen Typus. Die Frage der α-Konvergenz von der Euler-schen Methode (9) lässt sich ähnlich wie bei der Euler-schen Methode zum näherungsweisen Auflösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ untersuchen (siehe [4], s.24-32).

LITERATUR

[**1**] M. Čanak, *Über die α-Approximation einer nichtanalytischen Funktion durch ein areoläres Polynom*, Z. angew. Math. Mech. **69**, 1989, 4, s.71-73

[**2**] M. Čanak, *Über Existenz und Einzigheit der Lösung einer areolären Differentialgleichung erster Ordnung*, Mathematica Balkanica, **8**:5, 1978, s.43–48

[**3**] M. Čanak, *Über die α-Interpolation einer nichtanalytischen komplexen Funktion*, Z. angew. Math. Mech. **67**, 1987, 5, s.463–464

[**4**] G. Milovanović, *Numerische Analysis*, III Teil, Beograd 1989, s.24–32

(received 27.07.1993.)

Brzakova 4, 11000 Beograd, Jugoslawien