Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 59, 3 (2001)

F. Gherardelli

UNA DEFINIZIONE GEOMETRICA DI SOMMA FRA SERIE LINEARI DI ORDINE DUE SU UNA CURVA DI GENERE DUE

1.

ll risultato principale di questa Nota è ben noto. Ne propongo qui una trattazione geometrica. I metodi che uso sono classici, simili in vari rispetti a quelli di Castelnuovo in [1].

Come modello della curva di genere due consideriamo una quartica piana C^4 con un punto doppio O (nodo o cuspide). Le rette per O tagliano su C^4 la g^1_2 canonica. Non esistono su C^4 altre serie infinite di ordine due, per cui invece che di somma fra tali serie si può parlare, senza possibilità di confusione, di somma fra coppie di punti. Siano $P = (P_1; P_2)$, $Q = (Q_1; Q_2)$, $R = (R_1; R_2)$ coppie di punti su C^4 e sia $P^0 = (P^0_1; P^0_2)$ una ulteriore coppia che, per semplicità, supponiamo generica.

La costruzione che segue ricalca quella, ben nota, che si fa per definire la somma fra punti di una cubica piana non singolare (cfr. ad es. [2]).

Se fra i punti $O,\ P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$ non vi sono particolari allineamenti, è unica la conica D per $O,\ P,\ Q$. Essa incontra C^4 ulteriormente in una coppia di punti $S' = (S'_1, S'_2)$. La conica per $O,\ S',\ P^0$ incontra C ulteriormente in una coppia di punti $S = (S_1, S_2)$ che definiamo somma di P e Q: $S = P + Q$.

Tale costruzione va modificata se tre almeno fra i punti $O,\ P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$ sono allineati. Scegliamo, come caso significativo, quello in cui P e Q stanno su una stessa retta. La conica D non è determinata: è costituita dalla retta per P e Q e da una qualunque retta per O.Tali rette incontrano C^4, fuori di O, in coppie di punti della g^1_2 che, per ipotesi, vanno identificate. La somma $P + Q$ è ora data dalla coppia ulteriore intersezione con C^4 della retta per sia $P^0 = (P^0_1; P^0_2)$. P^0 è l'elemento neutro della somma ora definita.

Sia C^2 la conica per O e tangente a C^4 in P^0_1 e P^0_2; essa incontra ulteriormente C^4 in una coppia di punti $P' = (P'_1; P'_2)$. La conica per $O,\ P,\ P'$ incontra ulteriormente la C^4 in una coppia di punti $P^{-1} = (P^{-1}_1; P^{-1}_2)$, tale che $P + P^{-1} = P^0$: P^{-1} è l'opposto di P.

La somma definita è ovviamente commutativa. Proviamo che è anche associativa. Sviluppo la dimostrazione nel caso generale in cui fra i punti $O,\ P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2,\ R_1,\ R_2$ non vi siano particolari allineamenti: sono ovvie le modifiche necessarie nei casi esclusi.

Indichiamo con r_1 la conica per $O,\ P,\ Q$ e sia S' la coppia ulteriore intersezione di

r_1 con C^4; sia poi s_1 la conica per $O,\ P^0,\ S'$ e sia $S = P + Q$ l'ulteriore intersezione di s_1 con C^4; sia r_2 la conica per $O,\ S,\ R$ e sia T' la coppia ulteriore intersezione con C^4; sia s_2 la conica per $O,\ Q,\ R$ e ne sia U' l'ulteriore intersezione con C^4.
Sia r_3 la conica per $O,\ P^0,\ U'$ e sia $U = q + R$ l'ulteriore intersezione con di r_3 con C^4. Finalmente indichiamo con s_3 la conica per $o,\ P,\ U$ e sia T'' l'ulteriore intersezione di s_3 con C^4.
Complessivamente si ha:

$$(r_1 + r_2 + r_3) \cap C^4 = 6O \cup P \cup Q \cup S' \cup S \cup R \cup T' \cup P^0 \cup U' \cup U$$

$$(s_1 + s_2 + s_3) \cap C^4 = 6O \cup P \cup Q \cup S' \cup S \cup R \cup T'' \cup P^0 \cup U' \cup U$$

$(r_1 + r_2 + r_3)$ $(s_1 + s_2 + s_3)$ sono due sestiche con punto triplo in O: ne segue che le due coppie T' e T'' sono linearmente equivalenti. Quindi o $T' = T''$ ovvero T' e T'' sono coppie della g^1_2 canonica. In entrambi i casi $P + (Q + R) = (P + Q) + R$: la somma fra coppie di punti di C è associativa.

2.

Del risultato precedente resta traccia se la quartica degenera in una conica e due rette.

Esaminiamo il caso semplice in cui C è una conica irriducibile, $r_1,\ r_2$ due rette per il punto O, che supponiamo tangenti a C nei punti A e B.Inoltre identifichiamo le coppie di punti di C allineati con O.
Si vuoi provare che esiste una struttura di gruppo abeliano nell'insieme delle coppie di punti di $C \backslash A \cup B$, modulo l'identificazione di cui si è detto. Precisamente, tale gruppo è isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

C sia la conica $xy = 1$, r_1 e r_2 siano gli assi coordinati, O l'origine $(0, 0)$. Indichiamo poi con p^0 una qualunque coppia di punti di $C \backslash A \cup B$ allineati con O, ad es. $((1, 1), (-1, -1))$. Siano poi $P = (P_1; P_2),\ Q = (Q_1; Q_2),\ R = (R_1; R_2)$ generiche coppie di punti di $C \backslash A \cup B$.
La conica per $P,\ Q,\ O$ incontra r_1 ed r_2 rispettivamente in S'_1 ed S'_2. La conica per $S'_1,\ S'_2,\ P^0,\ O$ spezza nella retta $P^0 O$ e nella retta per S'_1 ed S'_2, la quale incontra C in $S = (S_1; S_2)$.
Definiamo $P + Q = S$; se $p_1,\ p_2$ sono le ascisse di P_1 e P_2, poniamo

$$\sigma(P) = p_1 + p_2,\ \ \pi(P) = p_1 p_2,\ \ \tau(P) = \sigma(P)/\pi(P).$$

La coppia $P = (P_1; P_2)$ è determinata da $\sigma(P)$ e $\tau(P)$.
Un semplice calcolo mostra che

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma(P + Q) & = & \sigma(P) + \sigma(Q) \\ \tau(P + Q) & = & \tau(P) + \tau(Q) \end{cases}$$

Se la coppia $P^0 = (P^0_1; P^0_2)$ è l'intersezione della conica C con la retta $y = x$, si ha

$$\sigma(P^0) = 0,\ \ \tau(P^0) = 0$$

e

$$\sigma(P^0 + P) = \sigma(P), \quad \tau(P^0 + P) = \tau(P)$$

con P non equivalerne a P^0: P^0 è l'elemento neutro della somma. (Se $P \equiv P^0$, $\sigma(P^0 + P) = 0$, $\tau(P^0 + P) = 0$).
Dalle (1) segue subito che la somma è commutativa:

$$P + Q = Q + P$$

e inoltre è associativa perchè

$$\sigma((P + Q) + R) = \sigma(P + (Q + R)) = \sigma(P + Q + R),$$

$$\tau((P + Q) + R) = \tau(P + (Q + R)) = \tau(P + Q + R).$$

Infine, ripetendo sostanzialmente il procedimento seguito per la quartica piana con punto doppio, si prova che la coppia opposta di $P = (P_1, P_2)$ è data dai due punti in cui le rette OP_1, OP_2 incontrano ulteriormente la conica C.

3.

La costruzione precedente si può generalizzare per definire la somma fra serie lineari di ordine g su una curva di genere g. Sembra conveniente prendere ,come modello di una curva di genere g, una curva piana di ordine $g + 2$, C^{g+2} con $\binom{g}{2}$ punti doppi, che, per semplicità, supponiamo in posizione generale.

Le C^g aggiunte formano un sistema lineare di dimensione $2g$ e incontrano la C^{g+2}, fuori dei punti doppi, in $3g$ punti.

Siano P, Q, R gruppi di g punti sulla C^{g+2}. Se sono in posizione generale, esiste unica una C^g aggiunta per P e Q che incontra la C^{g+2} ulteriormente in un gruppo S' di g punti. Sia poi P^0 una g-upla generica di punti su C^{g+2}. La C^g aggiunta per S' e P^0 incontra ulteriormente la C^{g+2} in un gruppo S di g punti che definiamo somma di P e Q: $S = P + Q$.

Nel caso "generico" la dimostrazione procede come per $g = 2$.
I casi eccezionali: serie lineari di ordine g e dimensione maggiore di zero, presentano le difficoltà inerenti alla struttura dell' insieme delle serie speciali.

Riferimenti bibliografici

[1] CASTELNUOVO G., *Le corrispondenze univoche tra i gruppi di p punti sopra una curva di genere p*, Rend del R. Istituto Lombardo **25** 2 (1893).

[2] VAN DER WAERDEN B. L., *Einf́urung in die algebraische Geometrie*, Springer, 1939.

AMS Subject Classification: 14C20.

Francesco GHERARDELLI
Dipartimento di Matematica “Ulisse Dini
Università di Firenze
Viale Morgagni 67a
53134 Firenze, ITALIA
Lavoro pervenuto in redazione il 20.07.00.