Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 133–146

MORPHISMES D'UNE COURBE DE GENRE 2 VERS UNE COURBE DE GENRE 1

par

Philippe Satgé

***Résumé.* —** Un morphisme non constant d'une courbe de genre 2 vers une courbe de genre 1 admet, en général, plusieurs morphismes complémentaires. Nous proposons dans ce travail une manière canonique de choisir un tel complémentaire, et discutons quelques propriétés remarquables de ce complémentaire. Cette construction, dans le cas où le morphisme donné est de degré impair, est connue; le cas du degré pair présente une difficulté supplémentaire.

***Abstract* (Morphisms from a cuve of genus two to a curve of genus one). —** There are several independant morphisms from a curve of genus 2 to some curve of genus 1 which are independant of a given morphism from the curve of genus 2 to a given curve of genus 1. In this paper, we describe a canonical choice, and point out some of its properties. This construction is known if the degree of the given morphism is odd; an extra difficulty comes up when this degree is even.

Introduction

On fixe un corps de base k de caractéristique différente de 2 et une clôture algébrique $\overline{k}$ de k ; on se donne une k-courbe C de genre 2 qui est k-hyperelliptique (c'est à dire telle que le quotient de C par l'involution hyperelliptique est k-isomorphe la droite projective $\mathbb{P}^1_k$) et on note ι_C l'involution hyperelliptique de C. On suppose qu'il existe un k-morphisme $\varphi : C \to E$ où E est une k-courbe elliptique qui vérifie $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$ et qui est optimal, c'est à dire que le noyau du morphisme de la jacobienne de E vers la jacobienne de C déduit de φ par fonctorialité de Picard est le k-schéma en groupe trivial (on rappelle dans le § 1 de ce travail que, si φ est un k-morphisme optimal de C vers une k-courbe de genre 1, alors on peut canoniquement munir cette k-courbe de genre 1 d'une structure de k-courbe elliptique de sorte que $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$). Dans cette situation, le théorème d'irréductibilité de Poincaré prouve qu'il existe au moins un $\overline{k}$-morphisme ψ de C vers une autre $\overline{k}$-courbe elliptique F qui est indépendant

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 14G27, 14H30.
***Mots clefs*. —** Courbes de genre 1 et 2, jacobiennes, revêtements.

© Séminaires et Congrès 5, SMF 2001

de φ (c'est à dire tel que, si ω et η sont respectivement des 1-formes régulières non nulles sur E et F, alors $\varphi^*(\omega)$ et $\psi^*(\eta)$ sont deux 1-formes régulières sur C qui sont linéairement indépendantes). Bien que le morphisme φ ne détermine pas toujours la courbe F de manière unique, le choix suivant est naturel : on prend pour F le quotient de la jacobienne de C par l'image du morphisme obtenu par dualité de Picard à partir de φ ; ainsi F est une courbe elliptique, définie sur k, naturellement associée au k-morphisme φ. Nous montrons dans ce travail qu'il existe un plongement de C dans sa jacobienne qui, composé avec la projection de cette jacobienne sur F, donne un morphisme $\psi : C \to F$ qui possède les propriétés suivantes : ψ est un morphisme indépendant de φ, est défini sur k, vérifie $\psi \circ \iota_C = -\psi$, est optimal, son degré est égal au degré de φ ; ce morphisme ψ est appelé le complémentaire de φ ; le complémentaire de ψ est φ. On établit aussi une propriété caractéristique de ψ qui justifie les choix intervenant dans notre construction de ψ. Comme on l'a déjà signalé, on devra traiter de manière légèrement différente le cas où le degré de φ est impair et le cas où ce degré est pair. Le cas du degré impair est plus immédiat du fait qu'il y a alors un k-plongement naturel de C dans sa jacobienne ([**Kuh**], § 4 par exemple) ; par contre, lorsque le degré de φ est pair, un tel k-plongement n'existe plus en général ; la question de savoir si un morphisme complémentaire défini sur k existe toujours est soulevée à la fin du § 2 de [**Kuh**].

Le cas du degré 2 est le plus connu : un k-morphismes de degré 2 d'une courbe C de genre 2 vers une courbe de genre 1 est une projection de C sur le quotient C/τ où τ est une k-involutions non hyperelliptique de C. Comme on le rappelle dans le premier paragraphe de ce travail, le quotient C/τ est naturellement muni d'une structure de k-courbe elliptique pour laquelle la projection canonique $\varphi : C \to C/\tau$ est définie sur k, vérifie $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$, et est optimale. En composant τ avec l'involution hyperelliptique de C, on obtient naturellement une autre k-involution non hyperelliptique $\tau' = \tau \circ \iota_C$ de C. Il est immédiat de vérifier que le morphisme complémentaire (que nous définissons dans ce travail) de la projection canonique $\varphi : C \to C/\tau$ est la projection canonique $\psi : C \to C/\tau'$. Lorsque k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on retrouve les formules de réductions d'intégrales hyperelliptique de genre 2 à des intégrales elliptiques à l'aide de transformations de degré 2 qui ont été données par Jacobi et Legendre ([**Jac**], [**Leg**]) dans la première moitié du XIX-ème siècle. Notons que Jacobi et Legendre travaillent, comme c'était l'habitude au XIX-ème siècle, avec la courbe de genre 2 donnée sous forme de de Rosenhain (c'est à dire sous la forme de la courbe plane d'équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$). Un tel modèle n'est bien sûr pas adapté aux questions de rationalité puisque une k-courbe de genre 2 possédant une k-involution non hyperelliptique ne possède pas, en général, trois points de Weierstrass définis sur le corps k. Signalons que Gaudry et Schost ([**G-S**]) ont caractérisé, en terme de leurs invariants d'Igusa, les courbes de genre 2 possédant des involutions non hyperelliptiques et donné, pour chaque involution non hyperelliptique τ d'une telle courbe C , une équation quadratique dont les solutions sont les invariants modulaires de C/τ et C/τ'.

Toujours lorsque k est le corps $\mathbb{C}$ des complexes, le cas où le morphisme φ est de degré 3 a été aussi essentiellement traité au XIX-ème siècle dans la recherche de la réduction d'intégrales hyperelliptique de genre 2 à des intégrales elliptiques à l'aide de transformations de degré 3 . Krazer ([**Kra**], p. 480 dans la réédition de Chelsea) exhibe un exemple générique de ce cas ; il fait explicitement la remarque que, contrairement à ce qui se passe dans le cas du degré 2, les formules des deux intégrales d'une courbe de genre 2 qu'il donne sous forme d'intégrales elliptiques ne semblent pas se déduire l'une de l'autre de manière explicite. Autrement dit, il signale que l'existence d'un morphisme complémentaire ne se lit pas directement sur les formules dont il dispose. La manière dont Kuhn retrouve ces formules illustre l'intérêt de l'approche algébrique du problème ([**Kuh**]).

À la fin du XIX-ème siècle, Bolza ([**Bol**]) donne des exemples de réduction d'intégrales hyperelliptique de genre 2 à des intégrales elliptiques à l'aide de transformations de degré 4. La vérification du fait que les formules intégrales proposées par Bolza sont bien celles du morphisme complémentaire que l'on introduit ici mériterait sans doute d'être rédigée (mais nécessite des calculs un peu long).

On notera enfin que le cas du degré 5 est traité (dans un point de vue un peu différent) par Rubin et Silverberg ([**R-S**]).

Nous utilisons dans ce travail des résultats bien connus que l'on trouve dans ([**F-K**] et [**Kuh**] par exemple). Nous les rappelons sans démonstration dans un premier paragraphe. Notons que la seule hypothèse que nous faisons est que le corps de base k est de caractéristique différente de 2 ; cette caractéristique peut diviser le degré du morphisme φ. En conséquence, nous utilisons le langage des k-schémas en groupes plutôt que celui des modules galoisiens (qui ne permet pas de traiter le cas où la caractéristique de k divise le degré du morphisme φ). Cela nous amène à présenter quelques remarques concernant la notion de morphisme optimal qui sont difficiles à trouver dans la littérature (nous les établissons en utilisant des notions traitées en exercices dans Bourbaki).

On utilisera de manière essentielle la théorie des jacobiennes des courbes. Bien qu'un grand nombre des résultats dont nous nous servons ont été établis par A. Weil ([**Wei**] complété par le postcriptum de l'édition de 1971 pour les questions de corps de rationalité), nous utilisons le point de vue introduit par Grothendieck, c'est à dire celui qui consiste à utiliser le foncteur de Picard relatif ([**Gro**], [**Mum**], [**B-L-R**]). Cela permet plus de souplesse dans les raisonnements, en particulier pour les questions de rationalité, et c'est le cadre naturel de la théorie de la dualité qui joue un rôle essentiel dans notre présentation (et qui ne s'exprime pas de manière agréable dans le point de vue de A. Weil). Les notations et les conventions que nous utilisons dans ce papier sont relativement standards. Cependant, elles mettent en jeu des identifications que nous précisons pour éviter les ambiguïtés. Si X est un k-schéma et si K/k est une extension de corps, un diviseur (resp. un faisceau, etc..) sur le K-schéma $X \times_k K$ sera simplement appelé un K-diviseur (resp. K-faisceau, etc..) sur X ; de même, si Y est un autre k-schéma, un K-morphisme $f : X \times_k K \to Y \times_k K$ sera simplement appelé un K-morphisme de X vers Y et noté $f : X \to Y$.

Si X est une k-courbe lisse et géométriquement intègre ou une k-variété abélienne, le foncteur de Picard relatif de X/k est représentable par un k-schéma en groupe localement algébrique dont la composante connexe de l'origine est une k-variété abélienne $\mathrm{Pic}^\circ_{X/k}$. Dans le cas où X est une courbe, $\mathrm{Pic}^\circ_{X/k}$ est appelée la jacobienne de X et représente le sous foncteur du foncteur de Picard relatif correspondant aux familles de faisceaux inversibles sur X qui sont de degré 0 ; on pose alors $J(X) := \mathrm{Pic}^\circ_{X/k}$. Les $\overline{k}$-points de $J(X)$ s'identifient aux classes d'isomorphismes de $\overline{k}$-faisceaux inversibles sur X qui sont de degré 0, donc aussi aux classes d'équivalence linéaire de $\overline{k}$-diviseurs de degré 0 sur X. Si Λ est un $\overline{k}$-diviseur de degré d sur X, on note $\alpha_\Lambda : X \to J(X)$ le $\overline{k}$-morphisme d'Abel-Jacobi associé à Λ, c'est à dire l'unique $\overline{k}$-morphisme de X vers $J(X)$ qui envoie un $\overline{k}$-point P de X sur le $\overline{k}$-point de $J(X)$ représenté la classe du $\overline{k}$-diviseur $dP - \Lambda$ (qui est de degré 0). Nous identifions toujours $\mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}$ à $J(X)$ à l'aide de la polarisation principale de $J(X)$ (c'est à dire de la polarisation principale associée aux diviseurs theta). Rappelons qu'alors, si Λ est un $\overline{k}$-diviseur de X de degré d, le $\overline{k}$-morphisme $\alpha^\circ_\Lambda : J(X)\ (= \mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}) \to J(X)$ obtenu, à partir du $\overline{k}$-morphisme $\alpha_\Lambda : X \to J(X)$ par dualité de Picard, est la multiplication par $-d$.

Dans le cas où X est une courbe de genre 1 munie d'un point rationnel 0_X, on sait que le morphisme d'Abel-Jacobi $\alpha_{0_X} : X \to J(X)$ est un k-isomorphisme de courbe, et un k-isomorphisme de variété abélienne si on munit X de la structure de k-variété abélienne pour laquelle 0_X est l'origine. Lorsqu'un tel point 0_X est fixé, on identifie X munie de cette structure de variété abélienne à $J(X)$ à l'aide de α_{0_X} ; le morphisme $\alpha^\circ_{0_X}$ est alors la multiplication par -1 de $X\ (= \mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k})$ vers $X\ (= J(X))$.

Si $f : X \to Y$ est un k-morphisme de la k-courbe X vers la k-courbe Y, on note $f^\circ : J(Y) \to J(X)$ le k-morphisme de variété abélienne déduit de f par fonctorialité de Picard. De nouveau par fonctorialité de Picard, et compte tenu de nos identifications de $\mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}$ et $\mathrm{Pic}^\circ_{J(Y)/k}$ avec avec $J(X)$ et $J(Y)$, le k-morphisme f° donne par fonctorialité de Picard un k-morphisme $f^{\circ\circ} : J(X) \to J(Y)$. Rappelons que, sur les $\overline{k}$-points des jacobiennes identifiés aux classes de diviseurs de degré 0, f° correspond à l'image réciproque des diviseurs par f, et $f^{\circ\circ}$ correspond à l'image directe des diviseurs par f. On posera $Nf := f^{\circ\circ}$ comme c'est relativement habituel. Si f n'est pas constant, le composé $Nf \circ f^\circ$ est la multiplication par le degré de f comme on le vérifie sur les $\overline{k}$-points.

1. Notations et rappels

Nous utiliserons le vocabulaire suivant :

Définition 1.1. — Soient X et Y deux k-courbes lisses et géométriquement intègres ; on suppose que le genre de Y est strictement positif. Un k-morphisme $f : X \to Y$ est dit optimal si le noyau du k-morphisme $f^\circ : J(Y) \to J(X)$ est le k-schéma en groupe trivial.

Nous aurons besoin du lemme suivant qui est connu, mais dont la démonstration est difficile à trouver explicitement dans la littérature :

Lemme 1.2. — *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, et soient X et Y deux k-courbes lisses et géométriquement intègres. On suppose que le genre de Y est strictement positif et que $f : X \to Y$ est un k-morphisme optimal, alors f est fini et séparable.*

Démonstration. — Si f n'est pas fini, il est constant et f° est l'application nulle, donc f n'est pas optimal.

Soit $\overline{f}$ le morphisme déduit de f par extension des scalaires à la clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Le noyau de $\overline{f}^\circ$ est le $\overline{k}$-groupe algébrique obtenu à partir du noyau de f par extension des scalaires à $\overline{k}$, donc f est optimal si et seulement si $\overline{f}$ est optimal. D'autre part, comme X et Y sont géométriquement intègres, l'extension $k(X)/k(Y)$ est séparable si et seulement si $\overline{k}(X)/\overline{k}(Y)$ est séparable. On peut donc, pour notre démonstration, supposer que k est algébriquement clos ; nous faisons cette hypothèse dans la suite de la démonstration. Désignons par $k(Y)^p$ le sous corps de $k(Y)$ formé des puissances $p^{ième}$ des éléments de $k(Y)$. Comme l'extension $k(Y)/k$ est un extension séparable, de type fini, et de degré de transcendance 1, l'extension $k(Y)/k(Y)^p$ est de degré p, c'est à dire que le degré d'imperfection de $k(Y)$ sur $k(Y)^p$ est égal à 1. Supposons que f n'est pas séparable, c'est à dire que l'extension de corps $k(X)/k(Y)$ n'est pas séparable ; on sait alors (exercice 15 du § 8 de [**Bou**]) qu'il existe un $x \in k(X)$ tel que $x^p \in k(Y)$ et $x \notin k(Y)$. L'extension $k(X)/k(Y)$ contient donc une extension intermédiaire qui est purement inséparable et de degré p sur $k(Y)$, et donc $f : X \to Y$ se factorise par un morphisme $g : Z \to Y$ qui est purement inséparable et de degré p. On sait ([**Har**], Chap.IV, Prop. 2.5 par exemple dont on reprend les notations) que cela implique que Z est isomorphe à Y_p et que g est le Frobenius k-linéaire ; comme le genre de Y est strictement positif, le noyau de g° n'est pas trivial, donc le noyau de f° n'est pas trivial non plus, et notre assertion est prouvée. □

Remarque. — Comme me l'ont fait remarquer plusieurs personnes (Edixhoven, Illusie et Katsura par exemple), on peut présenter la démonstration précédente de manière plus géométrique : on suppose toujours k algébriquement clôs, et on écrit la factorisation standard $f = h \circ j$ où $j : X \to T$ est purement inséparable et $h : T \to Y$ est séparable (correspondant à la décomposition standard de l'extension de corps $k(X)/k(Y)$ en une extension séparable suivie d'une extension purement inséparable). Notons p^n le degré de j ; comme on l'a rappelé dans la démonstration ci-dessus, on sait que X est isomorphe à T_{p^n} et que le k-morphisme j est obtenu par n applications successives du Frobenius k-linéaire (les notations sont celles de [**Har**], Chap.IV, Prop. 2.5). Le corps $k(X)$ est donc le corps obtenu en extrayant les racines p^n-ième des éléments de $k(T)$, donc $k(X)$ contient les racines p^n-ième des éléments de $k(Y)$, et

donc $f : X \to Y$ se factorise en $f = l \circ \phi$ où $\phi : Y_{p^n} \to Y$ est obtenu par n applications successives du Frobenius k-linéaire. On en déduit, comme dans la démonstration ci-dessus, que le noyau de f° n'est pas trivial.

Notons que le morphisme l est séparable puisque le degré d'inséparabilité de $k(X)/k(Y)$ est égal à p^n qui est le degré de l'extension purement inséparable $k(Y_{p^n})/k(Y)$. Cette dernière remarque montre donc que l'extension $k(X)$ est séparable sur la clôture radicielle de $k(Y)$ dans $k(X)$. Ce résultat concernant l'extension de corps $k(Y)/k(X)$ résulte immédiatement de l'exercice 15 du §8 de [**Bou**].

Remarque. — Dans le cas particulier où la courbe Y est de genre 1, elle est un espace principal homogène sous sa jacobienne, et on est dans la situation considérée par Serre ([**Ser**], Chap. VI, §13). C'est un exercice de vérifier qu'alors la notion de morphisme optimal que nous avons introduite coïncide avec la notion de morphisme maximal introduite par Serre. Nous n'utiliserons pas cette remarque dans ce travail.

À partir de maintenant nous supposons que le corps k est de caractéristique différente de 2 ; nous fixons une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et notons k^{sep} la clôture séparable de k contenue dans $\overline{k}$. On désigne par C une k-courbe lisse et géométriquement intègre de genre 2 dont l'involution hyperelliptique est notée ι_C ; on suppose que C est k-hyperelliptique, c'est à dire que le quotient C/ι_C est k-isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1_k$. Comme on travaille en caractéristique différente de 2, la courbe C possède six points de Weierstrass que l'on note $W_1, \ldots, W_6$; le diviseur $W_1 + \cdots + W_6$ est rationnel sur k puisque c'est le diviseur de ramification de la projection canonique $C \to C/\iota_C$, donc chacun des W_i est défini sur la clôture séparable k^{sep} de k et l'ensemble $\{W_1, \ldots, W_6\}$ est globalement invariant sous l'action du groupe de galois $\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$. Soit D une k-courbe lisse, géométriquement intègre et de genre 1, et $f : C \to D$ un k-morphisme fini et séparable ; l'image directe par f du g^1_2 de C est un g^1_2 de D, et on note ι l'involution k-hyperelliptique de D associée à ce g^1_2 de D. On a $f \circ \iota_C = \iota \circ f$; comme on travaille en caractéristique différente de 2, l'involution ι possède quatre points fixes que l'on note $T_1, \ldots, T_4$; ces points sont définis sur k^{sep} et sont globalement invariants par $\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$. Pour tout $i = 1, \ldots, 6$, on a $f(W_i) \in \{T_1, \ldots, T_4\}$ puisque $f(W_i) = f(\iota_C(W_i)) = \iota(f(W_i))$; le résultat suivant est connu et facile à vérifier ([**F-K**], [**Kuh**] par exemple) :

Lemme 1.3. — *On suppose que f est optimal, alors on peut choisir les indices des W_i et des T_j de sorte que :*

Si le degré de f est impair, on a $f(W_i) = T_i$ si $i = 1, 2$ ou 3, et $f(W_4) = f(W_5) = f(W_6) = T_4$;

Si le degré de f est pair, on a $f(W_1) = f(W_2) = T_1$, $f(W_3) = f(W_4) = T_2$, et $f(W_5) = f(W_6) = T_3$.

Dans la suite, les indices des W_i et des T_j seront toujours choisis de sorte que les assertions de ce lemme soient valables ; on remarque que cela impose le choix du point T_4.

Le point T_4 privilégié dans le lemme 1.3 est séparable sur k comme nous l'avons déjà noté, et il est invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$; il est donc rationnel sur k. On notera E la courbe D munie de la structure de k-courbe elliptique pour laquelle T_4 est l'origine ; on pose alors $0_E := T_4$. Le morphisme f de C vers E vérifie alors $f \circ \iota_C = -f$.

2. Le morphisme complémentaire

Comme au paragraphe précédent C désigne une k-courbe k-hyperelliptique de genre 2. On suppose qu'il existe une k-courbe elliptique E, un k-morphisme $\varphi : C \to E$ qui est optimal et qui vérifie $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$; on note n le degré de φ. On rappelle que l'on choisit les indices des points de Weierstrass $W_1, \ldots, W_6$ de C et des points T_1, T_2, T_3 d'ordre 2 de la courbe elliptique E comme dans le lemme 1.3 (en tenant compte du fait que l'on a posé $E = D$ et $0_E = T_4$).

En utilisant les identifications précisées à la fin de l'introduction, on introduit les notations suivantes :

Définition 2.1. — On rappelle que $\varphi^\circ : E \to J(C)$ est le k-morphisme déduit de φ par fonctorialité de Picard, et on désigne par $\pi : J(C) \to F$ son conoyau dans la catégorie des $k-$groupes algébriques commutatifs. Pour tout $\overline{k}$-diviseur Λ de C, on note $\psi_\Lambda : C \to F$ le $\overline{k}$-morphisme obtenu en composant π avec le $\overline{k}$-morphisme d'Abel-Jacobi α_Λ, c'est à dire que l'on pose $\psi_\Lambda := \pi \circ \alpha_\Lambda$. Enfin, $\pi^\circ : F \to J(C)$ est le k-morphisme obtenu par fonctorialité de Picard à partir de π.

Nous groupons dans les deux lemmes suivants quelques propriétés standards des morphismes que l'on vient d'introduire :

Lemme 2.2. — *On désigne par* $[-]$ *le morphisme différence de* $J(C) \times J(C) \to J(C)$, *par* $h : E \times F \to J(C)$ *le composé* $[-] \circ (\varphi^\circ \times \pi^\circ)$, *par* q_E *et* q_F *les projections sur* E *et* F *du produit fibré* $E \times_{J(C)} F$ *de* $\varphi^\circ : E \to J(C)$ *et* $\pi^\circ : F \to J(C)$, *par* p_E *et* p_F *les projections sur* E *et* F *du produit direct* $E \times F$, *et par* $i : E \times_{J(C)} F \to E \times F$ *le morphisme canonique (caractérisé par* $p_E \circ i = q_E$ *et* $p_F \circ i = q_F$*). On a :*

(1) *Le morphisme* $i : E \times_{J(C)} F \to E \times F$ *est le noyau de* h.

Dans la suite nous posons $\ker(h) = E \times_{J(C)} F$ *; on a :*

(2) *Le morphisme* $q_E = p_E \circ i$ *induit un isomorphisme de* $k-$*groupe algébrique de* $\ker(h)$ *sur le noyau* $E[n]$ *de la multiplication par* n *sur* E.

(3) *Le morphisme* $q_F = p_F \circ i$ *induit un isomorphisme de* $k-$*groupe algébrique de* $\ker(h)$ *sur le noyau* $F[n]$ *de la multiplication par* n *sur* F.

Démonstration. — Le point 1 est purement formel : pour tout $k-$schéma S, la donnée d'un $k-$morphisme f de S vers $E \times_{J(C)} F$ est équivalente à la donnée d'un couple de morphismes $(f_E, f_F) \in \mathrm{Mor}_k(S,E) \times \mathrm{Mor}_k(S,F)$ vérifiant $\varphi^\circ \circ f_E = \pi^\circ \circ f_F$. Par définition de h, l'égalité $\varphi^\circ \circ f_E = \pi^\circ \circ f_F$ est équivalente au fait que $h \circ f : S \to J(C)$ est le morphisme nul, et *1* est prouvé.

Montrons le point 2. On note $j_{E[n]} : E[n] \to E$ le noyau de la multiplication par n sur E. Comme $N\varphi \circ \varphi^\circ$ est la multiplication par n, on a $n \circ p_E \circ i = N\varphi \circ \varphi^\circ \circ p_E \circ i = N\varphi \circ \varphi^\circ \circ q_E = N\varphi \circ \pi^\circ \circ q_F$. Comme φ° est le noyau de π, le morphisme π° est le noyau de $N\varphi$. On a donc $n \circ p_E \circ i = N\varphi \circ \pi^\circ \circ q_F = 0$, et donc $p_E \circ i : \ker(h) \to E$ se factorise par $j_{E[n]}$; notons $\psi : \ker(h) \to E[n]$ cette factorisation. Construisons maintenant, dans l'autre sens, un $k-$morphisme η de $E[n]$ vers $\ker(h)$; la donnée d'un tel morphisme est équivalente à la donnée d'un couple de $k-$morphismes de groupe algébrique (α, β) où $\alpha : E[n] \to E$ et $\beta : E[n] \to F$ vérifient $\varphi^\circ \circ \alpha = \pi^\circ \circ \beta$. Nous prenons $\alpha = j_{E[n]}$. D'autre part, le composé $N\varphi \circ \varphi^\circ \circ j_{E[n]} = n \circ j_{E[n]}$ étant le morphisme nul, le morphisme $\varphi^\circ \circ j_{E[n]} : E[n] \to J(C)$ se factorise par le noyau $\pi^\circ : F \to J(C)$ de $N\varphi$, et nous prenons pour $\beta : E[n] \to F$ ce morphisme de factorisation. Avec ces choix on a bien $\varphi^\circ \circ \alpha = \pi^\circ \circ \beta$, et un calcul évident montre que le morphisme η attaché à ce couple (α, β) est l'inverse du morphisme $\psi : \ker(h) \to E[n]$.

Montrons le point 3. Le morphisme $q_F : E \times_{J(C)} F = \ker(h) \to F$ est une immersion fermée de schémas en groupes (il est en effet obtenu à partir de l'immersion fermée de schémas en groupes $\varphi^\circ : E \to J(C)$ par le changement de base $\pi^\circ : F \to J(C)$). On vient de montrer que $\ker(h)$ est isomorphe à $E[n]$, donc est un $k-$groupe algébrique fini, d'ordre n^2, et tué par n ; en conséquence son image par l'immersion fermée q_F est un sous $k-$groupe algébrique de F qui est fini, d'ordre n^2, et tué par n. Le seul sous schéma en groupe de F qui a ces propriétés est le noyau $F[n]$ de la multiplication par n sur F ; cela prouve notre assertion et achève la démonstration. □

Remarque. — Il résulte du lemme précédent que les k-schémas en groupes $E[n]$ et $F[n]$ sont canoniquement isomorphes. Le fait d'attacher à une courbe de genre 2 dont la jacobienne est décomposée un couple de courbes elliptiques dont les schémas en groupes des points de n-torsions sont isomorphes est classique ; c'est un moyen de décrire l'espace des modules des courbes de genre 2 dont la jacobienne est décomposée. Lorsque le corps $k = \mathbb{C}$ est le corps des complexes, on retrouve les surfaces étudiées par Humbert.

Lemme 2.3. — *Les $\overline{k}$-points de $J(C)$ qui sont d'ordre 2 et qui sont dans le noyau de π sont les trois $\overline{k}$-points de $J(C)$ représentés par les diviseurs $(W_1)-(W_2)$, $(W_2)-(W_3)$, et $(W_3)-(W_1)$ lorsque le degré n de φ est impair, et les trois $\overline{k}$-points de $J(C)$ représentés par les diviseurs $(W_1)-(W_2)$, $(W_3)-(W_4)$, et $(W_5)-(W_6)$ lorsque le degré n de φ est pair.*

Démonstration. — Le noyau de π est l'image de φ° et le noyau de φ° est trivial, donc (comme on travaille en caractéristique différente de 2), l'ensemble des $\overline{k}$-points tués par 2 qui sont dans le noyau de π est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour prouver le lemme il suffit donc de vérifier que les trois points donnés sont dans l'image de φ°, ce qui est un calcul facile. Pour faire ce calcul, on désigne par K un diviseur canonique de C et par $\sim$ l'équivalence linéaire de diviseurs. Supposons que le degré n de φ est impair. Pour $i\in\{1,2,3\}$, on a $\varphi^*(T_i)\sim(W_i)+mK$ où $m=\frac{n-1}{2}$. Ainsi, pour $i\in\{1,2,3\}$ et $j\in\{1,2,3\}$, le point représenté par le diviseur $(W_i)+mK-(W_j)-mK=(W_i)-(W_j)$ est dans limage de φ°, ce que l'on voulait. Supposons que le degré n de φ est pair. On a $\varphi^*(T_1)\sim(W_1)+(W_2)+(m-1)K$ (resp. $\varphi^*(T_2)\sim(W_3)+(W_4)+(m-1)K$, resp. $\varphi^*(T_3)\sim(W_5)+(W_6)+(m-1)K$) où $m=\frac{n}{2}$. Ainsi le point de $J(C)$ représenté par $(W_1)+(W_2)+(m-1)K-((W_1)+(W_2)+(m-1)K)=(W_1)+(W_2)-(W_3)-(W_4)$ est dans l'image de φ° ; comme $(W_1)+(W_2)-(W_3)-(W_4)\sim(W_5)-(W_6)$ on a montré que le point de $J(C)$ représenté par $(W_5)-(W_6)$ est dans l'image de φ°. On démontre de même que les points de $J(C)$ représentés par $(W_3)-(W_4)$ et $(W_5)-(W_6)$ sont dans l'image de φ° ce qui achève la démonstration. □

Le morphisme complémentaire ψ que l'on cherche à construire sera un ψ_Λ pour un Λ bien choisi. Rappelons que, parmi les propriétés que l'on exige du complémentaire ψ, figurent en particulier le fait que $\psi\circ\iota_C=-\psi$, que ψ est un k-morphisme optimal, et que le degré de ψ est n. La construction de ψ repose sur la proposition suivante :

Proposition 2.4. — *Soit Λ un $\overline{k}$-diviseur de C de degré d.*

(1) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\psi_\Lambda\circ\iota_C=-\psi_\Lambda$ *;*

(ii) *si K est un diviseur canonique de C, le $\overline{k}$-point de $J(C)$ représenté par le diviseur $dK-2\Lambda$ est dans le noyau de π.*

(2) *ψ_Λ est un morphisme de degré d^2n ; il est optimal si et seulement si $d=\pm1$.*

Démonstration. — Montrons le point *1.* La condition *(i)* est vérifiée si et seulement si, pour tout $\overline{k}$-point P de C, on a $\psi_\Lambda(P)+\psi_\Lambda(\iota_C(P))=0_F$, c'est à dire si et seulement si $\alpha_\Lambda(P)+\alpha_\Lambda(\iota_C(P))$ est dans le noyau de π. Comme $\alpha_\Lambda(P)$ et $\alpha_\Lambda(\iota_C(P))$ sont les $\overline{k}$-points de $J(C)$ respectivement représentés par les diviseurs $d(P)-\Lambda$ et $d(\iota_C(P))-\Lambda$, la condition *(i)* est équivalente au fait que, pour tout $\overline{k}$-point de C, le $\overline{k}$-point de $J(C)$ représenté par le diviseur $d((P)+(\iota_C(P)))-2\Lambda$ est dans le noyau de π. Ceci est la condition *(ii)* puisque $(P)+(\iota_C(P))$ décrit les diviseurs canoniques lorsque P décrit les $\overline{k}$-points de C.

Montrons le point *2.* Par définition on a $\psi_\Lambda^\circ=\alpha_\Lambda^\circ\circ\pi^\circ$, et donc $\psi_\Lambda^\circ=-d\pi^\circ$ puisque, comme on l'a rappelé à la fin de l'introduction, α_Λ° est la multiplication par $-d$ sur $J(C)$. Comme π est un conoyau, le noyau de π° est le k-schéma en groupe trivial, donc $\psi_\Lambda^\circ=-d\pi^\circ$ est optimal si et seulement si $d=\pm1$. Il reste à calculer le degré de ψ_Λ. Comme $\psi_\Lambda^\circ=-d\pi^\circ$, on a $N\psi_\Lambda=-d\pi^{\circ\circ}$, et donc $N\psi_\Lambda\circ\psi_\Lambda^\circ=d^2\pi^{\circ\circ}\circ\pi^\circ$. Le

composé $N\psi_\Lambda \circ \psi_\Lambda^\circ$ étant la multiplication par le degré de ψ_Λ, il suffit, pour conclure, de montrer que $\pi^{\circ\circ} \circ \pi^\circ$ est la multiplication par n. L'égalité $N\psi_\Lambda \circ \psi_\Lambda^\circ = d^2\pi^{\circ\circ} \circ \pi^\circ$ appliquée avec un diviseur Λ de degré ± 1, montre que le composé $\pi^{\circ\circ} \circ \pi^\circ$ est la multiplication par un entier. Comme il résulte du lemme précédent que le k-schéma en groupes $E \times_{J(C)} F$ est isomorphe au k-schéma en groupes $F[n]$, on conclura en remarquant que la seconde projection $q_F : E \times_{J(C)} F \to F$ est le noyau de $\pi^{\circ\circ} \circ \pi^\circ$. Pour terminer la démonstration, il suffit donc de vérifier que, pour tout $k-$schéma S et tout $k-$morphisme $f : S \to F$ tel que $(\pi^{\circ\circ} \circ \pi^\circ) \circ f$ est le morphisme nul, il existe un et un seul $k-$morphisme $\widetilde{f} : S \to E \times_{J(C)} F$ tel que $f = q_F \circ \widetilde{f}$. Par définition du produit fibré $E \times_{J(C)} F$, la donnée d'un tel $\widetilde{f}$ est équivalente à la donnée d'un $k-$morphisme $g : S \to E$ vérifiant $\varphi^\circ \circ g = \pi^\circ \circ f$. Par hypothèse $\pi^{\circ\circ} \circ (\pi^\circ \circ f)$ est le $k-$morphisme nul ; compte tenu des identifications que l'on a fixé à la fin de l'introduction, on a $\pi^{\circ\circ} = -\pi$. L'existence et l'unicité de g résulte du fait que $\varphi^\circ : E \to J(C)$ est le noyau de π, donc aussi de $-\pi$. □

Nous sommes maintenant en mesure de définir le morphisme complémentaire ψ de φ. Commençons par le cas où φ est de degré impair qui, comme on l'a signalé dans l'introduction, est le plus simple et apparaît dans la littérature ([**Kuh**], §4 par exemple) ; nous rappelons la démonstration de ce cas car les arguments sur lesquels elle repose sont réutilisés dans le cas où φ est de degré pair.

Définition 2.5. — On suppose que le degré de φ est impair, on désigne par K un diviseur canonique de C rationnel sur k, et on pose $\Lambda = (W_1) + (W_2) + (W_3) - K$ (les points de Weierstrass de C sont indexés comme dans le lemme 1.3). On définit le morphisme complémentaire ψ de φ par $\psi := \psi_\Lambda$, c'est à dire $\psi := \pi \circ \alpha_\Lambda$.

On a :

Théorème 2.6. — *On suppose que le degré n de φ est impair.*

Le morphisme complémentaire ψ de φ (définition 2.5) est un $k-$morphisme de C vers F qui est optimal, de degré n, qui vérifie l'égalité $\psi \circ \iota_C = -\psi$. Les deux morphismes φ et ψ sont deux morphismes indépendants.

On a $\psi(W_1) = \psi(W_2) = \psi(W_3) = 0_F$, et $\psi(W_4)$, $\psi(W_5)$, et $\psi(W_6)$ sont les trois points d'ordre 2 de F. Enfin, le morphisme complémentaire de ψ est le morphisme φ.

Démonstration. — On déduit immédiatement du lemme 1.3 que le diviseur $(W_1) + (W_2) + (W_3)$ est rationnel sur k, donc le diviseur Λ est rationnel sur k, donc α_Λ est défini sur k, et donc $\psi = \pi \circ \alpha_\Lambda$ est aussi défini sur k. Comme le degré de Λ vaut 1, le deuxième point de la proposition 2.4 montre que ψ est optimal et de degré n. Le diviseur $K - 2\Lambda = 3K - 2(W_1) - 2(W_2) - 2(W_3)$ est linéairement équivalent à 0, donc représente l'origine de $J(C)$, et donc est un point du noyau de π ; le premier point de la proposition 2.4 montre donc que $\psi \circ \iota_C = -\psi$. D'autre part, on a $\psi^\circ = \pi^\circ \circ \alpha_\Lambda^\circ = -\pi^\circ$ puisque, comme on l'a noté à la fin de l'introduction, α_Λ° est la multiplication par -1.

On a donc $[-]\circ(\varphi^\circ\times\pi^\circ)=[+]\circ(\varphi^\circ\times\psi^\circ)$ où $[-]$ (resp. $[+]$) désigne le morphisme différence (resp. somme) sur $J(C)$. La première assertion du lemme 2.2 montre donc que $[+]\circ(\varphi^\circ\times\psi^\circ)$ est une isogénie de $E\times F$ sur $J(C)$, ce qui est équivalent au fait que φ et ψ sont des morphismes indépendants.

Par définition, $\psi(W_1)$ est l'image par π du $\overline{k}$-point de $J(C)$ représenté par le diviseur $(W_1)+K-(W_1)-(W_2)-(W_3)=K-(W_2)-(W_3)$, donc aussi par le diviseur $(W_2)-(W_3)$ puisque $2(W_2)$ est un diviseur canonique. On a vu (lemme 2.3) que ce point est dans le noyau de π, donc $\psi(W_1)=0_F$. On démontre de même que $\psi(W_2)=0_F$ et que $\psi(W_3)=0_F$. Ceci étant, il résulte du lemme 1.3 que $\psi(W_4)$, $\psi(W_5)$, et $\psi(W_6)$ sont les trois points d'ordre 2 de F.

Enfin il reste à vérifier que le complémentaire de ψ est φ. Pour calculer ce complémentaire, rappelons que l'on a déjà noté dans cette démonstration que $\psi^\circ=-\pi^\circ$; en conséquence, le conoyau de ψ° coïncide avec le conoyau de π°. D'autre part, π étant le conoyau de φ, le conoyau de π° est $N\varphi$. Le complémentaire de ψ est donc le composé $N\varphi\circ\alpha_{\Lambda_*}$ où $\Lambda_*=(W_4)+(W_5)+(W_6)-K$ puisque $\psi(W_4)$, $\psi(W_5)$, et $\psi(W_6)$ sont les trois points d'ordre 2 de F, c'est à dire que W_4, W_5 et W_6 jouent pour ψ le rôle que jouaient W_1, W_2 et W_3 pour φ. Ainsi, l'image d'un $\overline{k}$-point P de C par le complémentaire de ψ est l'image par $N\varphi$ du $\overline{k}$-point de $J(C)$ représenté par le diviseur $(P)+K-(W_4)-(W_5)-(W_6)=(P)+(Q)+(\iota_C(Q))-(W_4)-(W_5)-(W_6)$ où Q est un $\overline{k}$-point quelconque de C. Cette image est la somme $\varphi(P)+\varphi(Q)+\varphi(\iota_C(Q))-\varphi(W_4)-\varphi(W_5)-\varphi(W_6)$ sur E ; cette somme vaut $\varphi(P)$ puisque $\varphi\circ\iota_C=-\varphi$ et $\varphi(W_4)=\varphi(W_5)=\varphi(W_6)=0_E$. Cela achève la démonstration. □

Remarque. — Dans la définition 2.5, le choix $\Lambda=(W_4)+(W_5)+(W_6)-K$ aurait été aussi naturel que le choix $\Lambda=(W_1)+(W_2)+(W_3)-K$ que nous avons fait ; comme le diviseur $(W_1)+(W_2)+(W_3)$ est linéairement équivalent au diviseur $(W_4)+(W_5)+(W_6)$, ce choix aurait donné le même morphisme α_Λ et donc le même morphisme complémentaire ψ.

Pour définir le morphisme complémentaire dans le cas du degré pair nous posons la définition suivante :

Définition 2.7. — On suppose que le degré n de φ est pair et on désigne par K un diviseur canonique de C rationnel sur k. Pour tout choix $r\in\{1,2\}$, $s\in\{3,4\}$ et $t\in\{5,6\}$, on pose $\Lambda_{r,s,t}=(W_r)+(W_s)+(W_t)-K$ et $\psi_{r,s,t}=\pi\circ\alpha_{\Lambda_{r,s,t}}$.

Le diviseur $\Lambda_{r,s,t}$ dépend du choix du triplet (r,s,t) et n'est pas, en général, rationnel sur k ; cependant on a :

Proposition 2.8. — *Le morphisme $\psi_{r,s,t}$ introduit dans la définition 2.7 ne dépend pas du choix du triplet (r,s,t) et est défini sur k.*

Démonstration. — Soit $r'\in\{1,2\}$, $s'\in\{3,4\}$, et $t'\in\{5,6\}$ un autre choix ; pour tout $\overline{k}$-point P de C, le point $\alpha_{\Lambda_{r,s,t}}(P)-\alpha_{\Lambda_{r',s',t'}}(P)$ est le $\overline{k}$-point de $J(C)$ représenté par

le diviseur $(W_r)-(W_{r'})+(W_s)-(W_{s'})+(W_t)-(W_{t'})$. On a vu (lemme 2.3) que les $\overline{k}$-points de $J(C)$ représentés par $(W_r)-(W_{r'})$, $(W_s)-(W_{s'})$ et $(W_t)-(W_{t'})$ sont tous les trois dans le noyau de π, donc $\psi_{r,s,t}=\psi_{r',s',t'}$ ce qui est notre première assertion. D'autre part, les points de Weierstrass de C sont définis sur la clôture séparablek^{sep} de k, donc le diviseur $\Lambda_{r,s,t}$ est rationnel sur k^{sep}, donc $\psi_{r,s,t}$ est défini sur k^{sep}. Enfin, tout élément $\sigma\in\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$ permute entre eux les trois $\overline{k}$-points T_1, T_2 et T_3 de E, donc permute entre elles les trois fibres $\varphi^*(T_1)$, $\varphi^*(T_2)$, et $\varphi^*(T_3)$. On en déduit que $\Lambda^\sigma_{r,s,t}=\Lambda_{r',s',t'}$ pour un choix convenable de $r'\in\{1,2\}$, $s'\in\{3,4\}$, et $t'\in\{5,6\}$, et donc que $\psi^\sigma_{r,s,t}=(\pi\circ\alpha_{\Lambda_{r,s,t}})^\sigma=\pi\circ\alpha_{\Lambda_{r',s',t'}}=\psi_{r',s',t'}$. Comme $\psi_{r,s,t}=\psi_{r',s',t'}$, cela implique que $\psi_{r,s,t}$ est défini sur k, et cela achève la démonstration. □

Ceci fait, on pose la définition suivante :

Définition 2.9. — On suppose que le degré de φ est pair. On définit le morphisme complémentaire ψ de φ par $\psi:=\psi_{r,s,t}$ pour un choix de $r\in\{1,2\}$, $s\in\{3,4\}$ et $t\in\{5,6\}$ (la proposition 2.8 montre que le morphisme ψ ne dépend pas de ce choix).

Théorème 2.10. — *On suppose que le degré n de φ est pair.*

Le morphisme complémentaire ψ de φ (définition 2.9) est un $k-$morphisme de C vers F qui est optimal, de degré n, qui vérifie l'égalité $\psi\circ\iota_C=-\psi$.

On a $\psi(W_1)=\psi(W_2)$, $\psi(W_3)=\psi(W_4)$, $\psi(W_5)=\psi(W_6)$ et ces trois points sont les trois points d'ordre 2 de F. Les deux morphismes φ et ψ sont deux morphismes indépendants. Enfin, le morphisme complémentaire de ψ est le morphisme φ.

Démonstration. — Le fait que ψ est défini sur k vient d'être prouvé. Les autres assertions se démontrent en recopiant les démonstrations de leurs analogues dans le cas du degré impair qui ont été prouvé plus haut (théorème 2.6). □

Terminons ce travail en établissant une propriété caractéristique du k-morphisme ψ. On aura besoin d'une remarque que l'on donne sous la forme du lemme suivant :

Lemme 2.11. — *Soit $f:C\to E$ un k-morphisme fini de la k-courbe C qui est k-hyperelliptique de genre 2 vers une k-courbe elliptique E. On suppose que $f\circ\iota_C=-f$ et que la conclusion du lemme 1.3 est valable (on vérifie sans mal que c'est toujours le cas si le degré de φ est impair, mais que ce n'est pas toujours le cas si ce degré est pair) ; on choisit les indices des points de Weierstrass de C et des points d'ordre 2 de E comme dans ce lemme 1.3. On note Λ le diviseur de degré 1 de C que l'on a utilisé pour définir le morphisme complémentaire, c'est à dire $\Lambda=(W_1)+(W_2)+(W_3)-K$ si le degré de f est impair et $\Lambda=(W_r)+(W_s)+(W_t)-K$ où $r\in\{1,2\}$, $s\in\{3,4\}$, et $t\in\{5,6\}$ si le degré de f est pair. Alors on a $f=Nf\circ\alpha$ où α désigne le morphisme d'Abel-Jacobi α_Λ.*

Démonstration. — Pour prouver l'égalité $f=Nf\circ\alpha$, il suffit de la tester sur les $\overline{k}$-points. Si le degré de f est impair et si P est un $\overline{k}$-point de C, le $\overline{k}$-point $\alpha(P)$ de $J(C)$

est représenté par le diviseur $(P)+K-(W_1)-(W_2)-(W_3)$. Comme $f\circ\iota_C=-f$ et que K est de la forme $(Q)+(\iota_C(Q))$, on en déduit que $Nf\circ\alpha_\Lambda(P)=f(P)-f(W_1)-f(W_2)-f(W_3)$. Enfin $f(W_1)$, $f(W_2)$ et $f(W_3)$ sont les trois points d'ordre 2 de E, donc la somme sur E de ces trois points est nulle, et donc on a $Nf\circ\alpha(P)=f(P)$. De même, si le degré de f est pair, le $\overline{k}$-point $\alpha(P)$ de $J(C)$ est représenté par le diviseur $(P)+K-(W_r)-(W_s)-(W_t)$, donc $Nf\circ\alpha(P)=f(P)-f(W_r)-f(W_s)-f(W_t)$. Les trois points $f(W_r)$, $f(W_s)$ et $f(W_t)$ sont les trois points d'ordre 2 de E, donc la somme sur E de ces trois points est nulle, et donc on a $N\varphi\circ\alpha(P)=\varphi(P)$. □

Théorème 2.12. — *On désigne par ψ le k-morphisme complémentaire du k-morphisme optimal φ.*

(1) *Le morphisme ψ vérifie la propriété suivante : si P est un $\overline{k}$-point de E et si on note $\varphi^*(P)=(Q_1)+\cdots+(Q_n)$ l'image réciproque par φ du $\overline{k}$-diviseur (P) de E, alors la somme $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)$ est l'origine 0_F de F.*

(2) *La propriété énoncée en 1 caractérise ψ dans le sens suivant : soit F_1 une courbe elliptique définie sur k, $\psi_1:C\to F_1$ un $k-$morphisme de degré n qui vérifie l'égalité $\psi_1\circ\iota_C=-\psi_1$ et qui, si n est pair, vérifie la condition du 2 du lemme 1.3. Si ψ_1 vérifie la propriété énoncée en 1, alors il existe un $k-$isomorphisme de variété abélienne $\xi:F\to F_1$ tel que $\psi_1=\xi\circ\psi$.*

Démonstration. — Montrons le point *1*. Soient P et P' deux $\overline{k}$-points de E et soient $\varphi^*(P)=(Q_1)+\cdots+(Q_n)$ et $\varphi^*(P')=(Q'_1)+\cdots+(Q'_n)$ les fibres de φ au dessus de P et P' ; par définition de φ°, le diviseur $(Q_1)+\cdots+(Q_n)-(Q'_1)-\cdots-(Q'_n)$ représente un $\overline{k}$-point de $J(C)$ qui est dans l'image de φ°, donc dans le noyau de π. D'autre part, si α est un morphisme d'Abel-Jacobi quelconque, $\alpha(Q_1)+\cdots+\alpha(Q_n)-\alpha(Q'_1)-\cdots-\alpha(Q'_n)$ est le $\overline{k}$-point de $J(C)$ représenté par le diviseur $(Q_1)+\cdots+(Q_n)-(Q'_1)-\cdots-(Q'_n)$, et donc $\pi\circ\alpha(Q_1)+\cdots+\pi\circ\alpha(Q_n)=\pi\circ\alpha(Q'_1)+\cdots+\pi\circ\alpha(Q'_n)$. En particulier, en prenant pour α le morphisme d'Abel-Jacobi tel que $\psi=\pi\circ\alpha$, on obtient que $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)=\psi(Q'_1)+\cdots+\psi(Q'_n)$. Cela montre que la somme $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)$ ne dépend pas du point P. Pour conclure, on va montrer que $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)=0_F$ lorsque $P=0_E$. Si n est impair, on a $\varphi^*(0_E)=(W_4)+(W_5)+(W_6)+\sum_{i=1}^{(n-3)/2}(P_i)+(\iota_C(P_i))$, et si n est pair on a $\varphi^*(0_E)=\sum_{i=1}^{(n/2}(P_i)+(\iota_C(P_i))$ où les P_i sont des $\overline{k}$-points de C ne sont pas des points de Weierstrass et dont l'image par φ est 0_E. En tenant compte du fait que $\psi\circ\iota_C=-\psi$, on en déduit $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)=\psi(W_4)+\psi(W_5)+\psi(W_6)$ si n est impair et $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)=0_F$ si n est pair. Lorsque n est impair, on a vu (proposition 2.6) que $\psi(W_4)$, $\psi(W_5)$ et $\psi(W_6)$ sont les trois points d'ordre 2 de F, donc $\psi(Q_1)+\cdots+\psi(Q_n)=\psi(W_4)+\psi(W_5)+\psi(W_6)=0_F$ et cela achève la démonstration de ce point.

Montrons le point *2*. Comme ψ_1 vérifie la propriété énoncée en *1*, le composé $N\psi_1\circ\varphi^\circ$ est le morphisme nul, donc $N\psi_1$ se factorise par le conoyau π de φ°, i.e. il existe un $k-$morphisme de $k-$variété abélienne $\xi:F\to F_1$ tel que $N\psi_1=\xi\circ\pi$.

Notons α le morphisme d'Abel-Jacobi tel que $\psi = \pi \circ \alpha$ c'est à dire que, en notant K un diviseur canonique de C, on a $\alpha = \alpha_\Lambda$ avec $\Lambda = (W_1) + (W_2) + (W_3) - K$ si le degré n de φ est impair et $\Lambda = (W_r) + (W_s) + (W_t) - K$ pour un choix de $r \in \{1,2\}$, $s \in \{3,4\}$, et $t \in \{5,6\}$ si le degré n de φ est pair. On a vu (lemme 2.11) que $\psi_1 = N\psi_1 \circ \alpha$, donc $\psi_1 = N\psi_1 \circ \alpha = \xi \circ \pi \circ \alpha = \xi \circ \psi$; comme ψ et ψ_1 sont toutes les deux de degré n, le morphisme ξ est un isomorphisme et notre proposition est prouvée. □

Références

[Bol] Bolza 0., *Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine transformation vierten Grades*, Math. Ann., **XXVIII**, (1886), p. 447-456.

[B-L-R] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M., *Neron Models*, Ergeb. Math. Grenz. **3.**, Band**21**, Springer-Verlag, (1990).

[F-K] Frey G., Kani E., *Curves of genus 2 covering elliptic curves*, Arithmetic Algebraic Geometry, Prog. in Math. **89**, Birkhauser, (1991), p. 153-175.

[G-S] Gaudry P., Schost E., *Invariants des quotients de la Jacobienne d'une courbe de genre* 2, Prépublication de l'école polytechnique, (2000).

[Bou] Bourbaki N., *Eléments de mathématiques*, Algèbre, Chap V, Hermann, Paris (1967).

[Gro] Grothendieck A., *Les schémas de Picard*, Séminaire Bourbaki 1961/1962, éxposés **232** et **236**.

[Har] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Maths. n° **52**, Springer-Verlag, (1977).

[Jac] Jacobi C.G., *Fundamenta nova theoriaefunctionum ellipticarum*, Oeuvres, **Bd 1**, Berlin (1881).

[Kra] Krazer A.,*Lehrbuch der Thetafunctionen*, Teubner, Leipzig (1903) (reédité par Chelsea, New-York (1970)).

[Kuh] Kuhn R.-M., *Curves of genus 2 with split Jacobian*, Trans. of the Amer. Math. Society, Vol. **307**, (1988), p. 41-49.

[Leg] Legendre A.-M., *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, $3^{ième}$ supplément, (1832), p. 34.

[Mum] Mumford D., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, (1965).

[R-S] Rubin K., Silverberg A., *Families of elliptic curves with constant mod. p representations*, Proceedings of the conference on elliptic curves and modular forms, Hong-Kong 1993, Cambridge University Press (1995).

[Ser] Serre J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Publication scientifique de l'Université de Nancago VII, Hermann, (1959).

[Wei] Weil A., *Courbes algébriques et variétés abéliennes*, Hermann (1971) ; réimpression, augmenté d'un poscriptum, des pubications VII et VIII de l'institut de Mathématiques de Strasbourg, Act. Sci. Ind. n° 1041 et 1064, Hermann, (1948).

PH. SATGÉ, Université de Caen, Laboratoire SDAD, CNRS FRE 2271
E-mail : satge@math.unicaen.fr
Url : http://www.math.unicaen.fr/sdad/data/personnel/satge