Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 512.54

ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ СВОБОДНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

В. А. Романьков

Аннотация: Получено необходимое и достаточное условие того, что данный набор элементов свободно порождает свободную ассоциативную алгебру. Представлены некоторые необходимые условия примитивности элемента свободной ассоциативной алгебры ранга 2.

Ключевые слова: свободная ассоциативная алгебра, эндоморфизм, автоморфизм, свободное дифференцирование, примитивный элемент, множество свободных порождающих.

Введение

Пусть $A_n = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра ранга n над произвольным полем K с множеством $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ свободных порождающих. Произвольный эндоморфизм $\psi \in \mathrm{End} A_n$ однозначно определяется своим заданием на множестве $X_n : x_i^{\psi} = u_i, i = 1, \dots, n$. Настоящая работа посвящена получению необходимых и достаточных условий для того, чтобы множество $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$ элементов алгебры A_n порождало A_n. Последнее равносильно тому, что U_n является множеством свободных порождающих алгебры A_n, или тому, что ψ является автоморфизмом алгебры A_n. Кроме того, даются некоторые необходимые условия примитивности элемента u свободной ассоциативной алгебры A_2. *Примитивным* называется такой элемент свободной ассоциативной алгебры A_n, который может быть включен в какое-нибудь ее множество свободных порождающих.

В случае $n = 2$ известно [1, 2], что множество $U_2 = \{u_1, u_2\}$ порождает алгебру $A_2 = K\langle x_1, x_2\rangle$ в том и только в том случае, если выполнено равенство $[u_1, u_2] = \alpha[x_1, x_2]$ для некоторого ненулевого скаляра $\alpha \in K$. Здесь, как обычно, $[u, v]$ означает лиев коммутатор $uv - vu$. Другой критерий приведен в [3]. В его формулировке используются понятия свободных дифференцирований Фокса алгебры A_2 и матрицы Якоби $J = J(u_1, u_2)$. Показано, что необходимого условия обратимости матрицы J над A_2 недостаточно для того, чтобы элементы u_1, u_2 порождали A_2. Множество $U_2 = \{u_1, u_2\}$ является множеством свободных порождающих алгебры A_2 тогда и только тогда, когда для некоторой матрицы J^*, составленной специальным образом из правых частных производных Фокса по элементам x_1, x_2 (якобиан строится по левым производным), произведение J^*J равно ненулевой скалярной матрице: $J^*J = \alpha E$, $\alpha \in K^*$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00489) и Минобразования РФ (код проекта Е–02–1.0–191).

В данной работе необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$ было множеством свободных порождающих алгебры $A_n = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, формулируются на языке свободных дифференцирований Фокса. Кроме обратимости матрицы Якоби в них включается условие нильпотентности действия на каждом элементе алгебры A_n (достаточно, чтобы нильпотентным было действие на элементах какого-нибудь порождающего множества алгебры A_n) определяемой специальным образом алгебры дифференцирований $D = D(U_n)$. Другими словами, действие должно быть локально нильпотентным. Необходимые условия примитивности элемента u алгебры A_2 также сформулированы на языке свободных дифференцирований Фокса с использованием понятия локально нильпотентного действия на элементах алгебры A_2.

Аналог основного результата данной работы — теорема о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы множество $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$ элементов алгебры A_n порождало A_n, точная формулировка которой приводится далее, для алгебры многочленов P_n от n коммутирующих переменных над полем характеристики нуль, известен из работы [4] (см. также известную обзорную статью [5]). Наше доказательство ориентировано на некоммутативный случай. В то же время его легко переделать в доказательство упомянутого результата. С другой стороны, доказательство из [4] не допускает прямого переноса на некоммутативный случай. Еще раз подчеркнем, что в рассматриваемом нами некоммутативном случае поле имеет произвольную характеристику.

Свободные дифференцирования Фокса

Пусть $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество свободных порождающих свободной группы F_n. Пусть KF_n — групповая алгебра группы F_n над произвольным полем K. Через $\partial/\partial x_i$, или $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, обозначим частные производные алгебры KF_n. Напомним (см., например, [6]), что частные производные однозначно определяются следующими свойствами:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{(символ Кронекера)},$$
$$\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x_i} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \alpha, \beta \in K,\ u, v \in KF_n, \tag{1}$$
$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}v^{\varepsilon} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad u, v \in KF_n,$$

где $\varepsilon : KF_n \to K$ — гомоморфизм тривиализации, отправляющий элементы группы F_n в 1.

Имеет место следующее основное тождество для дифференцирований Фокса (w — произвольный элемент KF_n):

$$\sum_{i=1,\dots,n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_i - 1) = w - w^{\varepsilon}. \tag{2}$$

Матрицей Якоби, соответствующей эндоморфизму $\psi \in \mathrm{End} KF_n$, называется матрица $J_\psi = \left(\partial x_i^{\psi}/\partial x_j\right)$.

Хорошо известна теорема Бирман [7], согласно которой эндоморфизм $\psi \in \mathrm{End} F_n$ (мы считаем, что он естественно распространен на KF_n) является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица J_ψ обратима над KF_n. По теореме Монтгомери [8] односторонняя обратимость матрицы над произвольной групповой алгеброй равносильна ее обратимости.

Отождествим свободную ассоциативную алгебру $A_n = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ над полем K с ее образом при естественном вложении в групповую алгебру KF_n. Поскольку A_n инвариантна относительно любого частного дифференцирования $\partial/\partial x_i$, последние можно считать свободными дифференцированиями Фокса алгебры A_n. Если $\psi : A_n \to A_n$ — некоторый эндоморфизм, то его матрицей Якоби, как и в групповом случае, называется матрица $J_\psi = \left(\partial x_i^\psi / \partial x_j\right)$. Заметим, что односторонняя обратимость матрицы J_ψ над A_n равносильна ее обратимости. Действительно, одностороннюю обратимость J_ψ над A_n можно считать односторонней обратимостью над KF_n, после чего достаточно воспользоваться упомянутой выше теоремой Монтгомери.

Следующее утверждение достаточно хорошо известно. Мы приводим его здесь для полноты и замкнутости изложения.

Предложение. *Если $\psi \in \operatorname{Aut} A_n$ — автоморфизм свободной ассоциативной алгебры $A_n = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ над полем K, то матрица Якоби $J_\psi = \left(\partial x_i^\psi / \partial x_j\right)$ обратима над A_n.*

Доказательство. Обозначим $u_i = x_i^\psi$, $i = 1, \dots, n$. Существуют выражения $x_i = w_i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n$, элементов множества $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ в виде слов w_i от элементов множества $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$. Дифференцируя эти выражения, получаем равенства вида

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{3}$$

что равносильно равенству матриц

$$AJ_\psi = J_\psi A = E, \tag{4}$$

где $A = (\partial w_i / \partial u_k)$, $i, k = 1, \dots, n$. Предложение доказано.

Для набора элементов $c_1, \dots, c_n \in A_n$ определим дифференцирование

$$D = D(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} c_i,$$

действующее по формуле

$$D(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} c_i. \tag{5}$$

Упростим обозначения, полагая $a_{ij} = \partial w_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$, где w_i — элементы из доказательства предложения. Определим по матрице $A = (a_{ij})$ набор дифференцирований

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Заметим, что $D_i(u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Пусть теперь известна обратимость матрицы Якоби $J_\psi A = E$, но нет информации об обратимости ψ. Элементы матрицы A по-прежнему обозначим через a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$. Производные D_i, $i = 1, \dots, n$, определим по формуле (6). В этом случае также имеют место равенства $D_i(u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

В этих условиях справедлива

Лемма. *Если для некоторых элементов $b, c \in A_n$ выполнены равенства $D_i(b) = D_i(c)$, $i = 1, \dots, n$, то $b - c \in K$.*

Доказательство. Хорошо известно и легко проверяется по формуле (2), что если для некоторого элемента $d \in A_n$ выполнены равенства $\partial d/\partial x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, то $d \in K$. Запишем равенства $D_i(b-c) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим их как систему n линейных уравнений с матрицей A от неизвестных $\partial(b-c)/\partial x_j$, $j = 1, \dots, n$. Из обратимости матрицы A следуют равенства $\partial(b-c)/\partial x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Как замечено выше, отсюда вытекает утверждение леммы.

Заметим, что эта лемма в коммутативном случае для обычных дифференцирований справедлива, только если основное поле имеет характеристику нуль.

Пусть $\varepsilon : KF_n \to K$, как и выше, обозначает гомоморфизм тривиализации. Не уменьшая общности рассуждений, мы считаем, что $u_i^\varepsilon = 0$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае при любых значениях $b_1, \dots, b_n \in A_n$

$$D_i(b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) = b_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Теорема об обратной функции

Нетрудно построить примеры, показывающие, что обратимости матрицы Якоби J_ψ недостаточно для того, чтобы $\psi \in \mathrm{End} A_n$ был автоморфизмом. Один из таких примеров приведен в [3]. Мы укажем другой

Пример 1. Пусть $u = x^2 + xy - x - 1$, $v = 2x + y - x^2 - xy - 1 \in A_2 = K\langle x, y\rangle$. Тогда при $\psi \in \mathrm{End} A_2$, $x^\psi = u$, $y^\psi = v$ имеем

$$J_\psi = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix}, \quad J_\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & 1+x \end{pmatrix}.$$

При этом $[u, v] = [y, x] + [x, yx] + [xy, y] \neq \alpha[x, y]$ для любого $\alpha \in K^*$. Согласно упомянутому во введении тесту ψ не является автоморфизмом алгебры A_2.

Заметим, что алгебра, порожденная частными дифференцированиями Фокса $\partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, обладает следующим свойством. Для любого элемента $b \in A_n$ степени t, любого монома D от производных $\partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, степени $t + 1$ получаем равенство $D(b) = 0$.

Действительно, каждое частное дифференцирование $\partial/\partial x_i$ понижает степень элемента по крайней мере на 1. Будем говорить, что алгебра дифференцирований $D = K\langle \partial/\partial x_i,\ i = 1, \dots, n\rangle$ *действует локально нильпотентно.*

Если элементы $u_i = x_i^\psi$, $i = 1, \dots, n$, $\psi \in \mathrm{End} A_n$, порождают алгебру $A_n = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, то дифференцирования D_i, $i = 1, \dots, n$, определенные выше, также являются частными дифференцированиями относительно этих элементов. Поэтому порожденная ими алгебра $K\langle D_1, \dots, D_n\rangle$ действует локально нильпотентно на A_n.

Теорема. *Пусть $A_n = K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра ранга n над произвольным полем K. Тогда $\psi \in \mathrm{End} A_n$ является автоморфизмом, т. е. $\psi \in \mathrm{Aut}\, A_n$, в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

1) *матрица Якоби $J_\psi = \left(\partial x_i^\psi/\partial x_j\right)$ обратима над $A_n : J_\psi A = E$;*

2) *алгебра дифференцирований $D = K\langle D_1, \dots, D_n\rangle$, где D_i, $i = 1, \dots, n$, определены по матрице $A = (a_{ij})$ формулой (6), действует локально нильпотентно на алгебре A_n.*

Доказательство. Необходимость условий 1, 2 объяснена выше. Докажем их достаточность.

Считаем, что элемент $b \in A_n$ имеет высоту 0 относительно D, если $D_i(b) = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. По лемме это равносильно тому, что $b \in K$.

Считаем, что элемент $b \in A_n$ имеет высоту k, если он не имеет высоты $\leq k-1$ и любой моном M от $D_1, \dots, D_n$ степени $k+1$ аннулирует $b : M(b) = 0$. По условию 2 теоремы любой элемент $b \in A_n$ имеет конечную высоту.

Заметим, что для любого $b \in A_n$, любого D_i высота элемента $D_i(b)$ строго меньше, чем высота элемента b. Допустим, что мы уже установили принадлежность любого элемента $c \in A_n$ высоты $\leq k$ подалгебре, порожденной элементами $u_i = x_i^{\psi}$, $i = 1, \dots n$. Докажем, что любой элемент b высоты $k+1$ также принадлежит этой подалгебре. Для этого рассмотрим элемент

$$b' = b - D_1(b)u_1 - \dots - D_n(b)u_n. \tag{8}$$

Не уменьшая общности рассуждений, считаем, что $u_i^{\varepsilon} = 0$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае для любого j

$$D_j(b') = D_j(b) - D_j(b) = 0. \tag{9}$$

По лемме отсюда следует, что $b' \in K$. Используя индуктивное предположение для $D_1(b), \dots, D_n(b)$, получаем требуемое включение b в $K\langle u_1, \dots, u_n\rangle$.

По свойствам дифференцирований Фокса в условии 2 теоремы достаточно требовать нильпотентности действия на порождающие элементы $x_1, \dots, x_n$ алгебры A_n.

Критерий примитивности элемента алгебры A_2

Согласно упомянутому во введении критерию элемент $u \in A_2$ является примитивным тогда и только тогда, когда найдется такой элемент $v \in A_2$, что $[u, v] = \alpha[x, y]$ для ненулевого скаляра $\alpha \in K$. Здесь x, y — фиксированные свободные порождающие алгебры A_2. Очевидно, что в этом случае можно считать $\alpha = 1$. Запишем это необходимое и достаточное условие примитивности элемента u подробно:

$$uv - vu = xy - yx. \tag{10}$$

Не уменьшая общности рассуждений, мы предполагаем, что $u^{\varepsilon} = v^{\varepsilon} = 0$. Это достигается добавлением к элементам u, v необходимых констант.

В предположении существования элемента v существуют частные производные $D_u = \partial/\partial u$, $D_v = \partial/\partial v$. Продифференцируем равенство (10) по v:

$$u = (x-1)\frac{\partial y}{\partial v} + (1-y)\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{11}$$

Наряду с левыми частными производными $\partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, определимы правые частные производные $\delta/\delta x_i$, $i = 1, \dots, n$, для которых первые два свойства из (1) те же самые, а третье выглядит как

$$\frac{\delta(uv)}{\delta x_i} = u^{\varepsilon}\frac{\delta v}{\delta x_i} + \frac{\delta u}{\delta x_i}v, \quad u, v \in KF_n. \tag{12}$$

Основное тождество в этом случае выглядит так:

$$\sum_{i=1,\dots,n}(x_i - 1)\frac{\delta w}{\delta x_i} = w - w^{\varepsilon}. \tag{13}$$

Возвращаемся к рассматриваемому случаю. Сравнив равенство (11) с основным тождеством (13), заключаем, что

$$D_v(y) = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad D_v(x) = -\frac{\delta u}{\delta y}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что дифференцирование D_v однозначно определимо через элемент u :

$$D_v = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta u}{\delta x}. \tag{15}$$

Сформулируем необходимые условия примитивности элемента u.

1. Унимодулярность вектора $\partial u = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$.

2. Выполнение равенства

$$D_v(u) = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta u}{\delta x} = 0. \tag{16}$$

3. Нильпотентность действия дифференцирования D_v, определенного в (15), на порождающих элементах x, y.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 2. Элемент $u = x + xy = x(1 + y)$, очевидно, не является примитивным, так как принадлежит квадрату подалгебры без свободных членов от порождающих $x, 1 + y$. Тем не менее вектор $\partial u = (2, x)$ унимодулярен.

Пример 3. Элемент $u = x + x^2 + yx$ с унимодулярным вектором $\partial u = (2 + x + y, 1)$ не является примитивным, так как

$$D_v(u) = -(2 + x + y)x + 3 + x \neq 0.$$

Пример 4. Для элемента $u = x+xyx$ выполнены как условие унимодулярности вектора $\partial u = (2+xy, x)$, так и равенство $D_v(u) = -(2+xy)x+x(2+yx) = 0$, однако из того, что $D_v(x) = -x$, легко следует, что дифференцирование D_v не действует на элемент x нильпотентным образом. Значит, элемент u не примитивен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of free algebras of rank two. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 171. P. 309–315.
2. *Dicks W.* A commutator test for two elements to generate the free algebra of rank two // Bull. London Math. Soc. 1982. V. 15. P. 48–51.
3. *Shpilrain V., Yu J.-T.* On generators of polynomial algebras in two commuting or non-commuting variables // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 132. P. 309–315.
4. *Wright D.* On the Jacobian conjecture // Illinois J. Math. 1981. V. 25. P. 423–440.
5. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. P. 287–330.
6. *Кроуэлл Р., Фокс Р.* Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
7. *Birman J. S.* An inverse function theorem for free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 41. P. 634–638.
8. *Montgomery M. S.* Left and right inverses in group algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 539–540.

Статья поступила 13 января 2004 г.

Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
romankov@math.omsu.omskreg.ru