Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 512.554

КОРНЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕРНАРНОЙ АЛГЕБРЫ МАЛЬЦЕВА M_8

А. П. Пожидаев

Аннотация: Строится корневое разложение простой восьмимерной тернарной алгебры Мальцева M_8. Как следствие на M_8 вводится структура Z_3-градуированной тернарной алгебры.

Ключевые слова: тернарная алгебра Мальцева, алгебра Филиппова, n-лиева алгебра, композиционная алгебра, Z_3-градуированная алгебра, корневое разложение.

n-Арные алгебры Мальцева были определены в [1] как некоторый естественный класс n-арных алгебр, содержащий класс n-арных алгебр векторного произведения [2]. Напомним, что единственно возможными n-арными алгебрами векторного произведения при $n = 2$ являются простая трехмерная алгебра Ли $sl(2)$ и простая семимерная алгебра Мальцева C_7, а при $n \geq 3$ — простые $(n+1)$-мерные n-лиевы алгебры, представляющие собой аналоги $sl(2)$, и также некоторые исключительные тернарные алгебры, возникающие на композиционных алгебрах. Заметим, что n-лиевы алгебры, в свою очередь, являются естественным обобщением алгебр Ли на случай n-арной операции умножения [3] и в настоящее время называются *алгебрами Филиппова*.

В [1] было доказано, что вышеупомянутые тернарные алгебры, возникающие на композиционных алгебрах, будут тернарными центральными простыми алгебрами Мальцева, не являющимися алгебрами Филиппова, если характеристика основного поля отлична от 2 и 3.

Класс n-арных алгебр Мальцева обладает также двумя следующими интересными свойствами:

1) он представляет собой расширение класса алгебр Филиппова, т. е. любая n-арная алгебра Филиппова является n-арной алгеброй Мальцева (обобщается тот факт, что любая алгебра Ли будет алгеброй Мальцева);

2) фиксируя произвольный элемент в умножении, т. е. определяя новую операцию на векторном пространстве n-арной алгебры Мальцева по правилу $[x_1, \dots, x_{n-1}]_a = [a, x_1, \dots, x_{n-1}]$, вновь получаем $(n-1)$-арную алгебру Мальцева.

К настоящему времени единственным известным примером простой n-арной алгебры Мальцева, не являющейся алгеброй Филиппова, служит вышеупомянутая простая тернарная алгебра Мальцева M_8, возникающая на 8-мерной композиционной алгебре. В [4] детально описана алгебра дифференцирований алгебры M_8.

Работа поддержана Фондом содействия отечественной науке и частично Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00230).

В данной статье продолжается исследование свойств алгебры M_8. Строится ее корневое разложение и, как следствие, на M_8 вводится структура Z_3-градуированной тернарной алгебры. Эти результаты могут быть использованы при классификации конечномерных неприводимых представлений данной тернарной алгебры M_8.

Напомним некоторые определения. Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Ω-*алгеброй* над Φ называется унитальный модуль над Φ, на котором определена система полилинейных алгебраических операций $\Omega = \{\omega_i : |\omega_i| = n_i \in N, i \in I\}$, где $|\omega_i|$ обозначает арность операции ω_i. Ради краткости Ω-алгебру мы порой называем просто *алгеброй.*

n-Арной алгеброй Филиппова ($n \geq 3$) (*n-лиевой алгеброй*) называется Ω-алгебра L с одной n-арной операцией $[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$[x_1, \dots, x_n] = \operatorname{sgn}(\sigma)[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}], \tag{1}$$

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n] \tag{2}$$

для произвольной подстановки σ из симметрической группы S_n. Соотношение (1) называется *тождеством антикоммутативности*, а (2) — *обобщенным тождеством Якоби* (или *тождеством Филиппова*).

n-Арным якобианом мы называем следующую функцию, определенную на n-арной алгебре:

$$J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = [[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] - \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Из определения следует, что если A — n-арная алгебра Филиппова, то

$$J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = 0$$

для всех $x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n \in A$.

n-Арной алгеброй Мальцева ($n \geq 3$) мы называем Ω-алгебру L с одной антикоммутативной n-арной операцией $[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$\sum_{i=2}^{n} [[z, x_2, \dots, x_n], x_2, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n] + \sum_{i=2}^{n} [[z, x_2, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n], x_2, \dots, x_n]$$
$$= [[[z, x_2, \dots, x_n], x_2, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] - [[[z, y_2, \dots, y_n], x_2, \dots, x_n], x_2, \dots, x_n]. \tag{3}$$

В терминах операторов правого умножения это тождество может быть записано в виде

$$R_x \left(\sum_{i=2}^{n} R_{x_2, \dots, x_i R_y, \dots, x_n} \right) + \left(\sum_{i=2}^{n} R_{x_2, \dots, x_i R_y, \dots, x_n} \right) R_x = R_x^2 R_y - R_y R_x^2,$$

где $R_x = R_{x_2, \dots, x_n}$ и $R_y = R_{y_2, \dots, y_n}$ — операторы правого умножения: $zR_x = [z, x_2, \dots, x_n]$. Заметим также, что мы можем переписать (3) как

$$-J(zR_x, x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = J(z, x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) R_x.$$

Далее предполагаем, что Φ — поле характеристики, отличной от $2, 3$, и обозначаем через A композиционную алгебру над Φ с инволюцией $^- : a \mapsto \bar{a}$ и единицей 1 (см., например, [5]). Симметрическую билинейную форму $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$, определенную на A, предполагаем невырожденной и через $n(a)$ обозначаем норму элемента $a \in A$: $n(a) = \langle a, a\rangle$. Определим на A тернарную операцию умножения $[\cdot,\cdot,\cdot]$ правилом

$$[x, y, z] = x\bar{y}z - \langle y, z\rangle x + \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z.$$

(Здесь и всюду далее при отсутствии расстановки скобок расстановка предполагается левонормированной, т. е. $a_1a_2a_3 \dots a_n = (\dots((a_1a_2)a_3)\dots)a_n$.) Тогда A становится тернарной алгеброй Мальцева (см. [1]), которая обозначается через $M(A)$, а если $\dim A = 8$, то через M_8.

Пусть L — конечномерная n-арная алгебра Мальцева. Назовем оператор правого умножения $R_{x,y}$ *регулярным*, если в фиттинговом разложении $L = L_0 \oplus L_1$ относительно $R_{x,y}$ размерность L_0 минимальна. В этом случае назовем L_0 *подпространством Картана* алгебры L.

Напомним, что поле Φ называется *совершенным*, если для любого $\alpha \in \Phi$ существует $\sqrt{\alpha} \in \Phi$ такой, что $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Далее предполагаем, что основное поле является совершенным. Через $\langle w_\upsilon; \upsilon \in \Upsilon\rangle_\Phi$ обозначаем векторное пространство над Φ, порожденное векторами $\{w_\upsilon; \upsilon \in \Upsilon\}$.

Лемма 1. *Пусть $x, y \in M_8$. Тогда оператор $R_{x,y}$ является регулярным тогда и только тогда, когда $n_xn_y \neq (x, y)^2$.*

Доказательство. Предположим, что $R_{x,y}$ не является регулярным. Тогда существует $z \in M_8$ такой, что $\dim\langle x, y, z\rangle_\Phi = 3$ и $zR_{x,y} = 0$. Поскольку

$$zR_{x,y} = xR_{y,z} = x\bar{y}z - (y, z)x + (x, z)y - (x, y)z,$$

то $(x\bar{y} - (x, y))z = (y, z)x - (x, z)y$. Если $n_{x\bar{y}-(x,y)} \neq 0$, то $z \in \langle x, y\rangle_\Phi$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, $n_{x\bar{y}-(x,y)} = n_xn_y - (x, y)^2 = 0$.

Обратно, предположим, что $n_xn_y = (x, y)^2$ (заметим, что в этом случае $n_{x'}n_y = (x', y)^2$ для любого $x' = \alpha x + \beta y$).

Рассмотрим следующий случай: $1 \notin \langle x, y\rangle_\Phi$.

Пусть $n_x = n_y = 0$ и $(x, y) = 0$. Если $xy = 0$, то $1R_{x,y} = -xR_{1,y} \in \langle x, y\rangle_\Phi$ и оператор $R_{x,y}$ нильпотентен на $\langle 1, x, y\rangle_\Phi$. Если $xy \neq 0$ и $xy = \alpha x + \beta y$, то $\alpha x\bar{y} = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то

$$y = \gamma + y', \quad \gamma \neq 0, \quad \bar{y} = \gamma - y', \quad x\gamma = xy' \text{ и } xy = 2\gamma x.$$

Следовательно, $1R_{x,y} \in \langle x, y\rangle_\Phi$, и $R_{x,y}$ нильпотентен на $\langle 1, x, y\rangle_\Phi$. Если $xy \neq 0$ и $xy \notin \langle x, y\rangle_\Phi$, то $xyR_{x,y} = 0$.

Пусть $n_x = 0$, $n_y \neq 0$ и $(x, y) = 0$. Заметим, что $xy \neq 0$. Действительно, в противном случае $xR_{1,y} \in \langle x, y\rangle_\Phi$, и $R_{x,y}$ нильпотентен на $\langle 1, x, y\rangle_\Phi$. Если $xy = \alpha x + \beta y$, то снова $1R_{x,y} \in \langle x, y\rangle_\Phi$. Таким образом, $xy \notin \langle x, y\rangle_\Phi$, $xyR_{x,y} \in \langle x, y\rangle_\Phi$, и $R_{x,y}$ нильпотентен на $\langle x, y, xy\rangle_\Phi$.

Если $n_x \neq 0$ и $n_y \neq 0$, то, беря $x + \alpha y$ вместо x для некоторого α, приходим к случаю, рассмотренному выше.

Изучим случай $1 \in \langle x, y\rangle_\Phi$.

В этом случае мы можем предположить, что $R = R_{1,x}$, где $n_x = 0$ и $(1, x) = 0$. Тогда существует z такой, что $zx \in \langle x\rangle_\Phi$ и $y \notin \langle 1, x\rangle_\Phi$. Следовательно, $zR_{1,x} \in \langle 1, x\rangle_\Phi$, и $R_{1,x}$ нильпотентен на $\langle 1, x, z\rangle_\Phi$.

Лемма доказана.

Далее будем обозначать M_8 через M.

Теорема 1. *Пусть $R_{x,y}$ — регулярный оператор и $M = M_0 \oplus M_1$ — разложение Фиттинга пространства M относительно преобразования $R_{x,y}$. Тогда M_0 является двумерной абелевой подалгеброй алгебры M и мы имеем следующее корневое разложение алгебры M:*

$$M = M_0 \oplus M_\alpha \oplus M_{-\alpha},$$

где $\alpha \in \Phi$ такой, что $vR_{x,y} = \pm\alpha v$ для любого $v \in M_{\pm\alpha}$.

Доказательство. Пусть $R_{x,y}$ — регулярный оператор, где $1 \notin \langle x, y\rangle_\Phi$. Мы можем предполагать, что $n_x = n_y = 1$ и $(x, y) = 0$. Пусть $z \in \langle 1, x, y, xy\rangle_\Phi^\perp$ и $n_z \neq 0$. Тогда

$$M = M_0 \oplus M_i \oplus M_{-i},$$

где

$$M_0 = \langle x, y\rangle_\Phi, \quad M_{\pm i} = \langle 1 \pm ixy, z \pm ixyz, yz \pm ixz\rangle_\Phi.$$

Пусть снова $R = R_{x,y}$ — регулярный оператор, но $1 \in \langle x, y\rangle_\Phi$. Мы можем предполагать, что $R = R_{1,x}$, где $n_x = 1$ и $(1, x) = 0$. Пусть $y \in \langle 1, x\rangle_\Phi^\perp$, $n_y \neq 0$, $z \in \langle 1, x, y, xy\rangle_\Phi^\perp$ и $n_z \neq 0$. Тогда

$$M = M_0 \oplus M_i \oplus M_{-i},$$

где

$$M_0 = \langle 1, x\rangle_\Phi, \quad M_{\pm i} = \langle y \pm ixy, z \pm ixz, xyz \pm iyz\rangle_\Phi.$$

Пусть $R = R_{1+x,y}$ — регулярный оператор, $(1, x) = (1, y) = 0$ и $n_y = 0$. Мы можем предполагать, что $n_x = 0$ и $(x, y) = 1$. Тогда

$$(1 - y)R = -(1 + xy) \text{ и } (1 + xy)R = -(1 - y).$$

Пусть $V = \langle 1, x, y, xy\rangle_\Phi$. Легко видеть, что $\dim V = 4$. Пусть $Z = V^\perp$ и $z_1 \in Z$. Если $z_1 y = 0$, то $z_1 \in M_1$ (если $z_1 y \neq 0$, то $z_1 yy = 0$), $z_1 xy = -2z_1$ и $z_1 x \neq 0$. Ясно, что z_1 и $z_1(1 + x)$ линейно независимы по модулю V и $z_1(1 + x) \in M_{-1}$. Выберем $z_2 \in Z$ так, что $z_2 \notin \langle z_1, z_1(1+x)\rangle_\Phi$. Если $z_2 y = 0$, то $z_2 \in M_1$ и $z_2 x \neq 0$. Предположим, что $z_2(1 + x) \in \langle z_1, z_1(1 + x), z_2\rangle_\Phi \oplus V$. Действуя операторами $(\cdot, x), (\cdot, y), (\cdot, xy), (\cdot, 1)$ и умножением на x, приходим к заключению, что $(z_2 - \alpha z_1)x = 0$, которое противоречит тому факту, что $(z_2 - \alpha z_1)y = 0$. Если $z_2 y \neq 0$, то мы можем рассмотреть $z_2 y$ вместо z_2. Если $z_2 y \in \langle z_1, z_1(1 + x)\rangle_\Phi \oplus V$, то, как и выше, получим $z_2 y = \alpha_1 z_1$. Возьмем z_3 вместо z_2 (с теми же свойствами). Тогда $z_3 y = \alpha_2 z_1$ и элемент $\alpha_2 z_2 - \alpha_1 z_3$ является искомым. Таким образом, $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_{-1}$, где $M_0 = \langle 1 + x, y\rangle_\Phi$, $M_1 = \langle y + xy, z_1, z_2\rangle_\Phi$, $M_{-1} = \langle 2 - y + xy, z_1(1 + x), z_2(1 + x)\rangle_\Phi$.

Пусть $R = R_{1+x,y}$ — регулярный оператор, $(1, x) = (1, y) = 0$ и $n_y \neq 0$. Мы можем предполагать, что $n_y = 1$, $n_{1+x} = \alpha \neq 0$ и $(x, y) = 0$. Пусть $a = 1 - \alpha^{-1}(1 + x)$ и $b = xy$. Тогда

$$aR = -b, \quad bR = \alpha a \quad \text{и} \quad b \pm i\sqrt{\alpha}a \in M_{\mp i\sqrt{\alpha}}.$$

Пусть $U = \langle 1, x, y, xy\rangle_\Phi^\perp$ и $z \in U$ является собственным вектором для оператора R. Тогда

$$zR_{1+x,y} = z(1 - x)y = zy - zxy = \beta z$$

для некоторого $\beta \in \Phi^*$. Поскольку $zxy = -z(xy)$, это эквивалентно тому, что $z(-\beta + y + xy) = 0$. Из последнего равенства получаем

$$n_{-\beta+y+xy} = \beta^2 + 1 + n_x = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \pm i\sqrt{\alpha}.$$

Обратно, если элемент $z \in U$ удовлетворяет условию $z(-\beta + y + xy) = 0$ для некоторого $\beta \in \Phi^*$, то $z \in M_\beta$. Далее, покажем, что возможно выбрать такие линейно независимые $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$, что $u_1, u_2 \in M_{i\sqrt{\alpha}}$ и $u_3, u_4 \in M_{-i\sqrt{\alpha}}$. Пусть $v_\alpha = -i\sqrt{\alpha} + y + xy$. Возьмем $u_1 \in U$ такой, что $u_1 v_\alpha = 0$. Выберем такой $u_2 \in U$, что $u_2 \notin \langle u_1 \rangle_\Phi$. Если $u_2 v_\alpha = 0$, то мы нашли искомые элементы u_1 и u_2. Если $u_2 v_\alpha \neq 0$ и $u_2 v_\alpha \notin \langle u_1 \rangle_\Phi \oplus V$, то мы можем взять $u_2 v_\alpha$ вместо u_2. Если $u_2 v_\alpha \neq 0$ и $u_2 v_\alpha \in \langle u_1 \rangle_\Phi \oplus V$, то легко видеть, что $u_2 v_\alpha = \gamma_1 u_1$. Рассмотрим элемент $u_3 \in U$ такой, что $u_3 \notin \langle u_1, u_2 \rangle_\Phi$. Если $u_3 v_\alpha = 0$, то мы можем взять u_3 вместо u_2. Если $u_3 v_\alpha \neq 0$ и $u_3 v_\alpha \in \langle u_1 \rangle_\Phi \oplus V$, то легко видеть, что $u_3 v_\alpha = \gamma_2 u_1$. Таким образом, мы можем рассмотреть $\gamma_2 u_2 - \gamma_1 u_3$ вместо u_2. Возможно применить аналогичную процедуру для нахождения элементов u_3 и u_4. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{4} \gamma_i u_i = 0$. Поскольку

$$u_k(y + xy) = i\sqrt{\alpha} u_k, \ k = 1, 2, \quad \text{и} \quad u_k(y + xy) = -i\sqrt{\alpha} u_k, \ k = 3, 4,$$

то либо u_1 и u_2 линейно зависимы, либо u_3 и u_4 линейно зависимы, что невозможно. Таким образом,

$$M = M_0 \oplus M_{i\sqrt{\alpha}} \oplus M_{-i\sqrt{\alpha}},$$

где

$$M_0 = \langle 1 + x, y \rangle_\Phi, \quad M_{i\sqrt{\alpha}} = \langle xy - i\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\alpha}\alpha^{-1}(1 + x), u_1, u_2 \rangle_\Phi,$$

$$M_{-i\sqrt{\alpha}} = \langle xy + i\sqrt{\alpha} - i\sqrt{\alpha}\alpha^{-1}(1 + x), u_3, u_4 \rangle_\Phi.$$

Теорема доказана.

Замечание. В соответствии с доказательством для любого регулярного оператора R теорема явно дает корневое разложение алгебры M_8 относительно R.

Лемма 2. *Пусть* $V = \langle 1, x, y, xy \rangle_\Phi$, $U = V^\perp$ *и* $M_\pm = M_{\pm\alpha} \cap U$. *Тогда*
1) $(M_\pm M_\pm, M_\mp) = 0$;
2) $M_\pm M_\pm \subseteq \langle \alpha x \pm n_x y \mp xy \rangle_\Phi$;
3) $M_+ M_- \subseteq \langle -\alpha + y + xy \rangle_\Phi$;
4) $M_+ M_+ + M_+ M_- + M_- M_- \subseteq V$.

Доказательство. 1. Пусть $v = (u_1 u_2, u_3)$, где $u_1, u_2 \in M_\pm$, $u_3 \in M_\mp$. Поскольку $\pm\alpha u_2 = u_2(y + xy)$, имеем

$$\begin{aligned} \pm \alpha v &= (u_1(u_2(y + xy)), u_3) = (u_1((\overline{y + xy}) u_2), u_3) = -((y + xy)(\overline{u}_1 u_2), u_3) \\ &= -(u_1 u_2, (y + xy) u_3) = (u_1 u_2, u_3(y + xy)) = \mp\alpha(u_1 u_2, u_3). \end{aligned}$$

2. Из п. 1 следует, что $u_1 u_2 \in V$. Значит, $u_1 u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$. Применяя $(\cdot, 1), (\cdot, x), (\cdot, y), (\cdot, xy)$ и используя равенство $u_i(\mp\alpha + y + xy) = 0$, получаем требуемое включение.

3. Доказательство аналогично доказательству п. 2.

4. Легко следует из пп. 1, 2 и 3.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Обозначим* $M_{\pm\alpha}$ *через* $M_{\pm 1}$. *Тогда*

$$[M_i, M_j, M_k] \subseteq M_{i+j+k},$$

где сумма $i+j+k$ берется по модулю 3.

Доказательство. Рассмотрим разложение относительно регулярного оператора $R = R_{1+x,y}$, где

$$(1,x) = (1,y) = 0, \quad n_y = 1, \quad n_{1+x} = \kappa \neq 0 \quad \text{и} \quad (x,y) = 0.$$

Пусть $\alpha = i\sqrt{\kappa}$.

Во-первых, докажем включение $[M_0, M_{\pm 1}, M_{\pm 1}] \subseteq M_{\mp 1}$. Для этого покажем, что $W = [M_0, \pm n_x \mp x + \alpha xy, M_{\pm 1}] \subseteq M_{\mp 1}$. Пусть $w \in W$. Тогда $w = [\pm n_x \mp x + \alpha xy, \beta + \beta x + \gamma y, u]$, где $u(\mp\alpha + y + xy) = 0$, $u \in M_{\pm 1}$. Поэтому включение $w \in V^{\perp}$ следует из того, что

$$w = [(\pm n_x \mp x + \alpha xy)(\beta - \beta x - \gamma y)]u = (\pm\beta\alpha + \gamma)(\alpha x \mp n_x y \pm xy)u. \tag{4}$$

Имеем следующий критерий:

$$v \in M_{\mp\alpha} \iff v(\pm\alpha + y + xy) = 0. \tag{5}$$

Легко видеть, что $w(\pm\alpha+y+xy) = 0$, т. е. $w \in M_{\mp\alpha}$. Включение $[M_0, M_{\pm 1}, M_{\pm 1}] \subseteq M_{\mp 1}$ легко вытекает из предыдущего заключения и леммы 2.

Используя п. 2 леммы 2, приходим к включению $[M_{\pm 1}, M_{\pm 1}, M_{\pm 1}] \subseteq M_0$.

Используя п. 3 леммы 2, (4) и стандартные вычисления, получаем включение $[M_0, M_1, M_{-1}] \subseteq M_0$.

Далее, покажем, что $[M_1, M_1, M_{-1}] \subseteq M_1$.

1. Пусть $u_1, u_2 \in M_+$, $u \in M_{-1}$. Имеем $[u_1, u_2, u] \subseteq \langle (u_1u_2)u \rangle_\Phi + M_1$. По п. 2 леммы 2 $\langle (u_1u_2)u \rangle_\Phi \subseteq \langle (\alpha x + n_x y - xy)u \rangle_\Phi$. Используя прямые вычисления (и (5), если $u \in M_-$), получаем требуемое включение.

2. Пусть $u_\pm \in M_\pm$. Тогда $[n_x - x + \alpha xy, u_+, u_-] \subseteq \langle (u_+u_-)(n_x - x + \alpha xy) \rangle_\Phi + M_1$ и осталось только применить п. 3 леммы 2.

3. Имеет место включение $[n_x - x + \alpha xy, u_+, n_x - x - \alpha xy] \subseteq \langle (-\alpha + y + xy)u_+ \rangle_\Phi$, и достаточно применить (5).

Случай $[M_1, M_{-1}, M_{-1}] \subseteq M_1$ анализируется аналогично.

Что касается оставшихся регулярных элементов, то мы можем применить к ним аналогичные соображения. Лемма доказана.

Как следствие отсюда вытекает

Теорема 2. *На тернарной алгебре Мальцева M_8 существует нетривиальная структура Z_3-градуированной тернарной алгебры.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пожидаев А. П.* n-Арные алгебры Мальцева // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 3. С. 309–329.
2. *Brown R. B., Gray A.* Vector cross products // Comment. Math. Helv. 1967. V. 42. P. 222–236.
3. *Филиппов В. Т.* n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
4. *Pojidaev A. P., Saraiva P.* On derivations of the ternary Malcev algebra M_8 // Comm. Algebra. (To appear).
5. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 30 декабря 2004 г.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru