Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 519.21

ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОПАДАНИЯ В ИНТЕРВАЛ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЛОКАЛЬНО–СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В. В. Шнеер

Аннотация: Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные значения, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Пусть $\Delta = (0, T]$ и $x + \Delta = (x, x + T]$. Изучаются отношения вероятностей $\mathbf{P}(S_n \in x + \Delta)/\mathbf{P}(\xi_1 \in x + \Delta)$ при всех n и x. Равномерные по x оценки для таких отношений известны в классе так называемых Δ-субэкспоненциальных распределений. В данной работе эти оценки уточняются для двух подклассов Δ-субэкспоненциальных распределений, один из которых является обобщением известного класса $\mathscr{S}\mathscr{C}$ на случай интервала $(0, T]$ с произвольным $T \le \infty$. Приводится также характеризация класса $\mathscr{S}\mathscr{C}$.

Ключевые слова: субэкспоненциальное распределение, локально-субэкспоненциальное распределение, суммы случайных величин, оценки для вероятностей попадания в интервал.

§ 1. Введение

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих неотрицательные значения и имеющих распределение F. Будем обозначать через $F(x+\Delta)$ вероятность $\mathbf{P}(\xi_1 \in x+\Delta)$, где Δ — интервал вида $(0, T]$ при некотором $0 < T \le \infty$ и $x + \Delta = (x, x + T]$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, и пусть F^{*n} — распределение S_n. Мы изучаем равномерные по x оценки для отношений

$$\frac{F^{*n}(x + \Delta)}{F(x + \Delta)} \equiv \frac{\mathbf{P}(S_n \in x + \Delta)}{\mathbf{P}(\xi_1 \in x + \Delta)}. \tag{1}$$

Заметим, что в случае $T = \infty$ отношение (1) имеет вид $\frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{\mathbf{P}(\xi_1 > x)}$. Будем обозначать через $\overline{G}(x)$ «хвост» произвольного распределения G, т. е. $\overline{G}(x) = G((x, \infty))$. В таких обозначениях $\overline{F}(x) = \mathbf{P}(\xi_1 > x)$ и $\overline{F^{*n}}(x) = \mathbf{P}(S_n > x)$. В случае $T = \infty$ известно (см., например, [1]), что если распределение F субэкспоненциально (т. е. если $\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ и $\overline{F}(x) > 0$ для всех x), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K = K(\varepsilon)$ такое, что

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K(1 + \varepsilon)^n \tag{2}$$

для любого n. Известны также другие верхние оценки для $\overline{F^{*n}}(x)$, содержащие и не содержащие зависимость от x (см. введение в [2]).

Из (2) следует (см., например, [1]), что если распределение F субэкспоненциально и τ — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и такая, что $\mathbf{E}(1+\varepsilon)^{\tau} < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\tau}}(x)}{\overline{F}(x)} = \mathbf{E}\tau. \tag{3}$$

В статье [3] рассматриваются так называемые Δ-субэкспоненциальные распределения — обобщение понятия субэкспоненциальности на случай произвольного (не обязательно бесконечного) интервала Δ вида $(0,T]$. Определение Δ-субэкспоненциального распределения (см. определение 2 в § 2) в случае $T=\infty$ совпадает с определением субэкспоненциального распределения. В [3] показано, что все основные свойства субэкспоненциальных распределений могут быть обобщены на случай произвольного конечного интервала Δ. В частности, если распределение F является Δ-субэкспоненциальным, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_0 = x_0(\varepsilon)$ и $K = K(\varepsilon)$ такие, что

$$\sup_{x>x_0} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le K(1+\varepsilon)^n \tag{4}$$

при всех n. Из (4) следует (см. [3, теорема 2]), что если распределение F является Δ-субэкспоненциальным и τ — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и такая, что $\mathbf{E}(1+\varepsilon)^{\tau} < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F^{*\tau}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} = \mathbf{E}\tau. \tag{5}$$

В статье [4] асимптотика для $F^{*n}(x+\Delta)$ найдена в случае, когда функция $F(x+\Delta)$ является правильно меняющейся на бесконечности, а x находится в зоне больших уклонений для S_n.

В [2] рассмотрены два подкласса класса субэкспоненциальных распределений: (а) распределения, являющиеся одновременно распределениями с длинным хвостом (принадлежащими классу $\mathscr{L}$, см. определение 1 в § 2 в случае $T=\infty$) и надстепенными (принадлежащими классу $\mathscr{D}$, см. определение 3 в § 2 в случае $T=\infty$), а также (б) распределения из класса $\mathscr{SC}$ (см. определение 4 в § 2 в случае $T=\infty$). Для каждого из этих классов распределений приведены равномерные по x оценки для отношений $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}$, уточняющие (2). Из полученных оценок следует, в частности, что соотношение (3) для этих классов остается верным при более слабых ограничениях на τ, чем существование экспоненциального момента.

В настоящей работе рассматриваются обобщения классов распределений $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$ и $\mathscr{SC}$ на случай произвольного $T>0$. Другими словами, мы вводим два класса распределений $\mathscr{L}_\Delta\cap\mathscr{D}_\Delta$ и $\mathscr{SC}_\Delta$, которые являются подклассами класса $\mathscr{S}_\Delta$ (для класса $\mathscr{L}_\Delta\cap\mathscr{D}_\Delta$ это следует из леммы 12 статьи [3], для класса $\mathscr{SC}_\Delta$ — из замечания 7 данной работы). В случае $T=\infty$ эти новые классы совпадают с классами $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$ и $\mathscr{SC}$ соответственно. В § 2 для этих классов распределений приводятся равномерные по x оценки для отношений (1), уточняющие (4). Результаты данной работы для класса $\mathscr{SC}_\Delta$ в случае $T=\infty$ уточняют результаты [2]. Из полученных оценок следует, в частности, что соотношение (5) для этих классов остается верным при более слабых ограничениях на τ, чем существование экспоненциального момента.

В п. 2.2 приводятся условия, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы распределение принадлежало классу $\mathscr{S}\mathscr{C}_\Delta$ при произвольном T и, в частности, классу $\mathscr{S}\mathscr{C}$. Доказательства основных утверждений приведены в § 3.

§ 2. Определения и результаты

Определение 1. Распределение F на $\mathbb{R}_+$ *принадлежит классу* $\mathscr{L}_\Delta$, если $F(x+\Delta) > 0$ для всех достаточно больших x и

$$\frac{F(x+t+\Delta)}{F(x+\Delta)} \to 1 \quad \text{при } x \to \infty \tag{6}$$

для всех $t \in [0,1]$.

Замечание 1. Класс $\mathscr{L}_\Delta$ введен в [3]. Заметим, что из определения 1 следует сходимость в (6) на всех компактных t-множествах из $(0,\infty)$. Действительно, определение 1 влечет выполнение (6) при всех $t \geq 0$. Положим $f(x) = F(\log x + \Delta)$. Тогда (6) эквивалентно тому, что $f(tx)/f(x) \to 1$ при $x \to \infty$ для любого $t \geq 0$. Это означает, что функция f является медленно меняющейся (определение и свойства см., например, в [5]). Равномерная сходимость в (6) следует теперь из теоремы о равномерной сходимости для медленно меняющихся функций (см., например, [5, теорема 1.2.1]). Более того, из равномерной сходимости на всех компактных t-множествах вытекает, что для распределения, принадлежащего классу $\mathscr{L}_\Delta$, существует функция $h(x) \to \infty$ такая, что (6) выполняется равномерно по $|t| \leq h(x)$.

Будем писать $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$, если $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

Определение 2. Распределение F Δ-*субэкспоненциально* (принадлежит классу $\mathscr{S}_\Delta$, см. [3]), если оно принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta$ и

$$F^{*2}(x+\Delta) \sim 2F(x+\Delta) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{7}$$

Заметим, что в случае $T = \infty$ определение 1 совпадает с определением класса $\mathscr{L}$ функций с длинным хвостом, а определение 2 — с определением класса $\mathscr{S}$ субэкспоненциальных распределений, так как в случае $T = \infty$ из (7) следует, что F принадлежит классу $\mathscr{L}$ (см., например, [6]).

Отметим также некоторые соотношения между классами $\mathscr{S}_\Delta$ при различных значениях T. Во-первых, как замечено в [3], если распределение F принадлежит классу $\mathscr{S}_\Delta$ при некотором T, то оно принадлежит классам $\mathscr{S}_{n\Delta}$ при всех $n = 2, 3, \dots$ (где $n\Delta = (0, nT]$) и классу $\mathscr{S}$. Также в [3] показано (см. пример 2), что существуют распределения, принадлежащие $\mathscr{S}_\Delta$ при всех целых положительных T, но не принадлежащие $\mathscr{S}_\Delta$ при любом конечном T, отличном от целого.

Определение 3. Распределение F *принадлежит классу* $\mathscr{D}_\Delta$, если $F(x+\Delta) > 0$ для всех достаточно больших x и найдется $x_0 < \infty$ такое, что

$$\sup_{x > x_0} \sup_{y \in (x, 2x]} \frac{F(x+\Delta)}{F(y+\Delta)} < \infty.$$

В случае $T = \infty$ определение 3 совпадает с определением класса $\mathscr{D}$ надстепенных функций.

Распределение Парето (распределение с «хвостом» $\overline{F}(x) = F((x,\infty)) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geq 1$) принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta \cap \mathscr{D}_\Delta$ для любого Δ. Также классу

$\mathscr{L}_\Delta \cap \mathscr{D}_\Delta$ принадлежат распределения F такие, что функция $F(x+\Delta)$ является правильно меняющейся на бесконечности, т. е. $F(x+\Delta) = x^{-\alpha} l(x)$, где $l(x)$ — медленно меняющаяся функция.

Определение 4. Распределение F *принадлежит классу* $\mathscr{SC}_\Delta$, если оно принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta$ и для функции $Q(x) = -\ln F(x+\Delta)$ выполнены следующие условия:

$$\frac{Q(x)}{\ln x} \to \infty \quad \text{при } x \to \infty \tag{8}$$

и существуют числа $x_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ такие, что

$$\frac{Q(x) - Q(x-u)}{u} \leq \alpha \frac{Q(x)}{x} \tag{9}$$

при всех $x > x_0$, $0 < u \leq \beta x$.

Заметим, что в случае $T = \infty$ класс $\mathscr{SC}_\Delta$ совпадает с классом $\mathscr{SC}$, введенным А. В. Нагаевым в [7]. Действительно, в этом случае из условий, накладываемых в определении 4 на функцию $Q(x)$, вытекает, что распределение F является субэкспоненциальным и, следовательно, принадлежит классу $\mathscr{L}$ (см., например, [2, лемма 1]). Классу $\mathscr{SC}$ принадлежат, например, распределения Вейбулла с $\overline{F}(x) = e^{-x^\gamma}$ при $0 < \gamma < 1$, $x > 0$, а также распределения с $\overline{F}(x) = c_1 e^{-c_2 \ln^\gamma x}$ при $c_1, c_2 > 0$, $\gamma > 1$, $x > 0$ (в частности, при $c_2 = 1/2$ и $\gamma = 2$ это лог-нормальное распределение). В п. 2.2 мы покажем, что эти распределения принадлежат классу $\mathscr{SC}_\Delta$ при любом T.

Замечание 2. Известно, что понятие субэкспоненциальности можно обобщить на распределения на $(-\infty, \infty)$ следующим образом: распределение F является субэкспоненциальным, если таковым является распределение F^+ с функцией распределения $F^+(x) = F(x)\mathbf{I}(x > 0)$. В [2] отмечено, что оценки для $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}$ остаются верными для распределений на $(-\infty, \infty)$, так как $\overline{F^{*n}}(x) \leq \mathbf{P}(S_n^+ > x)$, где $S_n^+ = \xi_1^+ + \dots + \xi_n^+$, $\quad \xi_1^+ = \max(0, \xi_1)$. К сожалению, автору не удалось получить содержательных верхних оценок для отношений (1) в случае Δ-субэкспоненциальных распределений, заданных на всей оси.

2.1. Оценки для распределений из класса $\mathscr{L}_\Delta \cap \mathscr{D}_\Delta$. Для распределения F из класса $\mathscr{D}_\Delta$ обозначим

$$L_n = \sup_{x > x_0} \sup_{y \in (x, nx]} \frac{F(x+\Delta)}{F(y+\Delta)}.$$

Здесь x_0 то же, что и в определении 3.

Отметим, что $L_n \geq 1$ для любого n и последовательность $\{L_n\}$ является неубывающей. Кроме того, справедливо важное

Свойство 1. $L_{mn} \leq L_m L_n$ *для любых* $m, n \geq 2$. *Отсюда, в частности, следует, что существует*

$$l_F = \lim_{n\to\infty} \log_n L_n.$$

Здесь и далее через $\log_n$ мы обозначаем логарифм по основанию n.

Действительно, заметим, что

$$\sup_{y\in(x,nmx]}\frac{F(x+\Delta)}{F(y+\Delta)}=\max\left\{\sup_{y\in(x,nx]}\frac{F(x+\Delta)}{F(y+\Delta)},\sup_{y\in(nx,nmx]}\frac{F(x+\Delta)}{F(y+\Delta)}\right\}$$
$$=\max\left\{L_n,\sup_{z\in(x,mx]}\frac{F(x+\Delta)}{F(nz+\Delta)}\right\}=\max\left\{L_n,\sup_{z\in(x,mx]}\frac{F(x+\Delta)}{F(nx+\Delta)}\frac{F(nx+\Delta)}{F(nz+\Delta)}\right\}$$
$$\le\max\left\{L_n,\frac{F(x+\Delta)}{F(nx+\Delta)}\sup_{z'\in(nx,mnx]}\frac{F(nx+\Delta)}{F(z'+\Delta)}\right\}\le\max\{L_n,L_n\cdot L_m\}=L_n\cdot L_m.$$

Тогда

$$L_{nm}=\sup_{x>x_0}\sup_{y\in(x,nmx]}\frac{F(x+\Delta)}{F(y+\Delta)}\le L_n\cdot L_m.$$

Следовательно, для любых n и k выполнены неравенства

$$L_n\le L_{k^{[\log_k n]+1}}\le L_k^{\log_k n+1}=L_k n^{\log_k L_k}. \tag{10}$$

Поэтому $\log_n L_n\le\ln L_k/\ln n+\log_k L_k$. Зафиксировав k, получим, что

$$\limsup\log_n L_n\le\log_k L_k$$

для любого k и поэтому $\limsup\log_n L_n\le\inf_k\log_k L_k$. Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n L_n$ и

$$l_F\equiv\lim_{n\to\infty}\log_n L_n=\inf_n\log_n L_n. \quad\square$$

Отметим, что для распределения Парето (распределения с «хвостом» $\overline{F}(x)=x^{-\alpha}$, $\alpha>0$, $x\ge1$) будет $l_F=\alpha$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta\cap\mathscr{D}_\Delta$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $K=K(\varepsilon)$ такое, что при всех n*

$$\sup_{x>x_0}\frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)}\le Kn^{1+l_F+\varepsilon}.$$

Здесь x_0 то же, что и в определении 3.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 3. Из теоремы 1 нетрудно получить

Следствие 1. *Пусть случайные величины $\xi_1,\xi_2,\dots$ независимы и имеют распределение F, принадлежащее классу $\mathscr{L}_\Delta\cap\mathscr{D}_\Delta$, и пусть τ — не зависящая от них случайная величина, принимающая натуральные значения и такая, что $\mathbf{E}\tau^{1+l_F+\varepsilon}<\infty$ для некоторого $\varepsilon>0$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F^{*\tau}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)}=\mathbf{E}\tau. \tag{11}$$

Действительно, по формуле полной вероятности

$$F^{*\tau}(x+\Delta)=\sum_n\mathbf{P}(\tau=n)\;F^{*n}(x+\Delta).$$

Так как распределение F принадлежит классу $\mathscr{L}_\Delta\cap\mathscr{D}_\Delta$, оно принадлежит классу $\mathscr{S}_\Delta$ (см. [3, лемма 12]). Известно также [3, лемма 5], что в этом случае

$F^{*n}(x+\Delta) \sim nF(x+\Delta)$ при $x \to \infty$ для любого n. Тогда соотношение (11) следует из теоремы 1 и теоремы о мажорируемой сходимости. $\square$

2.2. Характеризация классов $\mathscr{SC}_\Delta$. В данном пункте приведем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы распределение F принадлежало классу $\mathscr{SC}_\Delta$. Ясно, что наиболее трудно проверяемым условием является условие (9). Мы приводим здесь два условия, являющиеся необходимыми и достаточными для его выполнения.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны.*

(А) *Существуют числа $x_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ такие, что* (9) *имеет место при всех $x > x_0$, $0 < u \le \beta x$.*

(Б) *Существует неубывающая вогнутая дифференцируемая функция $f(x)$ такая, что*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha < 1, \tag{12}$$

и существует $x_0 > 0$ такое, что функция $Q(x)/f(x)$ является невозрастающей при $x > x_0$.

(В) *Существуют числа $x_0, u_0 > 0$, а также $0 < \alpha < 1$ такие, что* (9) *имеет место при всех $x > x_0$ и $0 < u \le u_0$.*

Замечание 3. Этот результат является новым и в случае $T = \infty$. Мы докажем его только в этом случае для упрощения обозначений, так как доказательство переносится на случай произвольного T без изменений.

Замечание 4. С помощью теоремы 2 нетрудно показать, что распределения Вейбулла с $\overline{F}(x) = e^{-x^\gamma}$ при $0 < \gamma < 1$, а также распределения с $\overline{F}(x) = c_1 e^{-c_2 \ln^\gamma x}$ при $c_1, c_2 > 0$ и $\gamma > 1$ принадлежат классу $\mathscr{SC}_\Delta$ при любом T. Действительно, достаточно заметить, что эти распределения при любом T удовлетворяют условию (Б) с функцией $f(x) = Q(x) = -\ln F(x+\Delta)$.

Замечание 5. Приведем пример распределения, принадлежащего классам $\mathscr{SC}_\Delta$ при всех натуральных T, но не принадлежащего $\mathscr{SC}_\Delta$ при всех остальных значениях T. Для этого используем пример 2 из [3]. Пусть ξ есть сумма двух независимых случайных величин: $\xi = \eta + \zeta$, где η имеет равномерное распределение на $(0, 1]$, а ζ принимает натуральные значения, причем $\mathbf{P}(\zeta = k) = \gamma/e^{\sqrt{k}}$, где γ — нормирующий множитель. Ясно, что распределение ξ не может принадлежать $\mathscr{S}_\Delta$ (а следовательно, и $\mathscr{SC}_\Delta$), если T не является целым числом. Однако нетрудно показать, что если T целое, то это распределение удовлетворяет условию (Б) теоремы 2 с функцией $f(x) = Q(x) = -\ln F(x+\Delta)$.

2.3. Оценки для распределений из класса $\mathscr{SC}_\Delta$.

Теорема 3. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}_\Delta$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_0 = x_0(\varepsilon)$ и $K = K(\varepsilon)$ такие, что при всех n*

$$\sup_{x > x_0} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le K e^{f(n^{1+\varepsilon})}$$

для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (Б) *теоремы* 2.

Приведем несколько примеров, показывающих, что теорема 3 настоящей работы усиливает соответствующие результаты работы [2].

Пример 1. Пусть $T = \infty$ и $\overline{F}(x) = e^{-x^\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $x > 0$. Тогда ясно, что распределение F удовлетворяет условию (Б) с функцией $f(x) = x^\gamma$ и из теоремы 3 следует существование такой постоянной K, что

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K e^{x^{\gamma+\varepsilon}},$$

а это совпадает с результатами [2].

Пример 2. Пусть $T = \infty$ и $\overline{F}(x) = c_1 e^{-c_2 \ln^\gamma x}$ при $c_1, c_2 > 0$, $\gamma > 1$, $x > 0$. Тогда из теоремы 3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует K такое, что

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K e^{c_2(1+\varepsilon)^\gamma \ln^\gamma x}.$$

Однако из результатов [2] вытекает лишь, что для любого $\varepsilon > 0$ существует K такое, что

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K e^{x^\varepsilon}.$$

Замечание 6. Предположим, что $\xi_1 \ge 1$ п. н. Тогда $\overline{F^{*n}}(x) = 1$ при $x \le n$ и

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \ge \sup_{x\le n} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = \sup_{x\le n} \frac{1}{\overline{F}(x)} = \frac{1}{\overline{F}(n)} = e^{Q(n)}.$$

Отметим, что оценка сверху, доказанная в теореме 3, и оценка снизу, приведенная в данном замечании, весьма близки.

Доказательство теоремы 3 основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}_\Delta$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует C такое, что для всех достаточно больших x*

$$\frac{F^{*2}(x+\Delta) - 2F(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le C x^\varepsilon f'(x).$$

Лемма 1 и теорема 3 доказываются аналогично лемме 2 и теореме 2 в [8]. Доказательства являются довольно громоздкими, поэтому мы ограничимся их схемами, которые будут приведены в § 3.

Замечание 7. Из условия (Б) теоремы 2 следует, что для любого $\delta > 0$ найдутся постоянные C' и C'' такие, что $f(x) \le C' x^{\alpha+\delta}$ и $f'(x) \le C'' x^{-1+\alpha+\delta}$. Отсюда и из леммы 1 заключаем, что если распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}_\Delta$, то оно является Δ-субэкспоненциальным.

Приведем также прямое следствие теоремы 3.

Следствие 2. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют распределение F, принадлежащее классу $\mathscr{SC}_\Delta$, и пусть τ — не зависящая от них случайная величина, принимающая натуральные значения и такая, что $\mathbf{E} e^{f(\tau^{1+\varepsilon})} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой функции f, удовлетворяющей условию* (Б) *теоремы* 2. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F^{*\tau}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} = \mathbf{E}\tau.$$

Действительно, из замечания 7 следует, что распределение F является Δ-субэкспоненциальным. Тогда, как и в доказательстве следствия 1, требуемое утверждение следует из теоремы 3 и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. $\square$

§ 3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Докажем теорему в случае $T < \infty$. В случае $T = \infty$ доказательство приведено в [2]. Сначала оценим

$$\sup_{x_0 < x \le nx_0} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le \sup_{x_0 < x \le nx_0} \frac{1}{F(x+\Delta)} = \frac{1}{F(x_0+\Delta)} \sup_{x_0 < x \le nx_0} \frac{F(x_0+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le \frac{L_n}{F(x_0+\Delta)}. \quad (13)$$

Пусть теперь $x > nx_0$. Рассмотрим

$$F^{*n}(x+\Delta) \le \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left\{\xi_i \in \left(\frac{x}{n}, x+T\right]\right\}, S_n \in x+\Delta\right)$$

$$\le n\mathbf{P}\left(\xi_n \in \left(\frac{x}{n}, x+T\right], S_n \in x+\Delta\right) \le n \sum_{i=1}^{\left[\frac{x(n-1)}{nT}\right]+1} \mathbf{P}(\xi_n \in (y_i, y_i+T], S_n \in x+\Delta).$$

Здесь $y_1 = \frac{x}{n}$ и $y_{i+1} = y_i + T$, т. е. отрезки $(y_i, y_i+T]$ не пересекаются и покрывают промежуток $\left(\frac{x}{n}, x+T\right]$. Заметим, что $\frac{F(y_i+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le L_n$ при всех i, так как $x > nx_0$. Имеем

$$F^{*n}(x+\Delta) \le n \sum_{i=1}^{\left[\frac{x(n-1)}{nT}\right]+1} \mathbf{P}(\xi_n \in (y_i, y_i+T], S_n \in x+\Delta)$$

$$\le n \sum_{i=1}^{\left[\frac{x(n-1)}{nT}\right]+1} \mathbf{P}(\xi_n \in (y_i, y_i+T])\mathbf{P}(S_{n-1} \in (x-y_i-T, x-y_i+T))$$

$$\le nL_nF(x+\Delta)\Big(\sum_i F^{*(n-1)}(x-y_i-T+\Delta) + \sum_i F^{*(n-1)}(x-y_i+\Delta)\Big)$$

$$\le nL_nF(x+\Delta)\left(\mathbf{P}\left(S_{n-1} \le x\frac{n-1}{n}\right) + \mathbf{P}\left(S_{n-1} \le x\frac{n-1}{n} + T\right)\right) \le 2nL_nF(x+\Delta).$$

Используя (13), получаем

$$\sup_{x > x_0} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \le K_1 n L_n$$

при всех n для некоторой константы K_1. Заметим, что для любых n и k выполнены неравенства

$$L_n \le L_{k^{[\log_k n]+1}} \le L_k^{\log_k n + 1} = L_k n^{\log_k L_k}.$$

Пусть теперь $\log_k L_k \le l_F + \varepsilon$ при всех $k \ge N = N(\varepsilon)$. Полагая в последнем неравенстве $k = N$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что из (А) следует (В). Докажем, что из (В) вытекает (Б), а из (Б) — (А).

Пусть выполнено условие (В), и пусть $u_0/x_0 < 1$. Докажем, что условие (Б) выполнено с функцией $f(x) = x^\alpha$. Нужно показать лишь, что функция

$Q(x)/f(x)$ является невозрастающей при достаточно больших x. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{Q(x)}{Q(x-u)} \le \frac{f(x)}{f(x-u)} = \left(\frac{x}{x-u}\right)^{\alpha} = \left(1-\frac{u}{x}\right)^{-\alpha} \tag{14}$$

при достаточно больших x и при $0 \le u \le u_0$. Из (В) следует, что

$$\frac{Q(x)}{Q(x-u)} \le \frac{x}{x-\alpha u} = \frac{1}{1-\alpha u/x}$$

при $x > x_0$ и $0 \le u \le u_0$. Поэтому (14) вытекает из неравенства

$$\frac{1}{1-\alpha z} \le (1-z)^{-\alpha},$$

которое справедливо для всех $0 \le z = u/x \le u_0/x_0$ и всех $0 < \alpha < 1$.

Предположим теперь, что выполнено условие (Б), и докажем, что выполнено (А) с некоторыми $0 < \alpha', \beta < 1$. Заметим, что (А) эквивалентно

$$\frac{Q(x)-Q((1-\gamma)x)}{Q(x)} \le \alpha'\gamma$$

при всех $x > x_0$ и $0 < \gamma \le \beta$. Воспользуемся свойствами функции $f(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)-Q((1-\gamma)x)}{Q(x)} &\le \frac{f(x)-f((1-\gamma)x)}{f(x)} \le \frac{\gamma x f'((1-\gamma)x)}{f(x)} \\ &\le \frac{\gamma x f'((1-\gamma)x)}{f((1-\gamma)x)} \le \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha+\varepsilon) \le \frac{\gamma}{1-\beta}(\alpha+\varepsilon)\end{aligned}$$

при достаточно больших x. Ясно, что можно подобрать $0 < \beta < 1$ так, что $\alpha' = \frac{\alpha+\varepsilon}{1-\beta} < 1$. $\square$

Доказательство леммы 1 проводится аналогично доказательству леммы 2 в [8], здесь мы приводим лишь его схему. Рассмотрим случай $T < \infty$. Запишем

$$F^{*2}(x+\Delta) = 2\int_0^{x^\varepsilon} dF(y)F(x-y+\Delta) + \int_{x^\varepsilon}^{x-x^\varepsilon+T} dF(y)F(x-y+\Delta) = 2I_1(x) + I_2(x).$$

Воспользовавшись тем, что функция $Q(x)/f(x)$ не возрастает, можно показать, что $I_1(x) \le 1 + x^\varepsilon f'(x)$ при достаточно больших x. Оценим $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{x-2x^\varepsilon+T}{T}\right]} \mathbf{P}(\xi_1 \in (y_i, y_i+T], \xi_1+\xi_2 \in x+\Delta).$$

Здесь $y_1 = x^\varepsilon$ и $y_{i+1} = y_i + T$, т. е. отрезки $(y_i, y_i+T]$ не пересекаются и накрывают промежуток $(x^\varepsilon, x-x^\varepsilon+T]$. Используя приведенное выше представление для $I_2(x)$, нетрудно показать, что $I_2(x) \le Cxe^{-Q(x^\varepsilon)}$. Отсюда и из (8) заключаем, что $I_2(x) = o(x^\varepsilon f'(x))$ при $x \to \infty$. Утверждение леммы следует теперь из (15) и приведенных оценок для $I_1(x)$ и $I_2(x)$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Здесь мы также ограничимся лишь схемой доказательства. Обозначим $\alpha_n = \sup\limits_{x \ge x_0} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)}$. Пусть $g(x) = x^{\frac{1}{1-\delta}}$. Тогда при каждом n верно неравенство

$$\alpha_n \le \max\left\{\sup_{x_0 \le x \le g(n)} \frac{1}{F(x+\Delta)}, 1 + \alpha_{n-1}\left(1 + \sup_{x \ge g(n)} \frac{F^{*2}(x+\Delta) - 2F(x+\Delta)}{F(x+\Delta)}\right)\right\}.$$

Доказательство приведенного утверждения в случае $T=\infty$, содержащееся, например, в [8, лемма 1.3.5], переносится на случай произвольного T практически без изменений. Далее, найдется N такое, что при всех $n \geq N$

$$\alpha_n \leq \max\left\{\sup_{x_0\leq x\leq g(n)} \frac{1}{F(x+\Delta)}, 1+\alpha_{n-1}\left(1+Cg(n)^\delta f'(g(n))\right)\right\}.$$

Предполагая, что $\alpha_N \geq \sup\limits_{x_0\leq x\leq g(N)} \frac{1}{F(x+\Delta)}$, и используя метод математической индукции и выбор функции $g(x)$, нетрудно показать, что

$$\alpha_n \leq 1+\alpha_{n-1}(1+Cg(n)^\delta f'(g(n))),$$

откуда

$$\alpha_n \leq K\exp\left\{\int\limits_N^n g(x)^\delta f'(g(x))dx\right\} \leq K\exp\left\{\int\limits_{g(N)}^{g(n)} f'(y)\right\} \leq K\exp\left\{f(n^{\frac{1}{1-\delta}})\right\}.$$

Положив $\frac{1}{1-\delta}=1+\varepsilon$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Автор благодарит С. Г. Фосса за постановку задачи и полезные стимулирующие обсуждения в ходе работы, а также рецензента за справедливые замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching processes. Berlin: Springer-Verl., 1972.
2. *Шнеер В. В.* Оценки для распределений сумм случайных величин с субэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1401–1420.
3. *Asmussen S., Foss S., Korshunov D.* Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour // J. Theory Probab. 2003. V. 16, N 2. P. 489–518.
4. *Боровков А. А.* Интегро-локальные и интегральные предельные теоремы о больших уклонениях сумм случайных векторов. Регулярные распределения // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 508–525.
5. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
6. *Чистяков В. П.* Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 4. С. 710–718.
7. *Нагаев А. В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 335–346.
8. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.* Modelling extremal events. Berlin: Springer-Verl., 1997.

Статья поступила 26 мая 2005 г., окончательный вариант — 14 апреля 2006 г.

Шнеер Всеволод Владиславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Current address:
Vsevolod Shneer
Department of AMS
Heriot-Watt University
Edinburgh
Scotland
EH14 4AS
sevashneer@ngs.ru