Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 517.98+519.218.84

О БИСТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В КОНЕЧНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Ф. А. Шахиди

Аннотация. Обобщено понятие квадратичного бистохастического оператора и введено понятие произвольного бистохастического оператора. Доказано необходимое условие для бистохастичности оператора. Также получено, что для бистохастических операторов выполняется эргодическая теорема.

Ключевые слова: стохастический оператор, бистохастический оператор, эргодическая теорема.

1. Введение

Ряд задач физики, биологии сводятся к изучению нелинейных отображений. Например, в популяционной генетике такие операторы называются операторами эволюции. Квадратичный стохастический оператор определяется следующим образом:

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1} = \Big\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,m}, \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \Big\}$,

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0 \ \forall i,j,k = \overline{1,m}, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1 \ \forall i,j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Условия (2) обеспечивают сохранение симплекса, т. е. оператор отображает симплекс в себя. Изучение квадратичных стохастических операторов восходит к работам С. Н. Бернштейна [1]. Далее теория была развита в работах [2–5]. Основные результаты в двумерном симплексе получены С. С. Валландером [3]. В работе Р. Н. Ганиходжаева [5] обобщен результат Валландера на случай любой конечной размерности.

В [6] выделен класс квадратичных стохастических операторов, которые названы бистохастическими квадратичными операторами, и получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности оператора. Недавно начато изучение кубических стохастических операторов [7], т. е. операторов вида

$$(Vx)_k = \sum_{i,j,l=1}^{m} p_{ijl,k} x_i x_j x_l, \quad k = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in S^{m-1}$, и

$$
\begin{gathered}
p_{ijl,k}=p_{ilj,k}=p_{jil,k}=p_{jli,k}=p_{lij,k}=p_{lji,k}\geq 0 \quad \forall i,j,l,k=\overline{1,m},\\
\sum_{k=1}^{m}p_{ijl,k}=1 \quad \forall i,j,l=\overline{1,m}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Аналогично определению бистохастического квадратичного оператора в данной работе, вводится понятие произвольного бистохастического оператора, определенного в конечномерном симплексе. В п. 2 изучаются свойства бистохастических операторов и доказывается необходимое условие бистохастичности. В п. 3 доказана эргодическая теорема для бистохастических операторов.

2. Свойства бистохастических операторов

Для каждого вектора $x=(x_1,x_2\dots x_m)\in\mathbb{R}^m$ положим $x_{\downarrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\dots,x_{[m]})$, где $x_{[1]}\geq x_{[2]}\geq\dots\geq x_{[m]}$ — компоненты вектора x, упорядоченные по невозрастанию.

Определение 1. Говорят, что x *мажорируется* y (или y *мажорирует* x), и пишут $x\prec y$, если

1) $\sum\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\leq\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}$, $k=\overline{1,m-1}$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{m}x_{[i]}=\sum\limits_{i=1}^{m}y_{[i]}$.

Очевидно, что для любого $x\in S^{m-1}$ выполняется соотношение

$$(1/m,1/m,\dots,1/m)\prec x\prec(1,0,\dots,0).$$

Квадратная матрица $P=(p_{ij})$ порядка m называется *бистохастической*, если

$$
\begin{gathered}
p_{ij}\geq 0 \quad \forall i,j=\overline{1,m},\\
\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=1\ \forall j=\overline{1,m}, \quad \sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1\ \forall i=\overline{1,m}.
\end{gathered}
$$

Лемма 1 [8]. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $x\prec y$, *т. е.* $\sum\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\leq\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}$, $k=\overline{1,m-1}$, $\sum\limits_{i=1}^{m}x_{[i]}=\sum\limits_{i=1}^{m}y_{[i]}$;

2) $x=Py$ *для некоторой бистохастической матрицы* P;

3) *вектор* x *принадлежит выпуклой оболочке, порожденной* $m!$ *векторами, полученными при всевозможных перестановках компонент вектора* y.

Определение 2. Произвольный непрерывный оператор V, определенный на симплексе S^{m-1}, будем называть *стохастическим*, если

$$(Vx)_k=x'_k=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{m}p_{i_1i_2\dots i_n,k}x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \quad \forall k=\overline{1,m}, \tag{5}$$

где

$$
\begin{gathered}
p_{i_1i_2\dots i_n,k}\geq 0\ \forall i_j=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m};\\
p_{i_1i_2\dots i_n,k}=p_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}\dots i_{\pi(n)},k},\ k=\overline{1,m},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

для любой перестановки π и

$$\sum_{k=1}^{m} p_{i_1 i_2 \ldots i_n, k} = 1 \quad \forall i_j = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Условия (6) обеспечивают сохранение симплекса, т. е. оператор отображает симплекс в себя.

Число n называется *порядком* этого оператора. При $n = 1$ оператор (5) — линейный стохастический оператор, при $n = 2$ — квадратичный стохастический оператор, при $n = 3$ — кубический стохастический оператор.

Определение 3. Стохастический оператор (5) называется *бистохастическим*, если

$$Vx \prec x \ \ \forall x \in S^{m-1}.$$

Например, линейный оператор, матрица которого бистохастична, является бистохастическим оператором. Квадратичные случаи рассмотрены в работе [9].

Следует отметить, что для квадратичных операторов понятие бистохастичности введено таким же образом.

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ $\forall \alpha \subset I$. Через $|\alpha|$ обозначим мощность множества α.

Теорема 1. *Пусть $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ — бистохастический оператор. Тогда*
1) $V\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$,
2) $\sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1}^{m} p_{i_1 i_2 \ldots i_m, k} = m^{n-1}$ *для всех* $k = \overline{1,m}$,
3) $\sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_m \in \alpha} p_{i_1 i_2 \ldots i_m, k} \le |\alpha|^{n-1}$ *для любых* $\alpha \subset I$, $k = \overline{1,m}$.

Свойство 1 означает, что центр симплекса является неподвижной точкой для оператора V. Свойства 2 и 3 являются необходимыми условиями для бистохастичности оператора.

Доказательство. 1. Пусть $C = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$. По определению имеем $V(C) \prec C$, но, с другой стороны, $C \prec x$ для любого $x \in S^{m-1}$. Поэтому $V(C)_{\downarrow} = C_{\downarrow}$, и так как $C_{\downarrow} = C$, то $V(C) = C$.

2. Поскольку $V(C) = C$, то

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{m} p_{i_1 i_2 \ldots i_n, k} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{m} \quad \forall k = \overline{1,m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{m} p_{i_1 i_2 \ldots i_n, k} = m^{n-1} \quad \forall k = \overline{1,m}.$$

3. Пусть $Vx \prec x$. Тогда по лемме 1 существует бистохастическая матрица такая, что $Vx = Px$. Так как для каждого вектора x существует бистохастическая матрица, то P зависит от x. Поэтому если V — бистохастический оператор, то $Vx = P(x)x$, где

$$P(x) = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=\overline{1,m}}, \quad p_{ij}(x) \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij}(x) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x) = 1.$$

Положим $x_i^0 = \frac{1}{|\alpha_0|}$ для $i \in \alpha_0$ и $x_i^0 = 0$ для $i \notin \alpha_0$, где $\alpha_0 \subset I$. Очевидно, что $|\alpha_0| \leq m$, следовательно, $x^0 \in S^{m-1}$. Имеем

$$(Vx^0)_k = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n \in \alpha_0}^{m} p_{i_1 i_2 \dots i_n,k} \frac{1}{|\alpha_0|^n} = \sum_{i=1}^{|\alpha_0|} p_{ij}(x^0) \frac{1}{\alpha_0} \leq \sum_{i=1}^{m} p_{ij}(x^0) \frac{1}{|\alpha_0|} = \frac{1}{|\alpha_0|}.$$

Так как множество α_0 произвольно, то

$$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m \in \alpha} p_{i_1 i_2 \dots i_m,k} \leq |\alpha|^{n-1} \quad \text{для любых } \alpha \subset I,\ k = \overline{1,m}.$$

Замечание. Рассмотрим случай, когда $n = 1$. Тогда оператор (5) имеет вид

$$(Vx)_k = \sum_{i=1}^{m} p_{i_1,j} x_i \quad \forall j = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Очевидно, что в этом случае условия 2 и 3 теоремы выполняются автоматически, так как $\sum\limits_{k=1}^{m} p_{i_1 j} = 1$, а для бистохастичности (7) необходимо и достаточно, чтобы матрица линейного оператора (7) была бистохастической (лемма 1).

При $n = 2$ в работе [9] доказано, что условия 2 и 3 теоремы 1 необходимы и достаточны.

Предположение. *Условия* 2 *и* 3 *теоремы* 1 *являются необходимыми и достаточными для бистохастичности стохастического оператора.*

3. Эргодическая теорема для бистохастических операторов

Определение 4. Говорят, что для оператора $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ *выполняется эргодическая теорема*, если существует следующий предел средних:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x + V(x) + V^2(x) + \dots + V^{t-1}(x)}{t} \quad \forall x \in S^{m-1}.$$

В работе Улама [2] на основе численных экспериментов высказана гипотеза, что для любого квадратичного стохастического оператора, определенного в конечномерном симплексе, выполняется эргодическая теорема. Однако М. И. Захаревич [10] показал, что гипотеза Улама верна не всегда. В качестве контрпримера он рассмотрел следующий оператор:

$$(Vx)_1 = x_1^2 + 2x_1x_2, \quad (Vx)_2 = x_2^2 + 2x_2x_3, \quad (Vx)_3 = x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Теорема 2. *Для любого бистохастического оператора выполняется эргодическая теорема.*

Доказательство. Пусть $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ — бистохастический оператор. По определению имеем

$$x \succ Vx \succ V^2x \succ \dots .$$

Последнее означает, что

$$x_{[1]} \geq (Vx)_{[1]} \geq (V^2x)_{[1]} \geq \dots,$$
$$x_{[1]} + x_{[2]} \geq (Vx)_{[1]} + (Vx)_{[2]} \geq (V^2x)_{[1]} + (V^2x)_{[2]} \geq \dots,$$
$$\dots, \quad \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{k} (Vx)_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{k} (V^2x)_{[i]} \geq \dots .$$

Последовательности $\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}(Vx)^n_{[i]},\, n=1,2,\dots\right\}$ при каждом $k=\overline{1,m}$ убывающие и ограниченные, следовательно, сходятся. Это означает, что также сходятся последовательности $\{(Vx)^n_{[k]},\, n=1,2,\dots\}$ $\forall k=\overline{1,m}$. Обозначим $y_k=\lim\limits_{n\to\infty}(V^n x)_{[k]}$ и $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$.

Если $z=(z_1,z_2,\dots,z_m)\in\omega(x^0)$, где $\omega(x^0)$ — предельное множество траектории, начинающейся с точки x^0, то существует x^{n_j} такой, что $V(x^{n_j})\to z$. Следовательно, $V(x^{n_j})_\downarrow\to z_\downarrow$. Но, с другой стороны, $V(x^{n_j})\to y$. Поэтому $z_\downarrow=(y_1,y_2,\dots,y_m)=y$. Стало быть, любая точка из $\omega(x^0)$ есть некоторая перестановка координат точки $(y_1,y_2,\dots,y_m)$. Поэтому $\omega(x^0)$ не может иметь более чем $m!$ точек.

Пусть $|\omega(x^0)|=p$. Тогда траектория $\{V^n x\}$ стремится к циклу порядка p, т. е. вся траектория разбивается на p сходящихся подпоследовательностей, на пределах которых оператор V действует как циклическая подстановка. Поэтому предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x^0+V(x^0)+V^2(x^0)+\dots+V^{t-1}(x^0)}{t}\quad\forall x^0\in S^{m-1}$$

существует.

Замечание. Существуют общие теоремы, при которых для нелинейных операторов выполняется эргодическая теорема [11, с. 288–296]. Например, в [12] доказана слабая сходимость чезаровских средних для (нелинейных!) нерастягивающих операторов, действующих в замкнутом выпуклом подмножестве гильбертова пространства и имеющих неподвижную точку. Отсюда в случае конечномерности пространства сразу следует и сильная сходимость. Однако бистохастические операторы не всегда являются нерастягивающими. Рассмотрим следующий бистохастический квадратичный оператор:

$$(Vx)_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad (Vx)_2=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3,\quad (Vx)_3=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3.$$

Пусть $x=(1,0,0)$ и $y=\left(\frac{9}{10},0,\frac{1}{10}\right)$. Тогда $||Vx-Vy||>||x-y||$.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Р. Н. Ганиходжаеву за полезные обсуждения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Уч. зап. Н.-И. Укр. отд. мат. 1924. № 1. С. 83–115.
2. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
3. *Валландер С. С.* О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 3. С. 515–517.
4. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. Киев: Наук. Думка, 1983.
5. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 119–140.
6. *Ганиходжаев Р. Н.* К определению бистохастических квадратичных операторов // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 4. С. 231–232.
7. *Розиков У. А., Хамраев А. Ю.* О кубических операторах определенных в конечномерном симплексе // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 10. С. 1424–1433.
8. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983.
9. *Ганиходжаев Р. Н.* Исследования по теории квадратичных стохастических операторов: Дис. … д.ф.-м.н. Ташкент, 1993.

10. *Захаревич М. И.* О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 6. С. 207–208.
11. *Krengel U.* Ergodic theorems. Berlin: Walter de Gruyter, 1985.
12. *Baillon J.-B.* Un theore,e de type ergodique pour les contractions non-lineaires dans un espace de Hilbert // CRAS, A. 1975. V. 280. P. 1511–1514.

Статья поступила 20 декабря 2007 г.

Шахиди Фаррух Акрамович
Национальный университет Узбекистана, Вузгородок, Ташкент 100174, Узбекистан
farruh.shahidi@gmail.com