Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 510.643; 517.11

ЯВНЫЙ БАЗИС ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК, РАСШИРЯЮЩИХ $S4.1, Grz$

В. В. Римацкий

Аннотация. Исследуются базисы для допустимых правил вывода широкого класса модальных логик. Построен явный базис для допустимых правил логик $S4.1$, Grz и их расширений, число которых по крайней мере счетно. Полученный базис состоит из бесконечной последовательности правил, которые имеют компактную и простую форму. В случае конечности ширины логики базис для допустимых правил также состоит из конечной последовательности правил.

Ключевые слова: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, базис допустимых правил.

1. Введение

Понятие допустимого (структурного) правила вывода впервые введено Лоренценем [1] в 1955 г. Для произвольной логики допустимыми являются те правила вывода, которые не изменяют множество теорем данной логики. В классической логике вопрос допустимости решался тривиально: допустимы только выводимые, доказуемые правила. В случае неклассических логик примеры Харропа и Минца, а позже Поста показали, что существуют допустимые, но не доказуемые правила вывода.

История изучения допустимых правил может быть датирована 1975 г. с появления проблемы Фридмана [2] о существовании алгоритмического критерия допустимости правил в интуиционистской логике Int. В середине 70-х Минц получил достаточные условия выводимости правил специальной формы. Положительное решение проблемы Фридмана получено В. В. Рыбаковым в середине 80-х [3] для широкого класса модальных и суперинтуиционистских логик. Позднее Гиларди [4] получил критерий допустимости правил в логике Int с помощью проективных формул.

К проблеме Кузнецова о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода логики Int восходит другой способ описания всех допустимых правил логики. Имея базис для допустимых правил, все остальные можем вывести из него как следствия. Первый положительный результат получен А. И. Циткиным [5], который нашел базис для всех допустимых в Int квазихарактеристических правил вывода. Однако в общем проблема решалась отрицательно не только для Int, но и для большинства других базовых логик. В. В. Рыбаков [3] показал, что логики Int, KC, $K4$, $S4$, Grz и другие не имеют конечного базис для допустимых правил от конечного числа переменных.

Тем не менее проблема явного описания всех допустимых правил вывода хотя бы для базовых логик оставалась открытой. В 2000 г. в статье [6] получен рекурсивный базис для допустимых правил Int, состоящий из правил в полуредуцированной форме. Позже в [7, 8] получен явный базис допустимых правил этой логики. В [9] В. В. Рыбаков построил точный базис для допустимых правил логики $S4$.

В представленной работе с использованием техники [9] описывается точный базис для допустимых правил целого класса финитно аппроксимируемых логик, расширяющих Grz и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Полученный базис имеет компактную и наглядную форму. Показано также, что таких логик не менее чем счетно. В случае конечности ширины заданной логики базис для допустимых правил также конечен.

2. Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства с предметом рекомендуем [3]).

Фрейм $\mathscr{F} := \langle F, R\rangle$ есть пара, где F — непустое множество и R — бинарное отношение на F. Базисное множество и сам фрейм далее будем обозначать одной и той же буквой. Мы рассматриваем только логики, расширяющие Int или $S4\,(Grz)$, поэтому все фреймы рефлексивны и транзитивны.

Напомним, что если $\langle W, R\rangle$ — некоторый фрейм, то множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если

1) для любых x, y из C выполняется xRy;

2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy \& yRx) \Longrightarrow y \in C$.

Сгусток называется *собственным* если $|C| > 1$, в противном случае — *одноэлементным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a.

Любое множество попарно не сравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathscr{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathscr{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков. Для любого $a \in F$ обозначим $a^R = \{x \mid aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$. Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \setminus C(a) = X^R := \cup\{x^R \mid x \in X\}$. Будем говорить, что элемент a есть *ко-накрытие для* $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. Под *ко-накрытием* далее понимаем одноэлементный сгусток, являющийся ко-накрытием. λ-*Ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее λ-фрейм как корень.

Говорим, что фрейм $\mathscr{F}$ есть λ-*фрейм*, если все теоремы логики λ истинны на $\mathscr{F}$ при любом означивании переменных; $\lambda(\mathscr{F})$ — логика, порожденная фреймом $\mathscr{F}$. Фрейм $\mathscr{F}$ корневой, если существует элемент $a \in \mathscr{F}$ такой, что $\forall b \in \mathscr{F}\ aRb$. Данный элемент a называем также *корнем* $\mathscr{F}$.

Глубиной элемента x *фрейма* (*модели*) F называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка $C(x)$, содержащего x. Множество всех элементов фрейма F глубины не более чем n будем обозначать через $S_{\leq n}(F)$, а множество элементов глубины n — через $S_n(F)$.

Подмножество $\mathscr{X}$ заданной модели $\mathscr{M}$ называется *формульным* (*определимым*), если существует формула α такая, что $\forall x \in \mathscr{M}[x \Vdash_V \alpha \iff x \in \mathscr{X}]$. Соответственно элемент $x \in \mathscr{M}$ является формульным, если множество $\{x\}$ формульное. Означивание V определимо (формульное) в модели $\mathscr{M}$, если для любой переменной p из области V множество $V(p)$ формульное.

Для заданного фрейма $\mathscr{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_k/\beta$ говорим, что r *истинно на* $\mathscr{F}$ при означивании V (обозначаем

$\mathscr{F} \models_V r$), если как только $\forall x \in \mathscr{F}\, \forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, так сразу $\forall x \in \mathscr{F}\ (x \models_V \beta)$. Правило r истинно на $\mathscr{F}$, если r истинно на $\mathscr{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathscr{F} \models r$). Аналогично определяется истинность правила на заданной модели: r истинно на $\mathscr{M}$, если как только $\forall x \in \mathscr{M}\, \forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, так сразу $\forall x \in \mathscr{M}\ (x \models_V \beta)$.

Правило вывода $\alpha_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\alpha_k(x_1,\dots,x_n)/\beta(x_1,\dots,x_n)$ называется *допустимым* в логике λ (обозначаем $r \in \mathrm{Ad}(\lambda)$), если для любых формул $\delta_1,\dots,\delta_n$ из $(\forall j\, \alpha_j(\delta_1,\dots,\delta_n) \in \lambda)$ следует $\beta(\delta_1,\dots,\delta_n) \in \lambda$.

Допустимые правила пропозициональной модальной (суперинтуиционистской) логики λ имеют алгебраическое описание — им соответствуют квазитождества, истинные на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ многообразия алгебр $\mathrm{Var}(\lambda)$, соответствующего данной логике, т. е. справедливо

Утверждение 2.1 [3, гл. 3]. *Правило вывода*

$$r = \{\alpha_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\alpha_k(x_1,\dots,x_n)/\beta(x_1,\dots,x_n)\}$$

допустимо в логике λ, если и только если на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ из многообразия алгебр $\mathrm{Var}(\lambda)$ истинно квазитождество

$$r^* = \{\alpha_1(x_1,\dots,x_n) = 1 \& \dots \& \alpha_k(x_1,\dots,x_n) = 1 \Longrightarrow \beta(x_1,\dots,x_n) = 1\}.$$

Правило r называется *следствием правил $r_1,\dots,r_k$ в логике* λ, если заключение r выводимо из посылок r с помощью теорем λ, правил $r_1,\dots,r_k$ и постулированных правил вывода λ. Множество $\mathrm{Ad}^*(\lambda)$ допустимых правил логики λ называем *базисом допустимых правил*, если для любого допустимого правила r найдутся правила $r_1,\dots,r_k \in \mathrm{Ad}^*(\lambda)$ такие, что r выводимо из $r_1,\dots,r_k$ в логике λ.

Утверждение 2.2 [3, гл. 3.5, 4.1]. *Правила $r_1,\dots,r_k$ — базис допустимых правил вывода логики λ тогда и только тогда, когда $r_1^*,\dots,r_k^*$ — базис квазитождеств $\mathfrak{F}_w(\lambda)$.*

Для дальнейшего изложения нам потребуются n-характеристические модели Крипке, с помощью которых будут описаны свободные алгебры конечных рангов из многообразия $\mathrm{Var}(\lambda)$. Модель Крипке $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики* λ тогда и только тогда, когда для любой формулы α от переменных $p_1,\dots,p_n$ $\alpha \in \lambda$ тогда и только тогда, когда $\langle F, R, V\rangle \models \alpha$.

В нашем исследовании будет существенно использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4$. Следуя [3, гл. 3], опишем конструкцию этой модели и ее свойства. Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$, и пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно не изоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n. Предположим, что $S_{\le m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathscr{X} \subset S_{\le m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один сгусток глубины m, и добавим сгусток C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathscr{X}$ при условии, что

(i) фрейм $C^R = \mathscr{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фреймом;

(ii) если $\mathscr{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2.3 (см. [3]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической и каждый элемент данной модели формульный.*

Утверждение 2.4 (см. [3]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, правило вывода r допустимо в λ, если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных.*

В данном исследовании нам также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорим, что *правило R имеет редуцированную форму*, если $R := \bigvee_{1\le j\le m} \phi_j/\Box x_0$, где $\phi_j := \bigwedge_{0\le i\le k} x_j^{a_j} \wedge \bigwedge_{0\le i\le k} \Diamond x_j^{b_j}$, $a_j, b_j \in \{0,1\}$; $x^0 := x$, $x^1 := \neg x$. Для каждого ϕ_j определим также множества

$$\theta_1(\phi_j) := \{x_j : 0 \le j \le k,\ a_j = 0\}; \quad \theta_2(\phi_j) := \{x_j : 0 \le j \le k,\ b_j = 0\}.$$

Утверждение 2.5 (см. [3]). *Для любого модального правила вывода R существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное R относительно истинности на $S4$-алгебрах и $S4$-фреймах, и R и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $S4$.*

Говорят, что логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое свойство ко-накрытий*, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathscr{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathscr{X}$ сгустков из $\mathscr{F}$ фрейм $\mathscr{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия к фрейму $\bigcup_{c\in\mathscr{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом.

Пусть задана модальная логика $\lambda \supseteq S4$, которая

— финитно аппроксимируема;

— имеет слабое свойство ко-накрытий;

— обладает дизъюнктивным свойством.

Для всех чисел $n > 1$, $m \ge 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, определим формулы

$$A_n := \bigwedge_{1\le i\le n} \Diamond p_i; \quad A_{n,m} := \Box\Big[\bigwedge_{1\le i\le n}\Big(p_i \to \bigwedge_{1\le j\le m} \neg\Diamond q_j\Big)\Big];$$

$$B_m := \bigvee_{\mathscr{D}\subseteq\{1,\dots,m\}} \Big[\bigwedge_{i\in\mathscr{D}} q_i \wedge \bigwedge_{i\notin\mathscr{D}, 1\le j\le m} \neg\Diamond q_i\Big];$$

$$R_{n,m} := \frac{\Box(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)) \vee \Box z}{\Box\neg A_n \vee \Box z}.$$

В статье [9] В. В. Рыбаковым доказана следующая теорема, доказательство которой мы воспроизведем для полноты изложения.

Теорема 2.6 [9, лемма 3.1]. *Правила $R_{n,m}$ допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей $S4$ и имеющей слабое свойство ко-накрытий и дизъюнктивное свойство.*

Доказательство. Предположим, что правило вывода $R_{n,m}$ не допустимо в логике λ. Так как логика λ имеет дизъюнктивное свойство, правило

$$R := \frac{\Box(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m))}{\Box\neg A_n}$$

также не допустимо в логике λ. Тогда существует означивание V переменных правила R, опровергающее R на некоторой k-характеристической модели $Ch_\lambda(k)$. Итак,

$$Ch_\lambda(k) \Vdash_V \Box(A_{n,m} \land \neg(A_n \land B_m)) \,\&\, Ch_\lambda(k) \nVdash_V \Box\neg A_n. \qquad (*)$$

Следовательно, существует элемент $a \in Ch_\lambda(k) : a \nVdash_V \Box\neg A_n$. Тогда найдутся элементы $b_1, \dots, b_n \in Ch_\lambda(k)$ такие, что $aRb_i \,\&\, b_i \Vdash_V p_i$. По слабому свойству ко-накрытий существует рефлексивный элемент $b \in Ch_\lambda(k)$, являющийся ко-накрытием для множества $\{b_1, \dots, b_n\}$:

$$\{b\}^R := \{b\} \cup \bigcup_{1 \le i \le n} (b_i)^R.$$

По $(*)$ $b \Vdash_V A_{n,m}$, и по выбору элемента $b \Vdash_V A_n$. Рассмотрим множество $D := \{q_j \mid b \Vdash_V q_j\}$. Так как b является ко-накрытием для $\{b_1, \dots, b_n\}$, легко проверить, что дизъюнктивный член B_m, соответствующий такому D, выполняется на элементе b при означивании V. Таким образом, получаем $b \Vdash_V A_n \land B_m$, что противоречит $b \Vdash_V \Box\neg(A_n \land B_m)$ по предположению $(*)$. $\Box$

3. Основной результат

Пусть задана модальная логика $\lambda \supseteq Grz$, которая
(i) финитно аппроксимируема;
(ii) имеет слабое свойство ко-накрытий;
(iii) обладает дизъюнктивным свойством.
Для всех чисел $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, определим формулы

$$A_n := \bigwedge_{1 \le i \le n} \Diamond p_i; \quad A_{n,1} := \Box\Big[\bigwedge_{1 \le i \le n} (p_i \to \neg\Diamond q)\Big];$$

$$B := q \lor \neg\Diamond q.$$

Определим также последовательность правил вывода:

$$\mathscr{R}_n := \frac{\Box(A_{n,1} \land \neg(A_n \land B)) \lor \Box z}{\Box\neg A_n \lor \Box z}.$$

Покажем, что набор правил вывода $\mathscr{R}_n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, является базисом для допустимых правил вывода логики $\lambda \supseteq Grz$, удовлетворяющей условиям (i)–(iii).

Теорема 3.1. *Правила $\mathscr{R}_n$ допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей $S4$ и имеющей слабое свойство ко-накрытий и дизъюнктивное свойство.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.6, так как правила $\mathscr{R}_n$ являются частным случаем правил $R_{n,m}$ при $m = 1$. $\Box$

Пусть задана модальная алгебра $\mathscr{A} := \mathscr{F}^+(X) \in \mathrm{Var}(Grz)$, порожденная множеством подмножеств $X \subseteq \mathscr{F}$ ассоциированной (обертывающей) алгебры $\mathscr{F}^+$, где $\mathscr{F}$ — заданный рефлексивный и транзитивный фрейм, все сгустки которого одноэлементные. Пусть $rf(r)$ — правило вывода в редуцированной форме.

Теорема 3.2. *Если правило $rf(r)$ допустимо в логике λ, имеет k переменных и опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то для некоторого $n > 1$ правило $\mathscr{R}_n$ также опровергается на $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Наше правило $rf(r)$ имеет вид $rf(r) = \bigvee_{1\le j\le t} \phi_j/\Box x_0$, в котором

$$\phi_j := \bigwedge_{0\le i\le k} x_j^a \wedge \bigwedge_{0\le i\le k} \Diamond x_j^b,$$

где $a, b \in \{0, 1\}$; $x^0 := x$, $x^1 := \neg x$. Так как $rf(r)$ опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$ при некотором означивании $V(x_i) := \mathscr{Y}_i \in \mathscr{A}$, то $\mathscr{F} \Vdash_V \bigvee \phi_j$; $\exists b \in \mathscr{F} : b \nVdash_V \Box x_0$. В частности, алгебра $\mathscr{A}$ является конечно-порожденной. Соответственно фрейм $\mathscr{F}$ также можем считать конечно-порожденным. Среди всех таких элементов, на которых опровергается заключение правила, выберем элемент b такой, чтобы множество дизъюнктов $\phi(b) := \{\phi_j \mid \exists c \in b^R : \ c \Vdash_V \phi_j\}$ было максимальным. Тогда $b^R \not\models_V rf(r)$, т. е. $\forall c \in b^R\ c \Vdash_V \bigvee \phi_j$; $b \nVdash_V \Box x_0$.

Рассмотрим алгебру $(b^R)^+$, порожденную фреймом b^R, и ее подалгебру $\mathscr{B} := (b^R)^+(V(x_0), V(x_1), \dots, V(x_k))$, порожденную множеством элементов $V(x_0), V(x_1), \dots, V(x_k)$. Так как наше правило $rf(r)$ опровергается на b^R, то $\mathscr{B} \not\models_V rf(r)$. Следовательно, алгебра $\mathscr{B}$ (как и алгебра $\mathscr{F}^+$) не принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{F}_w^Q$, порожденному свободной алгеброй счетного ранга $\mathfrak{F}_w$ из многообразия $\mathrm{Var}(\lambda)$. В противном случае на этой алгебре истинны все квазитождества, соответствующие допустимым в логике правилам вывода, в том числе и квазитождество, соответствующее правилу $rf(r)$. Тогда по лемме 1 из [10] существует нетривиальная антицепь сгустков $X \subset b^R$, не имеющая ко-накрытия ε в $\mathscr{F}$ (и, значит, в b^R), порождающего λ-фрейм как корень. Зафиксируем эту нетривиальную антицепь $X \subset b^R$.

Рассмотрим множество $\mathscr{X}$, состоящее из всех дизъюнктивных членов посылки правила $rf(r)$, имеющих в $\mathscr{B}$ непустое множество истинности, т. е. $\mathscr{X} := \{\phi_j \mid \exists c \in b^R : c \Vdash_V \phi_j\}$. Определим также множество $\mathscr{D}$ дизъюнктов правила $rf(r)$, истинных на элементах антицепи $X \subset b^R$, т. е. $\mathscr{D} := \{\phi_s \mid \exists e \in X\ e \Vdash_V \phi_s\}$.

Предположим, что на λ-ко-накрытии ε антицепи сгустков $X \subset b^R$ (если бы такое существовало в $\mathscr{F}$) истинна некоторая формула ϕ_ε из множества дизъюнктивных членов посылки правила $rf(r)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что только для такой формулы ϕ_ε выполняется

$$\theta_2(\phi_\varepsilon) = \theta_1(\phi_\varepsilon) \cup \bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi)).$$

Так как зафиксированная антицепь $X \subset b^R$ не имеет ко-накрытия ε в $\mathscr{F}$ (и, значит, в b^R), то для любого $\phi_j \in \mathscr{X}$ выполняется

$$\theta_2(\phi_j) \neq \theta_1(\phi_j) \cup \bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi)). \tag{1}$$

В частности, вследствие нетривиальности антицепи $X \subset b^R$ получаем $|\mathscr{D}| > 1$. Определим также

$$P_V := \mathrm{Var}(rf(r)) = \{x_0, \dots, x_k\};$$

$$P_T := \mathrm{Var}\Big(\bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi))\Big) = \{p \mid \exists\, c \in X : \ c \Vdash_V p \vee c \Vdash_V \Diamond p\}.$$

Пусть $n := |\mathscr{D}|$, $m := |P_V - P_T|$, т. е. n и m равны мощности множеств $\mathscr{D}$ и $P_V - P_T$ соответственно. Ясно, что $n > 1$, $m > 0$. Если $m = 0$, т. е. $\mathrm{Var}\big(\bigcup_{\phi\in\mathscr{D}}(\theta_1(\phi)\cup\theta_2(\phi))\big) = \{x_0,\dots,x_k\}$, $b \Vdash_V \phi_b$, для некоторого $\phi_b \in \mathscr{Z}$ и $\forall x \in X \quad bRx$, то $b \Vdash_V \Diamond x_i$, $0 \le i \le k$. Тогда

$$\theta_2(\phi_b) = \theta_1(\phi_b) \cup \bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi)\cup\theta_2(\phi)),$$

что противоречит (1). Следовательно, $m > 0$.

Зафиксируем взаимно однозначное соответствие f между $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ и $\mathscr{D}$, а также отображение g множества $P_V - P_T$ на $\{q\}$. Теперь расширим означивание V на $\mathscr{B}$ с переменных правила $rf(r)$ на переменные правила $\mathscr{R}_n$ следующим образом:

$$V(p_i) := V(f(p_i)) \ \&\ V(q) := V(g^{-1}(q)) = V(P_V - P_T). \tag{2}$$

Легко заметить, что

$$x \Vdash_V p_i \iff x \Vdash_V \phi_{j_i}, \quad \text{где } \phi_{j_i} \in \mathscr{D};$$

$$x \Vdash_V q \iff x \Vdash_V y, \quad \text{где } y \in \mathrm{Var}(rf(r)) \setminus P_T.$$

При таком определении означивания V верны следующие утверждения.

Утверждение 3.3. *Справедливо $b \Vdash_V A_n$ и $b \nVdash_V \Box\neg A_n$.*

Доказательство. Первая часть легко следует из определения алгебры $\mathscr{B}$ и выбора множеств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{Z}$. Действительно, $\forall e \in X \quad bRe \wedge e \Vdash_V \phi_j$, $\phi_j \in \mathscr{D}$. Следовательно, по определению означивания выполняется $e \Vdash_V p_i$, $1 \le i \le n$. Тогда по транзитивности отношения заключаем, что $b \Vdash_V \Diamond p_i\ \forall i \le n$ и, значит, $b \Vdash_V \bigwedge_{1\le i\le n} \Diamond p_i$.

Вторая часть следует из рефлексивности элемента b: если $b \Vdash_V \Box\neg A_n$, то на всех элементах, достижимых из b, в том числе и на самом b, должно быть истинно $\neg A_n$, что противоречит $b \Vdash_V A_n$. Утверждение доказано. □

Утверждение 3.4. *При означивании V выполняется $b \Vdash_V \Box A_{n,1}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный $c \in b^R$ и предположим $\forall i\ c \Vdash_V p_i$, отсюда $c \Vdash_V f(p_i)$ и, следовательно, $c \Vdash_V \phi_j$ для всех $\phi_j \in \mathscr{D}$. Тогда существует $y \in P_T : c \Vdash_V y \vee \Diamond y$, что влечет $\forall x \in (P_V - P_T)\, c \Vdash_V \neg\Diamond x$. Значит, $c \Vdash_V \neg\Diamond q$. Таким образом, $c \Vdash_V A_{n,1}$, откуда в силу произвольности выбора элемента $c \in b^R$ заключаем, что $b \Vdash_V \Box A_{n,1}$. Утверждение доказано. □

Утверждение 3.5. *При означивании V выполняется $b \nVdash_V \Box(A_n \wedge B)$.*

Доказательство. Предположим, что $b \Vdash_V \Box A_n$, т. е. $\forall c \in b^R\, c \Vdash_V A_n$. Кроме того, в силу выбора элемента c выполняется $c \Vdash_V \phi_j$, $\phi_j \in \mathscr{Z}$. Тогда $c \Vdash_V A_n \iff c \Vdash_V \phi_{j_i}$ для всех $i = [1, n]$ и $\phi_{j_i} \in \mathscr{D}$. Следовательно, в силу рефлексивности элемента c заключаем $c \Vdash_V \Diamond\phi_{j_i}\ \forall\phi_{j_i} \in \mathscr{D}$. Отсюда вытекает $P_T \subseteq \theta_2(\phi_j)$.

Пусть также $c \Vdash_V q \vee \neg\Diamond q$. Пусть $c \Vdash_V \Diamond x_i$, $x_i \in P_V - P_T$. Значит, в соответствии с истинностью $c \Vdash_V B$ получаем $c \Vdash_V x_i$ для $x_i \notin P_T$. Таким образом, $x_i \in \theta_1(\phi_j)$.

Итак, доказанное выше влечет

$$\theta_2(\phi_j) = \theta_1(\phi_j) \cup \bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi)\cup\theta_2(\phi)),$$

и $\phi_j \in \mathscr{Z}$, что противоречит (1). Утверждение доказано. □

Из утверждений 3.3–3.5 вытекает

Лемма 3.6. $\mathscr{B} \Vdash_V \Box(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B))$ & $\mathscr{B} \nVdash_V \Box\neg A_n$.

Теперь мы должны задать означивание V переменной z правила $\mathscr{R}_n$ так, чтобы опровергнуть $\mathscr{R}_n$ на алгебре $\mathscr{A}$.

Лемма 3.7. $\mathscr{A} \not\models_V \mathscr{R}_n$.

Доказательство. В силу $b \Vdash_V \bigvee \phi_j$ существует единственная формула $\phi_b \in \mathscr{Z}$ такая, что $b \Vdash_V \phi_b$. Определим означивание V переменной z на алгебре $\mathscr{A}$ следующим образом:

$$V(z) := V\Big(\neg\Big[\Diamond\phi_b \wedge \bigwedge_{\phi_j \in \phi(b)} \Diamond\phi_j \wedge \Box\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Z}} \phi_j\Big)\Big]\Big).$$

Так как $b \Vdash_V \phi_b$ и $\mathscr{Z} = \{\phi_j \mid \exists c \in b^R \; c \Vdash_V \phi_j\}$, то $b \nVdash_V z$. Следовательно, $b \nVdash_V \Box z$, и, как показано ранее, $b \nVdash_V \Box\neg A_n$. Таким образом, заключение правила $\mathscr{R}_n$ опровергается на элементе b означивании V.

Покажем, что на алгебре $\mathscr{A}$ посылка этого правила истинна при означивании V. Пусть существует $c \in \mathscr{F} : c \nVdash_V \Box z$. Тогда по определению $V(z)$ получаем

$$\exists d : cRd \wedge d \Vdash_V \phi_b \wedge c \Vdash_V \bigwedge_{\phi_j \in \phi(b)} \Diamond\phi_j \wedge \Box\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Z}} \phi_j\Big). \tag{3}$$

По выбору элемента b имеем $b \nVdash_V \Box x_0$. Отсюда заключаем, что существует элемент g, достижимый по отношению R из элемента b, такой, что выполняется $g \nVdash_V x_0$, в частности, $g \Vdash_V \neg x_0$. В силу истинности на $g \in b^R$ посылки правила $\mathscr{R}_n$ по лемме 3.6 можем заключить $g \Vdash_V \phi_j$ для некоторого $\phi_j \in \mathscr{Z}$. Отсюда по (3) $\exists w \in c^R : w \Vdash_V \phi_j$ для того же $\phi_j \in \mathscr{Z}$. Следовательно, $w \nVdash_V x_0$, откуда вытекает $c \nVdash_V \Box x_0$.

Напомним, что множество $\phi(b)$ выбиралось как максимальное множество дизъюнктов ϕ_j, истинных на b^R. По (3) множество $\phi(c)$ также является максимальным и $\phi(c) = \phi(b)$. Таким образом, множества элементов, достижимых из элементов b и c соответственно, имеют в совокупности одно и то же множество формул ϕ_j, истинных при означивании V. Отсюда и $c \nVdash_V \Box x_0$ можем заключить, что $c \Vdash_V \Box(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B))$, используя те же аргументы, что и для элемента b при доказательстве леммы 3.6. Таким образом, посылка правила истинна на произвольном элементе $c \in \mathscr{A}$, и теорема 3.2 доказана. $\Box$

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно следует

Теорема 3.8. *Пусть задана модальная логика $\lambda \supseteq Grz$, которая*
(i) *финитно аппроксимируема;*
(ii) *имеет слабое свойство ко-накрытий;*
(iii) *обладает дизъюнктивным свойством.*
Тогда множество правил $\mathscr{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, образуют базис допустимых правил вывода логики λ.

Следствие 3.9. *Множество правил $\mathscr{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, образуют базис допустимых правил вывода логики Grz.*

Напомним, что логика $S4.1$ определяется как $S4.1 := S4 \oplus \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$. Соответственно класс фреймов, адекватных логике $S4.1$, удовлетворяет условию $\forall x\, \exists y\, [xRy \,\&\, \forall\, z(yRz \implies z = y)$ (см., например, теорему 2.3.49 в [3]). В данном случае можно показать, что для любой логики, расширяющей логику $S4.1$, условия леммы 1 из [10] выполнены. Значит, аналогично теореме 3.8 доказывается

Следствие 3.10. *Пусть модальная логика* $\lambda \supseteq S4.1$ *удовлетворяет условиям* (i)–(iii) *теоремы* 3.8. *Тогда множество правил* $\mathscr{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *образуют базис допустимых правил вывода логики* λ, *в частности, и логики* $S4.1$.

Говорим, что логика λ конечной ширины $\mathscr{W}$, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое* $\mathscr{W}$*-свойство ко-накрытий*, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathscr{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathscr{X}$ сгустков из $\mathscr{F}$, состоящей не более чем из $\mathscr{W}$ сгустков, фрейм $\mathscr{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия к фрейму $\bigcup_{c \in \mathscr{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом.

Теорема 3.11. *Пусть задана модальная логика* $\lambda \supseteq Grz$ *такая, что*

(i) λ *финитно аппроксимируема;*

(ii) λ *имеет слабое* $\mathscr{W}$*-свойство ко-накрытий;*

(iii) λ *обладает дизъюнктивным свойством;*

(iv) *ширина логики* λ *конечна и ограничена числом* $\mathscr{W}$.

Тогда множество правил $\mathscr{R}_n$, $1 \leq n \leq \mathscr{W}$, *образуют базис допустимых правил вывода логики* λ. *В частности, логика имеет конечный* (*и независимый*) *базис для допустимых правил вывода.*

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 3.8. Конечность базиса $\mathscr{R}_n$, $1 \leq n \leq \mathscr{W}$, следует из конечности ширины логики. Так как ширина логики ограничена числом $\mathscr{W}$ и все сгустки вырожденные, то мощность множества $\mathscr{D}$ (антицепи $\mathscr{X}$, допускающей λ-ко-накрытие), также ограничена этим числом. По определению $0 < n = |\mathscr{D}| \leq \mathscr{W}$. □

Следствие 3.12. *Множество правил* $\mathscr{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$, *образуют базис допустимых правил вывода логик конечной ширины* $GrzI_k$.

Несложно заметить, что число финитно аппроксимируемых логик, удовлетворяющих условиям теоремы 3.11, не менее чем счетно. Для этого определим последовательность фреймов $\mathscr{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$, следующим образом. Зафиксируем произвольное число $K > 2$. Первый слой фрейма $\mathscr{F}_i$ для каждого i состоит из i одноэлементных сгустков, образующих антицепь. Для построения второго слоя фрейма $\mathscr{F}_i$ выбираем все нетривиальные антицепи не более чем из K сгустков первого слоя и к каждой такой антицепи приписываем снизу вырожденный сгусток как ко-накрытие. Для построения третьего слоя опять выбираем все нетривиальные антицепи не более чем из K сгустков первого и второго слоев, содержащие хотя бы один сгусток второго слоя. Затем к каждой такой антицепи приписываем снизу вырожденный сгусток как ко-накрытие. Продолжая описанную процедуру для последующих слоев, получим бесконечный фрейм ширины K, в котором любая нетривиальная антицепь, состоящая не более чем из K сгустков, имеет ко-накрытие.

Затем определим логики $\lambda_i := \lambda(\mathscr{F}_i)$. Ясно, что полученные логики являются финитно аппроксимируемыми и имеют ширину K. Из определения фреймов $\mathscr{F}_i$ также следует, что логики λ_i имеют слабое $\mathscr{W}$-свойство ко-накрытий.

Несложно заметить, что данные логики обладают дизъюнктивным свойством. Действительно, если $\Box\alpha \vee \Box\beta \in \lambda_i$, но $\Box\alpha \notin \lambda_i$ и $\Box\beta \notin \lambda_i$, то существуют фреймы F_1, F_2 такие, что $F_1 \not\models \Box\alpha$, $F_2 \not\models \Box\beta$. Без потери общности можем считать эти фреймы корневыми, т. е. $F_1 = a^R$, $F_2 = b^R$. Рассмотрим фрейм $G := a^R \cup b^R$. Аналогично тому, как были построены фреймы $\mathscr{F}_i$, добавляя по слоям (начиная с первого) ко-накрытия ко всем антицепям, состоящим не более чем из K сгустков и не имеющим ко-накрытия в G, получим ко-последователь этого фрейма, адекватный логике. В полученном фрейме антицепь $\{a, b\}$ по слабому $\mathscr{W}$-свойству ко-накрытий имеет ко-накрытие. Очевидно, что на этом ко-накрытии опровергается формула $\Box\alpha \vee \Box\beta$, что противоречит предположению $\Box\alpha \vee \Box\beta \in \lambda_i$.

Аналогично можно показать, что условиям теоремы 3.8 удовлетворяет не менее чем счетное число логик. Для этого можно построить последовательность фреймов $\mathscr{F}_i^w$ (аналогично тому, как были построены фреймы $\mathscr{F}_i$), добавляя на каждом шаге построения ко-накрытия ко всем нетривиальным антицепям, а не только состоящим не более чем из K сгустков. Тогда аналогичным образом можем показать, что логики

$$\lambda_i := \lambda(\mathscr{F}_i^w), \quad i \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют условиям (i)–(iii) этой теоремы.

Известно, что T-перевод Гёделя — Маккинси — Тарского σ расширения λ интуиционистской логики Int в наибольший модальный напарник $\sigma(\lambda)$ сохраняет многие важные свойства логики: финитную аппроксимируемость, дизъюнктивное свойство, ширину логики (см., например, теоремы 2.7.2, 2.7.21 из [3]). Кроме того, логика λ и ее наибольший модальный напарник $\sigma(\lambda) \supseteq Grz$ имеют один и тот же характеристический класс фреймов. По теореме 3.2.2 из [3] правило вывода r допустимо в суперинтуиционистской логике λ, если и только если $T(r)$ допустимо в наибольшем модальном напарнике $\sigma(\lambda)$. Отсюда и из теорем 3.8, 3.11 вытекает следующая

Теорема 3.13. *Пусть задана логика $\lambda \supseteq Int$, удовлетворяющая условиям* (i)–(iii) *теоремы* 3.8 *или условиям* (i)–(iv) *теоремы* 3.11.

Тогда множество правил

$$\{\mathscr{R}_n^i : T(\mathscr{R}_n^i) = \mathscr{R}_n, \quad n > 1, \; n \in \mathbb{N}\}$$

образует базис допустимых правил вывода логики λ. В частности, если ширина логики конечна, то логика имеет конечный (*и независимый*) *базис для допустимых правил вывода.*

Очевидно, что полученные базисы допустимых правил дают также описание базиса квазитождеств, истинных на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$, $\lambda \supseteq S4.1$, Grz и логика λ удовлетворяет условиям (i)–(iii) теоремы 3.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzen P.* Einfúhrung in die operative Logik und Mathematik. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1955.
2. *Fridman H.* One hundred and two problems in mathematical logic // J. Symbolic Logic. 1975. V. 40, N 3. P. 113–130.
3. *Rybakov V. V.* Admissibility of logical inference rules. New York; Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1997. (Stud. Logic Found. Math.; V. 136).
4. *Ghilardi S.* Unification in Intuitionistic Logic // J. Symbolic Logic. 1999. V. 64, N 2. P. 859–880.
5. *Циткин А. И.* О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 314–323.
6. *Rybakov V. V., Terziler M., Remazki V. V.* A basis in semi-reduced form for the admissible rules of the intuitionistic logic IPC // Math. Logic Quart. 2000. V. 46, N 2. P. 207–218.
7. *Iemhoff R.* On the admissible rules of intuitionistic propositional logic // J. Symbolic Logic. 2001. V. 66, N 2. P. 281–294.
8. *Iemhoff R.* A(nother) characterization of intuitionistic propositional logic // Ann. Pure Appl. Logic. 2003. V. 113, N 1–3. P. 161–173.

9. *Rybakov V. V.* An explicit basis for rules admissible in modal system S4 // Bull. Sect. Logic. 1999. V. 28, N 3. P. 135–143.

10. *Римацкий В. В.* О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2 // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 4. С. 436–455.

Статья поступила 5 марта 2007 г.

Римацкий Виталий Валентинович
ИГУРЭ СФУ, каф. высшей математики-4,
пр. Свободный, 82, Красноярск 660041
`Gemmeny@rambler.ru`