Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.43+517.946

О ПОЛНОТЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. С. Мирзоев, М. Ю. Салимов

Аннотация. Найдены условия разрешимости краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке, исследовано поведение резольвенты соответствующего операторного пучка и доказаны двукратная полнота системы производных цепочек собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевой задаче на отрезке, и полнота элементарных решений однородного уравнения в пространстве решений.

Ключевые слова: краевая задача, операторно-дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, самосопряженный оператор, собственные и присоединенные векторы, резольвента.

1. Введение

Многие задачи механики, техники и математической физики приводят к исследованию полноты или базисности всех или части собственных и присоединенных векторов некоторых полиномиальных операторных пучков, полноты элементарных решений соответствующих операторно-дифференциальных уравнений и разрешимости задачи Коши или краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений [1–14].

Например, в работе [2] дано определение n-кратной полноты и указана связь с разрешимостью соответствующей задачи Коши. В работах [3–10] исследована разрешимость некоторых краевых задач с полнотой части собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости. В [11, 12] рассмотрена полнота собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевым условиям на конечном отрезке. В работах [8, 19] указана полнота элементарных решений в некоторых пространствах решений. В [15–20] исследованы применения вопросов полноты или разложения по собственным и присоединенным векторам к задачам механики, в частности теории упругости.

Отметим, что для обоснования разложения по собственным и присоединенным векторам метода Фурье очень важную роль играет полнота элементарных решений однородного операторно-дифференциального уравнения в пространстве решений данной задачи. В данной работе получены условия разрешимости краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения на конечном отрезке, исследовано поведение резольвенты соответствующего операторного пучка, доказаны двукратная полнота системы производных цепочек собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевым задачам на отрезке, и полнота элементарных решений однородного уравнения в пространстве решений.

Отметим, что полнота производных цепочек собственных и присоединенных векторов и элементарных решений, отвечающих краевым задачам на отрезке, исследована очень мало [11, 12], причем получены теоремы о полноте с конечномерным дефектом. В [11, 12] указано, что получение теоремы полноты во всем пространстве — довольно тонкая задача.

2. Некоторые понятия и вспомогательные предложения

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$. Обозначим через H_γ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т. е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $\gamma \geq 0$, $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $(x, y) \in D(A^\gamma)$.

Пусть $L_2((0;1);H)$ — гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$, определенных почти всюду на $(0;1)$, со значениями в H, измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера и

$$\|f\|_{L_2((0;1);H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Определим гильбертово пространство вектор-функций [1]

$$W_2^2((0;1);H) = \{u \mid u'' \in L_2((0;1);H), A^2 u \in L_2((0;1);H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2((0;1);H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2((0;1);H)} + \|A^2 u\|^2_{L_2((0;1);H)}\right)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений [1].

Определим следующее подпространство $W_2^2((0;1);H)$:

$$\mathring{W}_2^2((0;1);H) = \left\{u \mid u \in W_2^2((0;1);H), u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

Обозначим через $D([0;1];H_2)$ множество бесконечно дифференцируемых функций со значениями в H_2. Как известно, линейное множество $D([0;1];H_2)$ всюду плотно в пространстве $W_2^2((0;1);H)$ [1, с. 24]. Отсюда следует, что и пространство

$$\mathring{D}([0;1];H_2) = \{u \mid u \in D([0;1];H_2), u(0) = u(1) = 0\}$$

всюду плотно в пространстве $\mathring{W}_2^2((0;1);H)$.

Рассмотрим в пространстве H полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = -(\lambda E - \omega_1 A)(\lambda E - \omega_2 A) + \lambda A_1 + A_2, \tag{1}$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A — положительно определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1};

2) $\omega_1 < 0$, $\omega_2 > 0$;

3) операторы $B_1 = A_1A^{-1}$, $B_2 = A_2A^{-2}$ ограничены в H.

Свяжем пучок $P(\lambda)$ со следующей краевой задачей:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u = -\left(\frac{d}{dt} - \omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt} - \omega_2 A\right)u(t) + A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t) = 0, \quad t \in (0;1), \tag{2}$$

$$u(0) = \chi_0, u(1) = \chi_1. \tag{3}$$

Определение 1. Если вектор-функция $u(t) \in W_2^2((0;1);H)$ удовлетворяет уравнению (2) почти всюду, граничным условиям (3) в смысле сходимости пространства $H_{3/2}$:

$$\lim_{t\to 0, t\in(0;1)} \|u(t) - \chi_0\|_{3/2} = 0, \quad \lim_{t\to 1, t\in(0;1)} \|u(t) - \chi_1\|_{3/2} = 0,$$

и имеет место неравенство

$$\|u(t)\|_{W_2^2((0;1);H)} \leq \mathrm{const}(\|\chi_0\|_{3/2} + \|\chi_1\|_{3/2}),$$

то задача (2), (3) называется *регулярно разрешимой*, а $u(t)$ — *регулярным решением задачи* (2), (3).

Определение 2. Если уравнение $P(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет ненулевое решение φ_0, то λ_0 называется *собственным числом операторного пучка* $P(\lambda)$, а φ_0 — *собственным вектором операторного пучка* $P(\lambda)$, отвечающим собственному числу λ_0.

Определение 3. Пусть λ_0 — собственное число, а φ_0 — один из собственных векторов, отвечающий числу λ_0. Система векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ называется *системой* (цепочкой) *присоединенных векторов к собственному вектору* φ_0, если векторы этой системы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$P(\lambda_0)\varphi_k + \frac{P'(\lambda_0)}{1!}\varphi_{k-1} + \frac{P''(\lambda_0)}{2!}\varphi_{k-2} = 0, \quad k = \overline{0,m}, \ \varphi_{-1} = \varphi_{-2} = 0,$$

где $P'(\lambda_0) = -2\lambda_0 E + (\omega_1 + \omega_2)A + A_1$, $P''(\lambda_0) = -2E$ (E — единичный оператор в H).

Пусть $\sigma_\infty(H)$ — множество вполне непрерывных операторов, действующих в H, а $L(H)$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих в H. Если $T \in \sigma_\infty(H)$, то $(T^*T)^{1/2}$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор в H. Собственные числа оператора $(T^*T)^{1/2}$ будем называть *s-числами оператора* T. Ненулевые s-числа оператора T будем нумеровать в порядке убывания с учетом их кратности. Обозначим

$$\sigma_p = \left\{ T \mid T \in \sigma_\infty; \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(T) < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty).$$

Определение 4. Пусть выполняются условия 1–3 и

4) $(|\omega_1\omega_2|E + B_2)$ имеет ограниченный обратный оператор в H.

Тогда будем говорить, что *пучок* $P(\lambda)$ *принадлежит* K.

Лемма Келдыша [2]. *Пусть $L(\lambda)$ — аналитическая на связном открытом множестве D оператор-функция со значениями в σ_∞, причем хотя бы в одной точке D оператор $E + L(\lambda)$ обратим. Тогда для всех λ из D, за исключением, быть может, некоторого множества изолированных точек, не имеющего предельных точек внутри области, оператор $E + L(\lambda)$ обратим. Точки, в которых* *оператор* $E+L(\lambda)$ *не имеет обратного, являются собственными числами* $E+L(\lambda)$ *и полюсами* $(E+L(\lambda))^{-1}$*, причем главная часть* $(E+L(\lambda))^{-1}$ *в окрестности* λ_i *имеет следующий вид:*

$$\sum_{(j)} \frac{(\cdot, z_{i,j,0})y_{i,j,0}}{(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}+1}} + \frac{(\cdot, z_{i,j,1})y_{i,j,0} + (\cdot, z_{i,j,0})y_{i,j,1}}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}} + \dots \\ + \frac{(\cdot, z_{i,j,m_{ij}})y_{i,j,0} + \dots + (\cdot, z_{i,j,0})y_{i,j,m_{ij}}}{\lambda-\lambda_i},$$

где $\{y_{i,j,0},\dots,y_{i,j,m_{ij}}\}$ *— произвольная каноническая система собственных и присоединенных векторов* [2] *операторного пучка* $E+L(\lambda)$ *при* $\lambda=\lambda_i$*, а* $\{z_{i,j,0},\dots,z_{i,j,m_{ij}}\}$ *— некоторая каноническая система собственных и присоединенных векторов операторного пучка* $(E+L(\bar{\lambda}))^*$ *при* $\lambda=\bar{\lambda}_i$*.*

Теперь покажем, что операторный пучок $P(\lambda)$ из класса K имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности.

Действительно,

$$P(\lambda) = -\lambda^2 E + (\omega_1+\omega_2)\lambda A + |\omega_1\omega_2|A^2 + \lambda A_1 + A_2 \\ = (|\omega_1\omega_2|E + B_2)(E+L(\lambda))A^2,$$

где

$$L(\lambda) = \lambda(|\omega_1\omega_2|E+B_2)^{-1}((\omega_1+\omega_2)A^{-1} + B_1A^{-1}) - \lambda^2(|\omega_1\omega_2|E+B_2)^{-1}A^{-2}.$$

Так как $B_1, B_2 \in L(H)$, $A^{-1}\in\sigma_\infty(H)$, $(|\omega_1\omega_2|E+B_2)^{-1}\in L(H)$, то

$$(|\omega_1\omega_2|E+B_2)^{-1}((\omega_1+\omega_2)A^{-1}+B_1A^{-1}) \in \sigma_\infty(H),$$

$$(|\omega_1\omega_2|E+B_2)^{-1}A^{-2}\in\sigma_\infty(H).$$

Следовательно, $L(\lambda)\in\sigma_\infty(H)$ при любом $\lambda\in C$, и $E+L(0)=E$ обратим. Поэтому $E+L(\lambda)$ по лемме Келдыша обратим везде, кроме изолированных точек, которые являются собственными значениями пучка $E+L(\lambda)$ и имеют предельную точку только в бесконечности. Из представления

$$P(\lambda) = (|\omega_1\omega_2|E+B_2)(E+L(\lambda))A^2$$

следует, что это свойство относится и к операторному пучку $P(\lambda)$.

Определение 5. Пусть λ_i — собственное число пучка $P(\lambda)$, а $\{\varphi_{i,j,0},\varphi_{i,j,1},\dots,\varphi_{i,j,m_{ij}}\}$ — система собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному числу λ_i. Тогда вектор-функции

$$u_{i,j,h}(t) = e^{\lambda_i t}\left(\varphi_{i,j,h} + \frac{t}{1!}\varphi_{i,j,h-1} + \dots + \frac{t^h}{h!}\varphi_{i,j,0}\right),$$

$$i=0,1,2,\dots,\ j=1,\dots,q_i,\ h=0,1,\dots,m_{ij},$$

удовлетворяют уравнению $P\big(\frac{d}{dt}\big)u(t)=0$ и называются *элементарными решениями однородного уравнения.*

Верно и обратное: если $u_{i,j,h}(t)$ удовлетворяют уравнению $P\big(\frac{d}{dt}\big)u(t)=0$, то λ_i является собственным числом операторного пучка $P(\lambda)$, а $\{\varphi_{i,j,h}\}$ — система собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному числу λ_i.

Определение 6. В пространстве $\widetilde{H} = H_{3/2} \oplus H_{3/2}$ из элементарных решений $u_{i,j,h}(t)$ образуем систему $m_{ij} + 1$ элементов

$$\widetilde{\varphi}_{i,h} = \big(\varphi^{(0)}_{i,j,h}, \varphi^{(1)}_{i,j,h}\big), \quad \varphi^{(0)}_{i,j,h} = u_{i,j,h}(0), \quad \varphi^{(1)}_{i,j,h} = u_{i,j,h}(1), \quad h = 0, \dots, m_{i,j}.$$

Если система $K(C) = \{\widetilde{\varphi}_{i,h}\}$, построенная для всех собственных чисел λ_i и отвечающих им всех собственных и присоединенных векторов, полна в $\widetilde{H} = H_{3/2} \oplus H_{3/2}$, то будем говорить, что система $K(C)$ — производные цепочки собственных и присоединенных векторов — *двукратно полна* в $H_{3/2}$.

Легко проверить, что

$$\varphi^{(0)}_{i,j,h} = \varphi_{i,j,h}, \quad \varphi^{(1)}_{i,j,h} = \sum_{q=0}^{h} \frac{1}{q!} \frac{d^q e^\lambda}{d\lambda^q}\bigg|_{\lambda=\lambda_i} \varphi_{i,j,h-q} = \sum_{q=0}^{h} \frac{e^{\lambda_i}}{q!} \varphi_{i,j,h-q}.$$

Из леммы Келдыша следует, что для двукратной полноты $K(C)$ в $H_{3/2}$ необходимо и достаточно, чтобы из голоморфности вектор-функции

$$R(\lambda) = (A^{3/2} P^{-1}(\bar{\lambda}))^* (A^{3/2} g_0 + e^\lambda A^{3/2} g_1)$$

во всей комплексной плоскости C вытекало, что $g_0 = g_1 = 0$.

3. Условия разрешимости краевой задачи

Укажем условия регулярной разрешимости задачи (2), (3):

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u = -\left(\frac{d}{dt} - \omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt} - \omega_2 A\right)u + A_1 u' + A_2 u = 0, \quad t \in (0,1),$$

$$u(0) = \chi_0, \quad u(1) = \chi_1, \quad \chi_0, \quad \chi_1 \in H_{3/2}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–3 *и имеет место неравенство*

$$\alpha = d_1 \|B_1\| + d_0 \|B_2\| < 1,$$

где $d_1 = 1/2|\omega_1\omega_2|^{1/2}$, $d_0 = 1/|\omega_1\omega_2|$. *Тогда задача* (2), (3) *регулярно разрешима.*

Доказательство. При $A_1 = A_2 = 0$ уравнение (2) имеет общее решение из $W_2^2((0;1);H)$ вида

$$u_0(t) = e^{\omega_1 t A} x_1 + e^{\omega_2 (t-1) A} x_2 \quad (\omega_1 < 0,\ \omega_2 > 0),$$

где $x_1 \in H_{3/2}$, $x_2 \in H_{3/2}$ [1], $e^{\omega_1 t A}$, $e^{\omega_2 (t-1) A}$ — сильно непрерывные полугруппы ограниченных операторов, порожденных $\omega_1 A$ и $-\omega_2 A$ соответственно. Из граничных условий легко найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = (E - e^{(\omega_1 - \omega_2)A})^{-1} (\chi_0 - e^{-\omega_2 A} \chi_1) \in H_{3/2},$$

$$x_2 = (E - e^{(\omega_1 - \omega_2)A})^{-1} (\chi_1 - e^{\omega_1 A} \chi_0) \in H_{3/2}.$$

Очевидно, что

$$\|u_0(t)\|_{W_2^2((0;1);H)} \le \mathrm{const}(\|x_1\|_{3/2} + \|x_2\|_{3/2}) \le \mathrm{const}(\|\chi_0\|_{3/2} + \|\chi_1\|_{3/2}),$$

т. е. задача (2), (3) в этом случае регулярно разрешима. Теперь считаем, что хотя бы один из A_j $(j = 1, 2)$ отличен от нуля, и покажем, что задача (2), (3) регулярно разрешима. С этой целью будем искать регулярное решение задачи (2), (3) в виде $u(t) = v(t) + u_0(t)$, где $u_0(t)$ — решение задачи (2), (3) при

$A_1 = 0, A_2 = 0$, а $v(t) \in W_2^2((0;1);H)$. Очевидно,что $v(0) = v(1) = 0$, т. е. $v(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2((0;1);H)$. Таким образом, относительно $v(t)$ получаем следующую краевую задачу:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = P_0\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) + P_1\left(\frac{d}{dt}\right)v = -P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u_0(t), \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что

$$P_0 v \equiv P_0\left(\frac{d}{dt}\right)v = -\left(\frac{d}{dt} - \omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt} - \omega_2 A\right)v, \quad P_1 v \equiv P_1\left(\frac{d}{dt}\right)v = A_1\frac{dv}{dt} + A_2 v,$$

$$g(t) \equiv -P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u_0(t) = -A_1\left(\frac{d}{dt}\right)u_0(t) - A_2 u_0(t) = -B_1 A\left(\frac{d}{dt}\right)v_0(t) - B_2 A^2 v_0(t).$$

Так как $u_0(t) \in W_2^2((0;1);H)$, по теореме о промежуточных производных [1] $A\frac{du_0}{dt}$, $A^2 u_0 \in L_2((0;1);H)$, причем

$$\|g(t)\|_{L_2((0;1);H)} \le \mathrm{const}\,\|u_0(t)\|_{W_2^2((0;1);H)} \le \mathrm{const}(\|\chi_0\|_{3/2} + \|\chi_1\|_{3/2}).$$

Таким образом, получаем следующую задачу:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = -\left(\frac{d}{dt} - \omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt} - \omega_2 A\right)v + A_1\frac{dv}{dt} + A_2 v = g(t), \tag{4}$$

$$v(0) = v(1) = 0, \tag{5}$$

где $g(t) \in L_2((0;1);H)$.

Сначала рассмотрим задачу

$$P_0\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = -\left(\frac{d}{dt} - \omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt} - \omega_2 A\right)v = g(t), \tag{6}$$

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^2((0;1);H)$ на $L_2((0;1);H)$.*

Доказательство. Очевидно, что уравнение $P_0 v = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2((0;1);H)$. С другой стороны, для любого $g(t)$ вектор-функция

$$v_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_0^{-1}(-i\xi)\left(\int_0^1 g(s)e^{i(s-t)\xi}ds\right)d\xi, \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty;\infty),$$

удовлетворяет уравнению $P_0\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = g(t)$ почти всюду в $(0;1)$. Покажем, что $v_1(t) \in W_2^2(R;H)$ [1]. Для этого достаточно доказать, что

$$\begin{aligned}\|v_1\|^2_{W_2^2(R;H)} &= \|v_1''\|^2_{L_2(R;H)} + \|A^2 v\|^2_{L_2(R;H)} \\ &= \|\xi^2\hat{v}_1(\xi)\|^2_{L_2(R;H)} + \|A^2\hat{v}_1(\xi)\|^2_{L_2(R;H)} \le \mathrm{const}\,\|g\|_{L_2((0;1);H)},\end{aligned}$$

где $\hat{v}_1(\xi)$ — преобразование Фурье вектор-функции $v_1(t)$.

Так как $\hat{v}_1(\xi) = P_0^{-1}(-i\xi)\hat{g}(\xi)$, имеем

$$\begin{aligned}\|\xi^2\hat{v}_1(\xi)\|_{L_2(R;H)} = \left\|\xi^2 P_0^{-1}(-i\xi)\hat{g}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} &\le \sup_\xi\left\|\xi^2 P_0^{-1}(-i\xi)\right\|\|\hat{g}(\xi)\|_{L_2(R;H)} \\ &= \sup_\xi\left\|\xi^2 P_0^{-1}(-i\xi)\right\|\|g\|_{L_2((0;1);H)}.\end{aligned}$$

С другой стороны, при $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left\|\xi^2 P_0^{-1}(-i\xi)\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)} \|\xi^2(-i\xi-\omega_1\mu)^{-1}(-i\xi-\omega_2\mu)^{-1}\|$$

$$\le \sup_{\mu\ge 0}\left(\xi^2\left(\xi^2+\omega_1^2\mu^2\right)^{-1/2}\left(\xi^2+\omega_2^2\mu^2\right)^{-1/2}\right) \le 1,$$

т. е. $\xi^2\hat{v}_1(\xi) \in L_2(R;H)$.

Аналогично получаем, что

$$\|A^2\hat{v}_1(\xi)\|_{L_2(R;H)} = \left\|A^2P_0^{-1}(-i\xi)\hat{g}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} \le \sup_{\xi}\left\|A^2P_0^{-1}(-i\xi)\right\|\|g\|_{L_2((0;1);H)}.$$

Так как при любом $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left\|A^2P_0^{-1}(-i\xi)\right\| \le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2\left(\xi^2+\omega_1^2\mu^2\right)^{-1/2}\left(\xi^2+\omega_2^2\mu^2\right)^{-1/2}\right| \le \frac{1}{|\omega_1\omega_2|},$$

то $A^2\hat{v}_1(\xi) \in L_2(R;H)$. Таким образом, $v_1(t) \in W_2^2(R;H)$. Сужение вектор-функции $v_1(t)$ на $[0;1]$ обозначим через $\xi(t)$. Очевидно, что $\xi(t) \in W_2^2((0;1);H)$. Поэтому $\xi(0), \xi(1) \in H_{3/2}$. Будем искать $v(t)$ в виде

$$v(t) = \xi(t) + e^{\omega_1 tA}x_1 + e^{\omega_2(1-t)A}x_2,$$

где $x_1, x_2 \in H_{3/2}$ — неизвестные векторы. Для определения x_1 и x_2 получаем следующую систему:

$$x_1 + e^{-\omega_2 A}x_2 = -\xi(0), \quad e^{\omega_1 A}x_1 + x_2 = -\xi(1).$$

Из этой системы находим векторы

$$x_1 = (E - e^{(\omega_1-\omega_2)A})^{-1}(e^{-\omega_2 A}\xi(1) - \xi(0)),$$

$$x_2 = (E - e^{(\omega_1-\omega_2)A})^{-1}(e^{\omega_1 A}\xi(0) - \xi(1)).$$

Очевидно, что $x_1, x_2 \in H_{3/2}$ и

$$\|v(t)\| \le \mathrm{const}\,\|g\|_{L_2((0;1);H)} \le \mathrm{const}(\|\chi_0\|_{3/2} + \|\chi_1\|_{3/2}).$$

Тем самым утверждение леммы вытекает из теоремы Банаха об обратном операторе.

Лемма 2. *При любом $v \in \mathring{W}_2^2((0;1);H)$ имеют место следующие оценки:*

$$\left\|A\frac{dv}{dt}\right\|_{L_2((0;1);H)} \le d_1\|P_0v\|_{L_2((0;1);H)} = \frac{1}{2|\omega_1\omega_2|^{1/2}}\|P_0v\|_{L_2((0;1);H)}, \tag{8}$$

$$\|A^2v\|_{L_2((0;1);H)} \le d_0\|P_0u\|_{L_2((0;1);H)} = \frac{1}{|\omega_1\omega_2|}\|P_0v\|_{L_2((0;1);H)}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $v \in \mathring{D}([0;1];H_2)$. Умножим уравнение $P_0(d/dt)v = f$ скалярно в пространстве $L_2((0;1);H)$ на вектор-функцию $A^2v(t)$ и найдем

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(P_0(d/dt)v, A^2v) &= \mathrm{Re}(-v'' + (\omega_1+\omega_2)Av' + |\omega_1\omega_2|A^2v, A^2v)_{L_2((0;1);H)}\\ &= -\mathrm{Re}(v'', A^2v)_{L_2((0;1);H)} + (\omega_1+\omega_2)\,\mathrm{Re}(Av', A^2v)_{L_2((0;1);H)}\\ &\qquad + |\omega_1\omega_2|\|A^2v\|^2_{L_2((0;1);H)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Легко видеть, что при $v \in \overset{\circ}{D}([0;1];H_2)$ $(v(0)=v(1)=0)$ после интегрирования по частям получаются следующие равенства:

$$(v'', A^2 v)_{L_2((0;1);H)} = -\|Av'\|^2_{L_2((0;1);H)}, \tag{11}$$

$$2\operatorname{Re}(Av', A^2 v) = 0. \tag{12}$$

Учитывая (11), (12) в (10), получаем

$$\operatorname{Re}(P_0 v, A^2 v)_{L_2((0;1);H)} = \|Av'\|^2_{L_2((0;1);H)} + |\omega_1\omega_2| \|A^2 v\|^2_{L_2((0;1);H)},$$

т. е.

$$|\omega_1\omega_2| \|A^2 v\|^2_{L_2((0;1);H)} \le \operatorname{Re}(P_0 v, A^2 v)_{L_2((0;1);H)} \le \|P_0 v\|_{L_2((0;1);H)} \|A^2 v\|_{L_2((0;1);H)}. \tag{13}$$

Следовательно,

$$\|A^2 v\|_{L_2((0;1);H)} \le \frac{1}{|\omega_1\omega_2|} \|P_0 v\|_{L_2((0;1);H)}.$$

Таким образом, верно неравенство (9). Применяя неравенство Юнга, из (13) при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|Av'\|^2_{L_2((0;1);H)} + |\omega_1\omega_2| \|A^2 v\|^2_{L_2((0;1);H)} \le \frac{\varepsilon}{2} \|P_0 v\|^2_{L_2((0;1);H)} + \frac{1}{2\varepsilon} \|A^2 v\|^2_{L_2((0;1);H)}.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/2|\omega_1\omega_2|$, получаем

$$\|Av'\|^2_{L_2((0;1);H)} \le \frac{1}{4|\omega_1\omega_2|} \|P_0 v\|^2_{L_2((0;1);H)},$$

или

$$\|Av'\|_{L_2((0;1);H)} \le \frac{1}{2|\omega_1\omega_2|^{1/2}} \|P_0 v\|_{L_2((0;1);H)}.$$

Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 1.

Запишем задачу (4), (5) в виде $P_0 v + P_1 v = g$, $g \in L_2((0;1);H)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^2_2((0;1);H)$. Так как P_0^{-1} обратим, при любом $\omega \in L_2((0;1);H)$ после замены $v = P_0^{-1}\omega$ получаем уравнение $\omega + P_1 P_0^{-1}\omega = g$ в пространстве $L_2((0;1);H)$.

По лемме 2 имеем

$$\begin{aligned}\big\|P_1 P_0^{-1}\omega\big\|_{L_2((0;1);H)} &= \|P_1 v\|_{L_2((0;1);H)} \le \|A_1 dv/dt\|_{L_2((0;1);H)} + \|A_2 v\|_{L_2((0;1);H)} \\ &\le \|B_1\| \|A dv/dt\|_{L_2((0;1);H)} + \|B_2\| \|A^2 v\|_{L_2((0;1);H)} \\ &\le (d_1\|B_1\| + d_0\|B_2\|) \|P_0 v\|_{L_2((0;1);H)} \\ &= (d_1\|B_1\| + d_0\|B_2\|) \|\omega\|_{L_2((0;1);H)} = \alpha \|\omega\|_{L_2((0;1);H)}.\end{aligned}$$

Из условия $\alpha < 1$ вытекает, что оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в $L_2((0;1);H)$, поэтому $v = P_0^{-1}\big(E + P_1 P_0^{-1}\big)^{-1} g$ и $\|v\|_{W_2^2((0;1);H)} \le \operatorname{const} \|g\|_{L_2((0;1);H)}$. Тогда

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_2^2((0;1);H)} = \|u_0 + v\|_{W_2^2((0;1);H)} &\le \|u_0\|_{W_2^2((0;1);H)} + \|v\|_{W_2^2((0;1);H)} \\ &\le \operatorname{const}(\|\chi_0\|_{3/2} + \|\chi_1\|_{3/2}).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

4. Об оценке резольвенты операторного пучка

Здесь проведем оценку резольвенты пучка $P(\lambda)$ на некоторых секторах, примыкающих к мнимой оси.

Теорема 2. *Пусть пучок*

$$P(\lambda) = -(\lambda E - \omega_1 A)(\lambda E - \omega_2 A) + \lambda A_1 + A_2$$

принадлежит классу K и имеет место неравенство

$$\alpha_1 = K_1\|B_1\| + K_0\|B_2\| < 1,$$

где $K_0 = 1/|\omega_1\omega_2|$, $K_1 = 1/(|\omega_1| + \omega_2)$. Тогда на мнимой оси имеют место оценки

$$\|\lambda^2 P^{-1}(\lambda)\| + \|\lambda A P^{-1}(\lambda)\| + \|A^2 P^{-1}(\lambda)\| \le \text{const}, \tag{14}$$

$$\|A^\alpha P^{-1}(\lambda)\| \le \text{const}\,|\lambda|^{\alpha-2}, \quad 0 < \alpha < 2,\ \lambda \ne 0. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\lambda = i\xi$ и

$$P_0(\lambda) = -\lambda^2 E + (\omega_1 + \omega_2)\lambda A + |\omega_1\omega_2| A^2, \quad P_1(\lambda) = \lambda A_1 + A_2.$$

Очевидно, что при $\lambda = i\xi$ резольвента $P_0^{-1}(i\xi)$ существует и

$$P_0^{-1}(\lambda) = -(\lambda E - \omega_1 A)^{-1}(\lambda E - \omega_2 A)^{-1}, \quad \lambda = i\xi,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) = \big(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\big)P_0(\lambda). \tag{16}$$

Отсюда при $\lambda = i\xi$

$$\begin{aligned}\big\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\big\| &\le \big\|\lambda A_1 P_0^{-1}(\lambda)\big\| + \big\|A_2 P_0^{-1}(\lambda)\big\| \\ &\le \big\|B_1\|\big\|A P_0^{-1}(\lambda)\big\| + \|B_2\|\big\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\big\|.\end{aligned} \tag{17}$$

С другой стороны, из спектрального разложения A следует, что

$$\begin{aligned}\big\|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\big\| &= \|\lambda A(\lambda E - \omega_1 A)^{-1}(\lambda E - \omega_2 A)^{-1}\| \\ &= \sup_{\mu\in\sigma(A)} \frac{\mu|\xi|}{((\xi^2 + |\omega_1\omega_2|\mu^2)^2 + ((\omega_1+\omega_2)\mu\xi)^2)^{1/2}} \\ &\le \sup_{\mu\ge\mu_0} \left(\frac{\xi^2/\mu^2}{\xi^4/\mu^4 + |\omega_1\omega_2|^2 + \big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)\xi^2/\mu^2}\right)^{1/2} \\ &\le \sup_{\eta\ge 0}\left(\frac{\eta}{\eta^2 + |\omega_1\omega_2|^2 + \big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)\eta}\right)^{1/2} = \frac{1}{|\omega_1| + \omega_2}.\end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\big\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\big\| &= \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left(\frac{\mu^4}{\xi^4 + |\omega_1\omega_2|^2\mu^4 + \big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)\mu^2\xi^2}\right)^{1/2} \\ &\le \sup_{\eta\ge 0}\left(\frac{1}{\eta^2 + |\omega_1\omega_2|^2 + \big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)\eta}\right)^{1/2} \le \frac{1}{|\omega_1\omega_2|}.\end{aligned} \tag{19}$$

Тогда из (17) имеем, что при $\lambda = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\big\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\big\| \le \frac{1}{|\omega_1| + \omega_2}\|B_1\| + \frac{1}{|\omega_1\omega_2|}\|B_2\| = \alpha_1 < 1.$$

Поэтому при $\lambda = i\xi$ резольвента существует и

$$P^{-1}(\lambda) = P_0^{-1}(\lambda)\bigl(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\bigr)^{-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\|\lambda^2 P^{-1}(\lambda)\| + \|\lambda A P^{-1}(\lambda)\| + \|A^2 P^{-1}(\lambda)\| \\ &\quad \le \bigl(\bigl\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\bigr\| + \bigl\|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\bigr\| + \bigl\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\bigr\|\bigr)\bigl\|\bigl(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\bigr)^{-1}\bigr\| \\ &\qquad \le \bigl(\bigl\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\bigr\| + \bigl\|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\bigr\| + \bigl\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\bigr\|\bigr)\frac{1}{1-\alpha_1}. \qquad (20)\end{aligned}$$

Очевидно, что при $\lambda = i\xi, \xi \in \mathbb{R}$ имеем

$$\bigl\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\bigr\| \le \sup_{\mu \ge \mu_0}\left(\frac{\xi^4}{\xi^4 + |\omega_1\omega_2|^2\mu^4 + \bigl(\omega_1^2 + \omega_2^2\bigr)\xi^2\mu^2}\right)^{1/2} \le 1. \qquad (21)$$

Тогда, учитывая неравенства (18), (19), (21) в равенстве (20), получаем неравенство (14).

Аналогично при $\lambda = i\xi$

$$\begin{aligned}\|\lambda^{2-\alpha}A^\alpha P^{-1}(\lambda)\| &\le \bigl\|\lambda^{2-\alpha}A^\alpha P_0^{-1}(\lambda)\bigl(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\bigr)^{-1}\bigr\| \\ &\le \bigl\|\lambda^{2-\alpha}A^\alpha P_0^{-1}(\lambda)\bigr\|\frac{1}{1-\alpha_1} \\ &= \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left(\frac{\mu^{2\alpha}|\xi|^{4-2\alpha}}{\xi^4 + |\omega_1\omega_2|\mu^4 + \bigl(\omega_1^2+\omega_2^2\bigr)\xi^2\mu^2}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\alpha_1} \\ &\le \sup_{\eta>0}\left(\frac{|\eta|^{2-\alpha}}{\eta^2 + |\omega_1\omega_2|^2 + \bigl(\omega_1^2+\omega_2^2\bigr)\eta}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\alpha_1} \le \mathrm{const}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2*. Тогда при достаточно малом $\theta > 0$ на секторах*

$$S_{-\frac{\pi}{2}\pm\theta} = \{\lambda \mid \lambda = r\exp(i(-\pi/2 \pm \theta)),\ r > 0\},$$

$$S_{\frac{\pi}{2}\pm\theta} = \{\lambda \mid \lambda = r\exp(i(\pi/2 \pm \theta)),\ r > 0\}$$

операторный пучок обратим и имеют место неравенства

$$\|\lambda^2 P^{-1}(\lambda)\| + \|\lambda A P^{-1}(\lambda)\| + \|A^2 P^{-1}(\lambda)\| \le \mathrm{const},$$

$$\|A^\alpha P^{-1}(\lambda)\| \le |\lambda|^{\alpha-2}\,\mathrm{const} \quad (\lambda \ne 0).$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\theta}$, тогда $\lambda = \xi e^{i(\frac{\pi}{2}+\sigma)}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $0 < \sigma \le \theta$. Имеем

$$\begin{aligned}P(\lambda) = P(i\xi e^{i\sigma}) &= -(i\xi e^{i\sigma})^2 E + (\omega_1+\omega_2)i\xi e^{i\sigma}A \\ &\quad + |\omega_1\omega_2|A^2 + i\xi e^{i\sigma}A_1 + A_2 = (E + L(\sigma,\xi))P(i\xi),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}L(\sigma,\xi) = (e^{2i\sigma}-1)\xi^2 P^{-1}(i\xi) + (\omega_1+\omega_2)i\xi A P^{-1}(i\xi)(e^{i\sigma}-1) \\ + i\xi B_1 A P^{-1}(i\xi)(e^{i\sigma}-1).\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\|L(\sigma,\xi)\| \le |e^{2i\sigma}-1|\|\xi^2 P^{-1}(i\xi)\| + (|\omega_1+\omega_2|\|i\xi AP^{-1}(i\xi)\| \\ + \|i\xi B_1 AP^{-1}(i\xi)\|)|e^{i\sigma}-1|.$$

Так как $0<\sigma\le\theta$, при достаточно малом θ, применяя результаты теоремы 2, получаем, что $\|L(\sigma;\xi)\|<1/2$. Тогда из равенства $P^{-1}(\lambda)=P^{-1}(i\xi)(E+L(\sigma,\xi))^{-1}$ с учетом неравенств (14), (15) приходим к требуемому.

Теорема доказана.

Замечание. При получении результатов теорем 2 и 3 мы не использовали вполне непрерывность оператора A^{-1}.

5. Полнота системы производных цепочек собственных и присоединенных элементов

В данном разделе докажем двукратную полноту системы производных цепочек собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевой задаче (2), (3).

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1–3 *и имеет место неравенство*

$$\alpha = d_1\|B_1\| + d_0\|B_2\| < 1,$$

где $d_1 = 1/2|\omega_1\omega_2|^{1/2}$, $d_0 = 1/|\omega_1\omega_2|$. *Если выполняется одно из следующих условий:*

(a) $A^{-1}\in\sigma_p$ $(0<p\le 1)$;

(b) $A^{-1}\in\sigma_p$ $(0<p<\infty)$, $B_j\in\sigma_\infty(H)$, $j=1,2$,

то система $K(C)$ *двукратно полна в* $H_{3/2}$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $x_0\ne 0$, $x_1\ne 0$, $x_0,x_1\in H_{3/2}$ и вектор $\tilde{x}=(x_0,x_1)\in H_{3/2}\oplus H_{3/2}$ ортогонален системе $K(C)$. Тогда из леммы Келдыша следует, что вектор-функция

$$R(\lambda) = (A^{3/2}P^{-1}(\bar{\lambda}))^*(A^{3/2}x_0 + e^{\lambda}A^{3/2}x_1)$$

является целой функцией.

Из теорем 2 и 3 вытекает, что в секторах $S_{\frac{\pi}{2}\pm\theta}$ и $S_{-\frac{\pi}{2}\pm\theta}$ при достаточно малом θ имеют место оценки

$$\|\lambda^2P^{-1}(\lambda)\| + \|\lambda AP^{-1}(\lambda)\| + \|A^2P^{-1}(\lambda)\| \le \mathrm{const}, \quad \|A^{3/2}P^{-1}(\lambda)\| \le \mathrm{const}\,|\lambda|^{-1/2}.$$

Если $A^{-1}\in\sigma_p$, то по теореме Келдыша [2] $A^2P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше p и минимального типа при порядке p.

Мы доказали, что при выполнении условий теоремы для любых $\chi_0,\chi_1\in H_{3/2}$ задача (2), (3) имеет регулярное решение $u(t)\in W_2^2((0;1);H)$.

Положим

$$\hat{u}(\lambda) = \int_0^1 u(t)e^{-\lambda t}\,dt.$$

Тогда очевидно, что

$$\int_0^1 u'(t)e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda}u(1) - u(0) + \lambda\hat{u}(\lambda),$$

$$\int_0^1 u''(t)e^{-\lambda t}d\lambda = [e^{-\lambda}u'(1) - u'(0)] + \lambda[e^{\lambda}u(1) - u(0)] + \lambda^2\hat{u}(\lambda).$$

Умножая обе части уравнения (2) на $e^{-\lambda t}$ и интегрируя, после простых вычислений получаем, что

$$P(\lambda)\hat{u}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2} Q_k \left(\sum_{m=0}^{k-1} \lambda^{k-m-1}(u^{(m)}(0) - e^{-\lambda}u^{(m)}(1)) \right),$$

где $Q_1 = (\omega_1 + \omega_2)A + A_1, Q_2 = -E$.

Пусть $u(0) = \chi_1, u(1) = \chi_1$. Тогда (см. [3, с. 96])

$$(\psi_0, x_0)_{3/2} + (\psi_1, x_1)_{3/2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{1} e^{\lambda\nu}\hat{u}(\lambda), x_\nu \right)_{3/2} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \beta(\lambda)d\lambda,$$

где

$$\beta(\lambda) = \left(\hat{u}(\lambda), \sum_{\nu=0}^{1} e^{\bar{\lambda}\nu}x_\nu \right)_{3/2}$$

$$= \left(P^{-1}(\lambda)\sum_{k=1}^{2} Q_k \left(\sum_{m=0}^{k-1} \lambda^{k-m-1}(u^{(m)}(0) - e^{-\lambda}u^{(m)}(1)) \right), \sum_{\nu=0}^{1} e^{\bar{\lambda}\nu}x_\nu \right)_{3/2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} Q_k(\lambda^{k-m-1}(u^{(m)}(0) - e^{-\lambda}u^{(m)}(1))), g(\bar{\lambda}) \right)_{3/2},$$

$$g(\lambda) = (A^{3/2}P^{-1}(\bar{\lambda}))^*(A^{3/2}x_0 + e^{\lambda}A^{3/2}x_1).$$

Очевидно, что в секторах $S_{\pm\frac{\pi}{2}\pm\theta}$ и, в частности, при $\lambda = i\xi$

$$\|g(\lambda)\| \le \mathrm{const}\,|\lambda|^{-1/2}(1 + e^{\mathrm{Re}\,\lambda}).$$

Тогда в случае (a) из теорем 2 и 3, а в случае (b) из теоремы Келдыша [2] с применением теоремы Фрагмена — Линделефа получаем, что $g(\lambda)$ — целая функция и

$$\|g(\lambda)\| \le \mathrm{const}\,|\lambda|^{-1/2}(1 + e^{\mathrm{Re}\,\lambda}).$$

Следовательно, $\|g(\lambda)\| \to 0$ при $\lambda = i\xi$, $\lambda \to \infty$.

Дословно повторяя рассуждения, проведенные в работе [12, с. 97–99], получаем, что $(\chi_0, x_0)_{3/2} + (\chi_1, x_1)_{3/2} = 0$. Из произвольности $\chi_0, \chi_1 \in H_{3/2}$ вытекает, что $x_0 = x_1 = 0$. Теорема доказана.

6. Полнота элементарных решений однородного уравнения

Обозначим через $Z(P)$ пространство всех регулярных решений уравнения (2). Очевидно, что $P(d/dt) : W_2^2((0;1);H) \to L_2((0;1);H)$ — ограниченный оператор, тогда его ядро $Z(P)$ — полное пространство.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 4. *Тогда элементарные решения уравнения* $P(d/dt)u = 0$ *полны в пространстве* $Z(P)$.

Доказательство. Так как система $K(C)$ двукратно полна в $H_{3/2}$, то при любых $\chi_0, \chi_1 \in H_{3/2}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $N(\varepsilon) > 0$ и числа $c_{i,j,h}$ такие, что

$$\left\|\chi_0 - \sum_{i,j,h}^{N(\varepsilon)} c_{i,j,h}(\varepsilon)\varphi_{i,j,h}^{(0)}\right\|_{3/2} < \varepsilon, \quad \left\|\chi_1 - \sum_{i,j,h}^{N(\varepsilon)} c_{i,j,h}(\varepsilon)\varphi_{i,j,h}^{(1)}\right\|_{3/2} < \varepsilon.$$

Так как $\chi_0 = u(0)$, $\chi_1 = u(1)$, $\varphi_{i,j,h}^{(0)} = u_{i,j,h}(0)$, $\varphi_{i,j,h}^{(1)} = u_{i,j,h}(1)$, из регулярности задачи (2), (3) вытекает, что

$$\begin{aligned}\Big\|u(t) - \sum_{i,j,h} c_{i,j,h}\varphi_{i,j,h}(t)\Big\|_{W_2^2((0;1);H)} \\ \le \mathrm{const}\left(\Big\|\chi_0 - \sum_{i,j,h} c_{i,j,h}\varphi_{i,j,h}^{(0)}\Big\|_{3/2} + \Big\|\chi_1 - \sum_{i,j,h} c_{i,j,h}\varphi_{i,j,h}^{(1)}\Big\|_{3/2}\right) < \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

При $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$ получаем

Следствие. *Пусть* A — *положительно определенный самосопряженный оператор,* A^{-1} — *вполне непрерывный оператор,* $B_j = A_j A^{-1}$ $(j = 1, 2)$ *ограничены в* H, *имеет место неравенство*

$$\alpha = \frac{1}{2}\|B_1\| + \|B_2\| < 1,$$

а также выполняется одно из условий (a) *или* (b) *теоремы* 4. *Тогда система производных цепочек собственных и присоединенных векторов пучка*

$$P(\lambda) = -\lambda^2 E + A^2 + \lambda A_1 + A_2$$

двукратно полна в $H_{3/2}$, *а система элементарных решений уравнения*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = 0$$

полна в пространстве его регулярных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
3. *Гасымов М. Г.* К теории полиномиальных операторных пучков // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 4. С. 747–750.
4. *Гасымов М. Г.* О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 505–508.
5. *Гасымов М. Г., Мирзоев С. С.* О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 651–661.
6. *Мирзоев С. С.* О кратной полноте корневых векторов полиномиальных операторных пучков, отвечающих краевым задачам на полуоси // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 2. С. 84–85.

7. *Мирзоев С. С.* Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 292–295.

8. *Оразов М. Б.* О полноте элементарных решений для некоторых операторных дифференциальных уравнений на полуоси и на отрезке // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 4. С. 788–792.

9. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. № 14. С. 140–224.

10. *Радзиевский Г. В.* О полноте производных цепочек, отвечающих краевым задачам на полуоси // Укр. мат. журн. 1979. Т. 31, № 4. С. 407–416.

11. *Радзиевский Г. В.* О полноте производных цепочек, отвечающих краевым задачам на конечном отрезке // Укр. мат. журн. 1979. Т. 31, № 3. С. 279–288.

12. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 2. С. 81–145.

13. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях // Мат. сб. 1960. Т. 51, № 3. С. 293–342.

14. *Якубов С. Я.* Кратная полнота для систем операторных пучков и эллиптические краевые задачи // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 1. С. 95–113.

15. *Папкович П. Ф.* Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит // Прикл. математика и механика. 1941. Т. 5, № 1. С. 359–374.

16. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем, для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых ее обобщениях // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 2. С. 211–228.

17. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М.: Наука, 1966. С. 116–136.

18. *Ворович И. И., Ковальчук В. Е.* О базисных свойствах одной системы однородных решений // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, № 5. С. 861–869.

19. *Устинов Ю. А., Юдович В. И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 4. С. 706–714.

20. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 7. С. 1065–1068.

Статья поступила 21 января 2009 г.

Мирзоев Сабир Султанага оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку Az-1141, Азербайджан;
Бакинский гос. университет,
mirzoyevsabir@mail.ru

Салимов Матлаб Юнус оглы
Бакинский гос. университет,
ул. З. Халилова, 23, Баку 370148, Азербайджан
sem_dayi@yahoo.com