Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.545

КЛАССИФИКАЦИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МАЛЫХ РОДОВ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

И. А. Медных

Аннотация. Дана полная классификация голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два с точностью до эквивалентности. Кроме того, установлено, что каждая риманова поверхность рода три имеет не более трех голоморфных образов рода два.

Ключевые слова: риманова поверхность, голоморфное отображение, орбифолд, теорема де Франкиса, конформный автоморфизм.

1. Введение

Классическая теорема Гурвица [1] утверждает, что число голоморфных автоморфизмов римановой поверхности рода $g > 1$ не превосходит $84(g-1)$. Макбет [2] показал, что оценка точная и достигается для бесконечного числа значений рода g.

Обозначим через $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ множество всех голоморфных отображений римановой поверхности S_g рода g на риманову поверхность $S_{g'}$ рода g', где $g \geq g' > 1$.

Обобщение теоремы Гурвица получено де Франкисом [3], который установил, что число элементов $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ конечно и ограничено сверху константой, зависящей только от g. Первая верхняя оценка числа $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ получена в [4]. В дальнейшем она была улучшена в [5–8]. Отметим также недавний результат Ито и Ямамото [9], позволяющий получить верхнюю оценку в терминах родов и длин кратчайших геодезических. В работе автора [10] получены структурные теоремы, полностью описывающие голоморфные отображения римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два.

Теореме де Франкиса также посвящена серия работ испанских математиков [11, 12]. Теорема де Франкиса для римановых поверхностей конечного типа и ее обобщение на многомерный случай получены в [13, 14].

Отображения $f : S_g \to S_{g'}$ и $h : S_g \to S_{g'}$ называются *эквивалентными*, если существуют автоморфизмы $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_g)$ и $\beta \in \mathrm{Aut}(S_{g'})$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ h$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00255), гранта АВЦП развития научного потенциала Высшей школы (проект 2.1.1/3707) и гранта ФЦП (проект 02.740.11.0457).

© 2010 Медных И. А.

Целью данной статьи является получение полной классификации голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два с точностью до эквивалентности. Кроме того, будет установлено, что каждая риманова поверхность рода три имеет не более трех голоморфных образов рода два.

2. Предварительные сведения

Римановой поверхностью называется одномерное связное комплексное многообразие.

В данной работе будут рассматриваться компактные римановы поверхности без края.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между объектами категории римановых поверхностей и категории алгебраических кривых. При этом классу конформно эквивалентных поверхностей соответствует класс бирациональных эквивалентных кривых, а голоморфным отображениям — рациональные. В настоящей работе будем широко использовать указанные взаимно однозначные соответствия. В частности, основной результат работы — полная классификация голоморфных отображений поверхности S_3 рода 3 на поверхность S_2 рода 2 — будет дан в терминах алгебраических кривых и рациональных отображений.

В дальнейшем, следуя книге [15], будем отождествлять классы конформно эквивалентных римановых поверхностей с классами бирационально эквивалентных кривых. В этом случае будем говорить, что *риманова поверхность определяется* (или *задается*) соответствующим алгебраическим уравнением, полагая что указанное алгебраическое уравнение задает поле мероморфных функций на данной римановой поверхности. При этом [15, с. 5] две римановы поверхности S и S' конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда между полями $\mathscr{M}(S)$ и $\mathscr{M}(S')$ определенных на них мероморфных функций существует изоморфизм, сохраняющий константы.

Пусть риманова поверхность S определяется уравнением $P(w,z) = 0$, где P — неприводимый над $\mathbb{C}$ полином от двух переменных. Тогда S может быть рассмотрена как риманова поверхность алгебраической функции $w = w(z)$. В этом случае величины w и z удобно трактовать как определенные на S мероморфные функции, которые связаны соотношением $P(w,z) = 0$ и порождают поле всех мероморфных функций $\mathscr{M}(S)$. Это, в частности, означает, что любая мероморфная функция $\varphi \in \mathscr{M}(S)$ представима в виде $\varphi = R(w,z)$, где R — подходящая рациональная функция от двух переменных.

Если римановы поверхности S и S' определяются неприводимыми алгебраическими уравнениями $P(w,z) = 0$ и $P'(u,v) = 0$ соответственно, а $f : S \to S'$ — сюръективное голоморфное отображение, то индуцированное им соответствие $\varphi \in \mathscr{M}(S') \to \varphi \circ f \in \mathscr{M}(S)$ задает вложение полей $\mathscr{M}(S') \to \mathscr{M}(S)$. При этом в силу предыдущего $u \circ f = R_1(w,z)$ и $v \circ f = R_2(w,z)$ являются рациональными функциями от w и z. Отождествляя φ и $\varphi \circ f$, рассмотрим $\mathscr{M}(S')$ как подполе поля $\mathscr{M}(S)$.

Определенное всюду, за исключением конечного числа точек, рациональное отображение $F : (w,z) \to (u,v) = (R_1(w,z), R_2(w,z))$ переводит кривую $P(w,z) = 0$ в кривую $P'(u,v) = 0$.

Пользуясь теоремой Римана об устранении особенностей, нетрудно убедиться, что верно и обратное. Каждое рациональное отображение F указанного вида однозначно определяет сюръективное голоморфное отображение $f : S \to S'$.

Гиперэллиптическая поверхность — это поверхность, допускающая двулистное накрытие над сферой Римана. Каждая гиперэллиптическая поверхность рода g представляется уравнением $w^2 = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{2g+2})$, где $z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}$ — различные комплексные числа, при этом действие гиперэллиптической инволюции на поверхности осуществляется по правилу $\tau : (w, z) \to (-w, z)$. Известно, что любая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической. Теорема Акколы [16] утверждает, что риманова поверхность рода 3, двулистно накрывающая поверхность рода 2, также будет гиперэллиптической римановой поверхностью.

Двумерным орбифолдом O будем называть риманову поверхность S с выделенным на ней дискретным подмножеством точек Σ, каждой из которых приписано некоторое натуральное число, не меньшее 2. Множество Σ называется *сингулярным множеством*, или *множеством особых точек орбифолда* O, а поверхность S — его *носителем*. В настоящей работе в качестве S всюду будет использована замкнутая риманова поверхность рода 0, т. е. риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, а в качестве $\Sigma = \{z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}\}$ — подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из четного числа точек, каждой из которой приписано число 2. Понятие орбифолда (или римановой поверхности с сигнатурой) возникло в классических работах Кёбе по теории униформизации [17, 18]. В дальнейшем оно было развито в [19] и получило свое идейное завершение в [20]. Основные факты из теории орбифолдов изложены в работах [20, гл. 13; 21, § 2].

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g и τ — гиперэллиптическая инволюция. Мы будем рассматривать фактор-пространство $O_g = S_g/\langle\tau\rangle$ как двумерный орбифолд, носителем которого является сфера Римана, а особыми точками — проекции $2g + 2$ точек Вейерштрасса при каноническом отображении $S_g \to O_g = S_g/\langle\tau\rangle$.

Автоморфизмом поверхности будем называть конформное отображение поверхности на себя. Группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_2)$ хорошо известны и описаны в работе [22]. В [23] приведен полный список групп конформных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_3)$ и дана полная классификация соответствующих им римановых поверхностей, задаваемых явными уравнениями. Приведем указанные результаты в табл. 1 и 2.

Отображения $f : S_3 \to S_2$ и $g : S_3 \to S_2$ называются *эквивалентными*, если существуют автоморфизмы $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_3)$ и $\beta \in \mathrm{Aut}(S_2)$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$.

В нашей работе эта классификация будет использована для описания элементов множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$. При этом будут получены явные выражения для представителей всех классов эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \to S_2$.

Точкой Вейерштрасса называется точка P римановой поверхности, допускающая существование мероморфной функции с единственным полюсом порядка меньше чем $g + 1$ в P. Согласно классической теореме Гурвица [15, III.5.11] каждая риманова поверхность S_g имеет по крайней мере $2g + 2$ точек Вейерштрасса. При этом нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда поверхность S_g гиперэллиптична.

Отметим следующие важные свойства точек Вейерштрасса. Обозначим через $W(S_g)$ множество точек Вейерштрасса римановой поверхности S_g. Тогда любой автоморфизм S_g оставляет множество $W(S_g)$ инвариантным. При голоморфном отображении поверхностей разных родов точки Вейерштрасса, вооб-

Таблица 1. Автоморфизмы римановой поверхности рода 2

$\mathrm{Aut}(S_2)$	$\mathrm{Aut}(O_2)$	Сигнатура орбифолда $S_2/\,\mathrm{Aut}(S_2)$	Уравнение поверхности S_2 $y^2 =$
48	$\mathbb{S}_4$	(2,3,8)	$x(x^4-1)$
24	$\mathbb{D}_6$	(2,4,6)	x^6-1
$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_5$	(2,5,10)	x^5-1
$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{D}_3$	$(2^3\ 3)$	$(x^3-a^3)(x^3-a^{-3})$
$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_2$	$(2^3\ 4)$	$x(x^2-a^2)(x^2-a^{-2})$
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{Z}_2$	(2^5)	$(x^2-1)(x^2-a^2)(x^2-b^2)$
$\mathbb{Z}_2$	1	(2^6)	$x(x-1)(x^3+ax^2+bx+c)$

Таблица 2. Автоморфизмы римановой поверхности рода 3 (гиперэллиптический случай)

$\mathrm{Aut}(S_3)$	$\mathrm{Aut}(O_3)$	Сигнатура орбифолда $S_3/\,\mathrm{Aut}(S_3)$	Уравнение поверхности S_3 $y^2 =$
48	$\mathbb{S}_4$	(2,4,6)	x^8+14x^4+1
32	$\mathbb{D}_8$	(2,4,8)	x^8-1
24	$\mathbb{D}_6$	(2,4,12)	$x(x^6-1)$
$\mathbb{Z}_{14}$	$\mathbb{Z}_7$	(2,7,14)	x^7-1
16	$\mathbb{D}_4$	(2,2,2,4)	x^8+ax^4+1
$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{S}_3$	(2,2,2,6)	$x(x^6+ax^3+1)$
$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{D}_2$	(2,2,4,4)	$x(x^2-1)(x^4+ax^2+1)$
$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{D}_2$	(2^5)	$(x^4+ax^2+1)(x^4+bx^2+1)$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	(2,2,2,4,4)	$x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{Z}_2$	(2^6)	$(x^2-1)(x^6+ax^4+bx^2+c)$
$\mathbb{Z}_2$	1	(2^8)	$x(x-1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$

ще говоря, не переходят в точки Вейерштрасса, однако в случае голоморфного отображения гиперэллиптических поверхностей этот факт имеет место [8, 24]. Более точно, если S_g и $S_{g'}$ — гиперэллиптические римановы поверхности, а $f, h \in \mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$, то выполняются следующие свойства:

1) $f(W(S_g)) \subset W(S_{g'})$;

2) если $f|_{W(S_g)} = h|_{W(S_g)}$, то либо $f = h$, либо $f = h \circ \tau$, где τ — гиперэл-

липтическая инволюция поверхности S_g;

3) $f\circ\tau=\tau'\circ f$, где τ' — гиперэллиптическая инволюция поверхности $S_{g'}$.

Последнее равенство означает, что f опускается до голоморфного отображения орбифолдов $\hat f : O_g = S_g/\langle\tau\rangle \to O_{g'} = S_{g'}/\langle\tau'\rangle$. При этом $\hat f$ имеет ровно два поднятия до отображения S_g на $S_{g'}$, а именно f и $f\circ\tau$.

Указанные факты будут неоднократно использоваться в настоящей работе.

3. Общие свойства голоморфных отображений S_3 на S_2

Опишем общую схему построения голоморфного отображения f из S_3 на S_2. Предположим, что $\mathrm{Hol}(S_3,S_2)\neq\varnothing$. Рассмотрим произвольный элемент $f\in \mathrm{Hol}(S_3,S_2)$. Из формулы Римана — Гурвица следует, что $f : S_3\to S_2$ осуществляет неразветвленное двулистное накрытие. Следовательно, оно регулярно, и существует нетривиальный автоморфизм $\gamma_f\in\mathrm{Aut}(S_3)$ такой, что $f\circ\gamma_f=f$ и $\gamma_f^2=\mathrm{id}$. При этом $S_3/\langle\gamma_f\rangle\cong S_2$, где знак $\cong$ означает конформную эквивалентность. По теореме Акколы [16] поверхность S_3 гиперэллиптическая. Следовательно, существует гиперэллиптическая инволюция $\tau\in\mathrm{Aut}(S_3) : S_3/\langle\tau\rangle\cong\overline{\mathbb{C}}$. Отметим, что $S_3/\langle\gamma_f\rangle\cong S_2\neq\overline{\mathbb{C}}$, откуда $\gamma_f\neq\tau$. Заметим, что τ всегда принадлежит центру группы $\mathrm{Aut}(S_3)$, т. е. для любого автоморфизма $\alpha\in\mathrm{Aut}(S_3)$ справедливо равенство $\alpha\tau\alpha^{-1}=\tau$. Отсюда выводим, что $\gamma_f\tau=\tau\gamma_f$, $\gamma_f^2=\mathrm{id}$, $\tau^2=\mathrm{id}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma_f : (w,z)\to(w,-z)$. Действительно, рассмотрим орбифолд $O_3=S_3/\langle\tau\rangle=\overline{\mathbb{C}}(z_1,z_2,\dots,z_8)$. Так как $\gamma_f\tau=\tau\gamma_f$, то γ_f опускается до автоморфизма $\hat\gamma_f$ орбифолда O_3. При этом $\hat\gamma_f^2=\mathrm{id}$ и $\hat\gamma_f$ оставляет инвариантным сингулярное множество $\{z_1,z_2,\dots,z_8\}$ орбифолда O_3. Отметим, что $\hat\gamma_f$ однозначно определяется по множеству своих неподвижных точек $\mathrm{Fix}\,\hat\gamma_f$.

Так как $\hat\gamma_f\in\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, существует $\Gamma\in\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) : \Gamma\circ\hat\gamma_f\circ\Gamma^{-1} : z\to -z$, т. е. с самого начала можно считать, что $\hat\gamma_f : z\to -z$. Тогда $\gamma_f : (w,z)\to(w,-z)$. Найдем вид отображения $\hat f$. По определению имеем $\hat f\circ\hat\gamma_f=\hat f$, т. е. $\hat f(-z)=\hat f(z)$. С другой стороны, отображение $\hat f : \overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ голоморфно и, следовательно, является рациональной функцией. Поскольку $\hat f$ двулистно и четно, имеем $\hat f(z)=T(z^2)$ для подходящего дробно-линейного отображения $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. Выполняя подходящее дробно-линейное преобразование в образе $\hat f(\overline{\mathbb{C}})$, без ограничения общности можем считать, что $T(z)=z$. Получим $\hat f(z)=z^2$.

В общем случае точки ветвления отображения $\hat f$ и его критические значения не обязательно совпадают с 0 и ∞. Отправляя точки ветвления и соответствующие им критические значения подходящими дробно-линейными преобразованиями S и T^{-1} в 0 и ∞, запишем отображение $\hat f(z)=T((S(z))^2)$. При этом поднятие $\hat f$ до голоморфного отображения римановых поверхностей $f : S_3\to S_2$ имеет вид $f : (w,z)\to(u,v)$, где $v=\hat f(z)$ находится по той же схеме, что и выше.

Проиллюстрируем сказанное на следующей диаграмме (рис. 1). На ней $\hat f$ разветвлено над 0, ∞ и особыми точками для орбифолда $O_2=S_2/\langle\tau'\rangle$. Однако прообразы $0=\hat f^{-1}(0)$ и $\infty=\hat f^{-1}(\infty)$ не будут особыми точками орбифолда $O_3=S_3\,/\langle\tau\rangle$. С учетом множества $\{\pm z_1,\pm z_2,\pm z_3,\pm z_4\}$ особых точек орбифолда O_3 поверхность S_3 может быть представлена алгебраическим уравнением

$$\widetilde{w}^2=\bigl(\tilde z^2-z_1^2\bigr)\bigl(\tilde z^2-z_2^2\bigr)\bigl(\tilde z^2-z_3^2\bigr)\bigl(\tilde z^2-z_4^2\bigr).$$

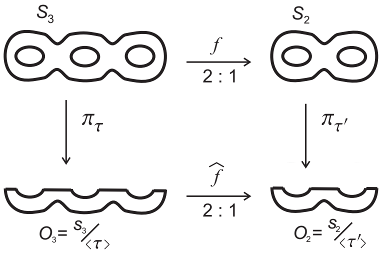

Рис. 1. Схема накрытий.

Принимая во внимание бирациональное отображение $(\widetilde{w}, \tilde{z}) \to (w, z) = (\widetilde{w}\tilde{z}, \tilde{z})$, перепишем последнее уравнение в виде

$$w^2 = z^2\big(z^2 - z_1^2\big)\big(z^2 - z_2^2\big)\big(z^2 - z_3^2\big)\big(z^2 - z_4^2\big).$$

Аналогично по множеству $\{0, \infty, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ особых точек орбифолда O_2, где $v_1 = z_1^2, v_2 = z_2^2, v_3 = z_3^2, v_4 = z_4^2$, поверхность S_2 записывается как

$$u^2 = v\big(v - z_1^2\big)\big(v - z_2^2\big)\big(v - z_3^2\big)\big(v - z_4^2\big).$$

Отсюда отображение $f : S_3 \to S_2$ в выбранных переменных имеет вид

$$f : (w, z) \to (u, v) = (w, z^2).$$

Следуя [23], представим гиперэллиптическую поверхность S_3 одним из 11 возможных уравнений, приведенных в табл. 2. Будем строить отображение $f : S_3 \to S_2$ методом, описанным выше. Это возможно, если орбифолд $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$ обладает автоморфизмом $\hat{\gamma}_f$ второго порядка, переводящим проекции точек Вейерштрасса на себя (как множества), но не оставляющим ни одну из них неподвижной. При этом орбифолд $O_2 = \overline{\mathbb{C}}(v_1, v_2, \dots, v_6)$ получается из орбифолда $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$ факторизацией по инволюции $\hat{\gamma}_f$. Две неподвижные точки автоморфизма $\hat{\gamma}_f$ переходят в точки v_5, v_6. Действительно, точки v_5, v_6 являются проекциями точек Вейерштрасса поверхности S_2, однако их прообразы $\hat{f}^{-1}(v_5)$, $\hat{f}^{-1}(v_6)$ не будут проекциями точек Вейерштрасса для S_3. В противном случае эти неподвижные точки станут точками ветвления четвертого порядка, т. е. особая точка орбифолда O_3 переходит в особую точку орбифолда O_2 порядка четыре, что невозможно, поскольку все особые точки орбифолда O_2 имеют порядок два.

Напомним, что элементы $\mathrm{Aut}(S_3)$ осуществляют перестановку точек Вейерштрасса поверхности S_3. Если группа $\mathrm{Aut}(S_3)$ задана, то $z_1, z_2, \dots, z_8$ известны. Они являются корнями правых частей уравнений в табл. 2. Отображение $\hat{\gamma}_f$ однозначно определяет $\hat{f} : O_3 \to O_2 = O_3/\langle\hat{\gamma}_f\rangle$. Следовательно, и f как поднятие $\hat{f}$ однозначно с точностью до суперпозиции с гиперэллиптической инволюцией τ восстанавливается по отображению $\hat{\gamma}_f$. Обратно, по каждому f можно однозначно построить $\hat{\gamma}_f$. Это будет единственный нетривиальный элемент группы преобразований наложения $\hat{f} : O_3 \to O_2$.

Для классификации нужно выяснить, как построить неэквивалентные голоморфные отображения f и g из S_3 на S_2, т. е. не связанные друг с другом автоморфизмами S_3 или S_2. Ответ на вопрос об эквивалентности отображений получен в следующей лемме.

Лемма 1. *Отображения f и g эквивалентны тогда и только тогда, когда накрывающие инволюции $\hat{\gamma}_f$ и $\hat{\gamma}_g$ сопряжены в группе автоморфизмов орбифолда O_3.*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображения f и g эквивалентны, т. е. существуют автоморфизмы $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_3)$ и $\beta \in \mathrm{Aut}(S_2)$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$. Поскольку $\hat{\gamma}_g = \hat{\gamma}_{\beta \circ g}$, можем считать, что $\beta = 1$. Тогда $f \circ \alpha = g$ и $\hat{f} \circ \hat{\alpha} = \hat{g}$, где $\hat{\alpha}$ — проекция автоморфизма α на орбифолд O_3. По определению имеем $\hat{g} \circ \hat{\gamma}_g = \hat{g}$. Отсюда $\hat{f} \circ \hat{\alpha} \circ \hat{\gamma}_g = \hat{g} \circ \hat{\gamma}_g = \hat{g} = \hat{f} \circ \hat{\alpha}$ и $\hat{f} \circ \hat{\alpha} \circ \hat{\gamma}_g \circ \hat{\alpha}^{-1} = \hat{f}$. Следовательно, $\hat{\alpha} \circ \hat{\gamma}_g \circ \hat{\alpha}^{-1} = \hat{\gamma}_f$.

Достаточность. Пусть $\hat{\gamma}_f$ и $\hat{\gamma}_g$ сопряжены в группе $\mathrm{Aut}(O_3)$. Тогда существует автоморфизм $\hat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(O_3)$ такой, что $\hat{\gamma}_g = \hat{\alpha}^{-1} \circ \hat{\gamma}_f \circ \hat{\alpha}$. Покажем, что $\hat{g}$ и $\hat{f} \circ \hat{\alpha}$ имеют одну и ту же накрывающую инволюцию. Действительно, имеем $\hat{g} \circ \hat{\gamma}_g = \hat{g}$ и $(\hat{f} \circ \hat{\alpha}) \circ \hat{\gamma}_g = \hat{f} \circ \hat{\alpha} \circ \hat{\alpha}^{-1} \circ \hat{\gamma}_f \circ \hat{\alpha} = (\hat{f} \circ \hat{\gamma}_f) \circ \hat{\alpha} = \hat{f} \circ \hat{\alpha}$.

Следовательно, существует $\hat{\beta} \in \mathrm{Aut}(O_2)$ такой, что $\hat{\beta} \circ \hat{g} = \hat{f} \circ \hat{\alpha}$. В качестве такого автоморфизма можно выбрать корректно определенное конформное отображение $\hat{\beta} = \hat{f} \circ \hat{\alpha} \circ \hat{g}^{-1}$. По построению конформное отображение $\hat{\beta}$ переводит множество особых точек O_2 в себя и, следовательно, является автоморфизмом O_2. Поднимая отображения $\hat{\beta}$ и $\hat{\alpha}$ до подходящих автоморфизмов $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_3)$ и $\beta \in \mathrm{Aut}(S_2)$, получим равенство $\beta \circ g = f \circ \alpha$.

Подводя итог вышесказанному, приходим к следующему алгоритму построения голоморфного отображения $f : S_3 \to S_2$.

Шаг 1. Выберем произвольную гиперэллиптическую поверхность S_3 из табл. 2 и запишем ее уравнение в виде $w^2 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_8)$. Если одна из точек z_j равна ∞, то соответствующий множитель $(z - z_j)$ опускаем. Найдем инволюцию $\hat{\gamma}_f$ из группы автоморфизмов орбифолда $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$, не оставляющую ни одну из его особых точек неподвижной.

С точностью до обозначений всегда можно считать, что $\hat{\gamma}_f(z_j) = z_{j+4}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Шаг 2. Найдем рациональное отображение $\hat{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ степени два, инвариантное относительно инволюции $\hat{\gamma}_f$, т. е. такое, что $\hat{f} \circ \hat{\gamma}_f = \hat{f}$. Пусть p_1 и p_2 — неподвижные точки $\hat{\gamma}_f$. Тогда $\hat{f}$ имеет ветвление порядка два в p_1 и p_2. Отметим, что образом орбифолда O_3 при отображении $\hat{f}$ служит орбифолд $O_2 = \overline{\mathbb{C}}(v_1, v_2, \dots, v_6)$, где $v_j = \hat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \hat{f}(p_1)$ и $v_6 = \hat{f}(p_2)$.

Шаг 3. Восстановим гиперэллиптическую поверхность S_2 по особым точкам орбифолда O_2 следующим образом: $u^2 = (v - v_1)(v - v_2) \dots (v - v_6)$. Попрежнему если одна из точек v_j обращается в бесконечность, то соответствующий множитель опускается.

Шаг 4. Найдем голоморфное отображение $(u, v) = f(w, z)$ римановой поверхности S_3 на риманову поверхность S_2. Для этого положим $v = \hat{f}(z)$ и определим u как одно из двух решений уравнения

$$u^2 = (\hat{f}(z) - v_1)(\hat{f}(z) - v_2) \dots (\hat{f}(z) - v_6).$$

Отметим, что u всегда представимо в виде $u = r(z)w$, где $r(z)$ — подходящая рациональная функция от z.

Этот факт следует из эквиинвариантности отображения f относительно действия гиперэллиптических инволюций $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Действительно, в общем случае f задается отображением вида

$$f : (w, z) \to (u, v) = (F_1(w, z), F_2(w, z)),$$

где $F_1(w, z)$ и $F_2(w, z)$ — некоторые рациональные функции от w и z. Поскольку гиперэллиптические инволюции действуют по правилам $\tau : (w, z) \to (-w, z)$ и $\tau' : (u, v) \to (-u, v)$, из свойства эквиинвариантности имеем

$$F_1(-w, z) = -F_1(w, z) \quad \text{и} \quad F_2(-w, z) = F_2(w, z).$$

Тем самым F_1 — нечетная, а F_2 — четная функции переменной w. Следовательно, они допускают представление в виде $F_1(w, z) = R_1(w^2, z)w$ и $F_2(w, z) = R_2(w^2, z)$, где R_1, R_2 — рациональные функции. Заметим, что для гиперэллиптической римановой поверхности справедливо равенство $w^2 = P(z)$, где $P(z)$ — некоторый полином от z. Отсюда $u = F_1(w, z) = R_1(P(z), z)w = r(z)w$ и $v = F_2(w, z) = R_2(P(z), z) = \hat{f}(z)$, где $r(z)$ — рациональная функция от z, а $\hat{f}(z)$ — рациональная функция, указанная выше.

4. Классификация голоморфных отображений с точностью до эквивалентности

Целью данного раздела является классификация голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два с точностью до эквивалентности.

Будем последовательно разбирать 11 случаев, указанных в табл. 2. Для этого воспользуемся общей схемой, намеченной в предыдущем разделе.

1. Пусть $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 48$. Тогда риманова поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$. При этом $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{S}_4$, где $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$, а особые точки $z_1, z_2, \dots, z_8$ орбифолда O_3 являются корнями уравнения $z^8 + 14z^4 + 1 = 0$. В дальнейшем для удобства будем называть их *точками Вейерштрасса*. Рассмотрим указанные точки как вершины «куба», вписанного в сферу Римана.

Найдем для f все инволюции $\hat{\gamma}_f$, переставляющие вершины куба, т. е. точки Вейерштрасса, но ни одну из них не оставляющие неподвижной. С точностью до сопряжения в группе $\mathbb{S}_4$ таких инволюций будет ровно две: $z \to -z$ и $z \to \frac{1}{z}$. В силу большой симметрии куба все другие инволюции будут сопряжены в группе $\operatorname{Aut}(O_3)$, так как в этой группе есть четверть-поворот вокруг перпендикуляра к верхней грани куба. Таким образом, по лемме 1 существует два класса эквивалентности голоморфных отображений S_3 на поверхность рода два. Найдем представителей классов эквивалентности в каждом из указанных случаев.

1a. Пусть $\hat{\gamma}_f : z \to -z$. Имеем $\hat{f} \circ \hat{\gamma}_f = \hat{f}$, т. е. $\hat{f}(-z) = \hat{f}(z)$. В этом случае $\hat{f}(z) = T(z^2)$, где T — произвольное дробно-линейное преобразование. Выбирая $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$, получим $\hat{f}(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$. Без ограничения общности можем считать, что $z_j = -z_{j+4}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Учитывая, что неподвижные точки $\hat{\gamma}_f$ равны 0 и ∞, положим $v_j = \hat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \hat{f}(0)$ и $v_6 = \hat{f}(\infty)$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что уравнение $u^2 = (v - v_1)(v - v_2)\dots(v - v_6)$ римановой поверхности S_2 записывается в виде $u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1)$. По классификации Больца (табл. 1) группа автоморфизмов S_2 изоморфна $\mathbb{D}_4$.

Поднимая $\hat{f} : O_3 \to O_2$ до отображения $f : S_3 \to S_2$ по указанному в разд. 3 алгоритму, получим

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{2iz}{(z^2 + 1)^3}w, \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}\right).$$

1b. Пусть теперь $\hat\gamma_f : z \to \frac{1}{z}$. В этом случае в качестве $\hat f$ удобно выбрать отображение $\hat f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\right)$. Неподвижными точками $\hat\gamma_f$ являются ± 1. Упорядочим корни $z_1, \dots, z_8$ таким образом, что $z_{j+4} = \frac{1}{z_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда $v_j = \hat f(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \hat f(-1)$, $v_6 = \hat f(1)$. При этом уравнение римановой поверхности S_2 имеет вид

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75).$$

Поднимая $\hat f : O_3 \to O_2$ до отображения римановых поверхностей $f : S_3 \to S_2$, получим

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^3} w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\right)\right).$$

По-прежнему группа автоморфизмов S_2 равна $\mathbb{D}_2$, однако римановы поверхности S_2 в случаях 1a и 1b неизоморфны.

2. Пусть теперь $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 32$, тогда группа $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{D}_8$ имеет порядок 16. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^8 - 1$. При этом все восемь точек Вейерштрасса $z_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{8} k\right)$, $k = 1, 2, \dots, 8$, являются корнями уравнения $z^8 - 1 = 0$.

Заметим, что 0 и ∞ не являются точками Вейерштрасса для поверхности S_3. Обозначим через $P = P(z_1, z_2, \dots, z_8)$ правильный восьмиугольник на сфере Римана, инвариантный относительно вращения восьмого порядка. Тогда для неподвижных точек инволюции $\hat\gamma_f$ имеется три возможных положения:

1) неподвижными точками являются 0 и ∞, при этом $\hat\gamma_f : z \to -z$;

2) $\hat\gamma_f$ оставляет неподвижными середины противоположных сторон P, все такие инволюции попарно сопряжены в группе $\operatorname{Aut}(O_3)$;

3) неподвижные точки $\hat\gamma_f$ равны z_k и z_{k+4}, где k принимает одно из значений $1, 2, 3, 4$; снова все такие инволюции попарно сопряжены.

Случай 3 не реализуется, так как $\operatorname{Fix} \hat\gamma_f$ состоит из двух точек Вейерштрасса. Оба случая 1 и 2 реализуются. Таким образом, существуют только два класса эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \to S_2$. Выпишем по представителю в каждом из этих классов.

2a. Пусть $\hat\gamma_f : z \to -z$. В качестве $\hat f$ естественно взять отображение $\hat f(z) = z^2$. Тогда его поднятие до отображения римановых поверхностей имеет вид $(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2)$. Нетрудно убедиться, что в этом случае поверхность $S_2 = f(S_3)$ задана уравнением $u^2 = v(v^4 - 1)$. Это кривая Больца рода 2 с максимально возможной группой автоморфизмов $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$.

2b. Рассмотрим отображение $\hat\gamma_f : z \to \frac{\varepsilon^2}{z}$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}$. Оно, очевидно, оставляет инвариантным множество вершин восьмиугольника P и не имеет неподвижных точек на этом множестве. Поскольку $\hat f \circ \hat\gamma_f = \hat f$, в качестве $\hat f$ удобно выбрать $\hat f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z}\right)$. Множество неподвижных точек $\hat\gamma_f$ состоит из ε и $-\varepsilon$. Найдем особые точки орбифолда O_2 по формулам $v_j = \hat f(\varepsilon^{2j})$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \hat f(\varepsilon)$, $v_6 = \hat f(-\varepsilon)$. В результате получим, что поверхность S_2 задается уравнением $u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 0.125)$.

Поднятие отображения $\hat f$ на римановы поверхности имеет вид

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - \varepsilon^2}{8z^3\varepsilon^3} w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z}\right)\right), \quad \text{где } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}.$$

Отметим, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_2)$ изоморфна $\mathbb{D}_2$.

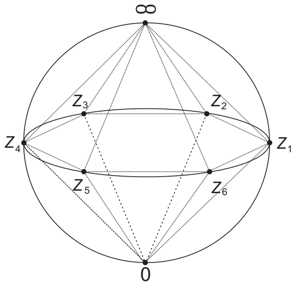

Рис. 2. Шестиугольная бипирамида.

3. При $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 24$ группа $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{D}_6$ имеет порядок 12. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z(z^6-1)$. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_6$ корни уравнения $z^6 - 1 = 0$. Отметим, что точки $z_1, z_2, \ldots, z_6$ являются вершинами правильного шестиугольника и вместе с 0 и ∞ задают все восемь точек Вейерштрасса. Обозначим через $B = B(z_1, z_2, \ldots, z_6)$ правильную бипирамиду на сфере Римана, основанием которой служит указанный выше шестиугольник, а вершинами — точки 0 и ∞ (рис. 2.)

Для инволюции $\hat{\gamma}_f$ имеется две возможных реализации:

1) $\hat{\gamma}_f$ является вращением второго порядка в серединах противоположных ребер шестиугольника $\{z_1, z_2, \ldots, z_6\}$;

2) $\hat{\gamma}_f$ является вращением второго порядка в противоположных вершинах $B(z_1, z_2, \ldots, z_6)$.

Случай 2 исключаем, так как вершины — это точки Вейерштрасса. По построению они не могут быть неподвижными точками инволюции $\hat{\gamma}_f$. Таким образом, имеется только один класс эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \to S_2$. Он представлен отображениями следующего вида: $\hat{\gamma}_f : z \to -\frac{1}{z}$ и $\hat{f} : z \to z - \frac{1}{z}$. При этом поверхность S_2 задается уравнением $u^2 = v(v^2+4)(v^2+3)$, а голоморфное отображение f записывается как

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2+1}{z^3}w, z - \frac{1}{z}\right).$$

По классификации Больца группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_2)$ изоморфна $\mathbb{D}_4$.

4. При $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 14$ группа $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{Z}_7$ имеет порядок 7 и является циклической группой. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^7 - 1$. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_7$ корни уравнения $z^7 - 1 = 0$. Отметим, что точки $z_1, z_2, \ldots, z_7$ являются вершинами правильного семиугольника, и вместе с ∞ дают все восемь точек Вейерштрасса для поверхности S_3.

Заметим, что у правильной семиугольной пирамиды нет симметрии второго порядка. Следовательно, в этом случае нет сюръективных голоморфных отображений $f : S_3 \to S_2$.

5. При $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 16$ группа $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{D}_4$ имеет порядок 8. Поверхность S_3 описывается уравнением $w^2 = z^8 + az^4 + 1$, где $a \neq 0, \pm 2, \pm 14$. В этом случае точки Вейерштрасса являются корнями уравнения $z^8 + az^4 + 1 = 0$, которые удобно представить в виде чисел z_1, z_2, z_3, z_4 и обратных к ним $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{1}{z_3}$, $\frac{1}{z_4}$. При этом можно считать, что $z_2 = iz_1$, $z_3 = -z_1$ и $z_4 = -iz_1$. Здесь первая и вторая четверки являются вершинами квадратов, вписанных в окружности на сфере Римана. Указанные четверки будем интерпретировать как нижнюю и верхнюю грани «параллелепипеда» P. Нам понадобится один из корней $\sqrt{i}$, равный $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Для инволюции $\hat{\gamma}_f$ имеется три возможных ситуации:

1) $\hat{\gamma}_f : z \to -z$, $\operatorname{Fix}\hat{\gamma}_f = \{0, \infty\}$ — середины верхней и нижней граней P;

2) $\hat{\gamma}_f : z \to \frac{1}{z}$, $\operatorname{Fix}\hat{\gamma}_f = \{+1, -1\}$ — середины боковых граней P;

3) $\hat{\gamma}_f : z \to \frac{i}{z}$, $\operatorname{Fix}\hat{\gamma}_f = \{+\sqrt{i}, -\sqrt{i}\}$ — середины боковых ребер P.

Все три инволюции попарно не сопряжены в полной группе $\mathbb{D}_4$ симметрий «параллелепипеда». Таким образом, существуют три класса отображений $f : S_3 \to S_2$, не связанных автоморфизмами поверхностей. Выпишем по представителю в каждом из этих классов.

5a. Пусть $\hat{\gamma}_f : z \to -z$ и $\hat{f} : z \to z^2$. Неподвижные точки $\hat{\gamma}_f$ равны 0 и ∞. Положим $v_j = \hat{f}(z_j)$, $v_{j+2} = \hat{f}\big(z_j^{-1}\big)$, $j = 1, 2$, $v_5 = \hat{f}(0)$, $v_6 = \hat{f}(\infty)$. Тогда поверхность S_2 представляется в виде

$$u^2 = v(v^4 + av^2 + 1), \quad a \neq 0, \pm 2, \pm 14,$$

а отображение $\hat{f} : S_3 \to S_2$ имеет вид $(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2)$.

В силу [25, 26] $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$ при $a \neq \pm\frac{10}{3}$. При $a = \pm\frac{10}{3}$ имеем $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 24$.

5b. Рассмотрим случай $\hat{\gamma}_f : z \to \frac{1}{z}$ и $\hat{f} : z \to \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Тогда $\operatorname{Fix}\hat{\gamma}_f = \{+1, -1\}$. В качестве особых точек орбифолда O_2 возьмем $v_j = \hat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \hat{f}(-1)$, $v_6 = \hat{f}(1)$. Уравнение поверхности S_2 в данном случае запишется в виде

$$u^2 = (v^2 - 1)\left(v^4 - v^2 + \frac{a+2}{16}\right), \quad a \neq 0, \pm 2, \pm 14.$$

Отображение f задается формулой

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - 1}{8z^3} w, \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

Вычисляя диэдральные инварианты поверхности S_2 по алгоритму, предложенному в [23], убеждаемся, что при $a \neq -34 \pm 16\sqrt{5}, 14(128 \pm 31\sqrt{17})$ имеет место равенство $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$. При $a = -34 \pm 16\sqrt{5}$ уравнение поверхности S_2 переписывается в виде $Y^2 = X(X^4 + X^2 + t)$, где $t = 1/(2436 \pm 1088\sqrt{5})$, и в силу [25] имеет группу автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$. При $a = 14(128 \pm 31\sqrt{17})$ уравнение поверхности S_2 переписывается в виде $Y^2 = X^6 + sX^3 + 1$, где $s = 2(217 \mp 54\sqrt{17})$. В этом случае $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_6$.

5c. Пусть теперь $\hat{\gamma}_f : z \to \frac{i}{z}$ и $\hat{f} : z \to \frac{1}{2}\big(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\big)$. Неподвижными точками для $\hat{\gamma}_f$ являются $\pm\sqrt{i}$. Положим $v_j = \hat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \hat{f}(-\sqrt{i})$, $v_6 = \hat{f}(\sqrt{i})$. Уравнение поверхности S_2 запишется так:

$$u^2 = (v^2 - 1)\left(v^4 - v^2 + \frac{2-a}{16}\right), \quad a \neq 0, \pm 2, \pm 14.$$

Отображение f представляется в виде

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^3} w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\right)\right).$$

Аналогично предыдущему при $a \neq 34 \pm 16\sqrt{5}, -14(128 \pm 31\sqrt{17})$ имеем $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$. В оставшихся случаях $\operatorname{Aut}(S_2)$ равна $\mathbb{D}_4$ и $\mathbb{D}_6$ соответственно.

6. При $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 12$ имеем $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{S}_3$. Поверхность S_3 описывается уравнением $w^2 = z(z^6 + az^3 + 1)$. Точки Вейерштрасса удобно представить в следующем виде: ∞, z_1, $z_1\omega$, $z_1\omega^2$, 0, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_1\omega}$, $\frac{1}{z_1\omega^2}$, где z_1 — один из корней уравнения $z^6 + az^3 + 1 = 0$ и $\omega = \exp\big(\frac{2\pi i}{3}\big)$. Можно считать, что они расположены в вершинах «треугольной призмы» и в серединах ее оснований. В данном случае имеется только одна возможность для инволюции $\hat{\gamma}_f$. Она имеет две неподвижные точки — середину боковой грани и середину противолежащего ребра. Все такие инволюции сопряжены в группе $\mathrm{Aut}(O_3)$. Можем считать, что $\hat{\gamma}_f : z \to \frac{1}{z}$. При этом в качестве функции $\hat{f}$ естественно выбрать функцию $\hat{f}(z) = z + \frac{1}{z}$. Положим $v_1 = \hat{f}(z_1)$, $v_2 = \hat{f}(z_1\omega)$, $v_3 = \hat{f}(z_1\omega^2)$, $v_4 = \hat{f}(0)$, $v_5 = \hat{f}(-1)$, $v_6 = \hat{f}(1)$. Тогда уравнение поверхности S_2 примет вид

$$u^2 = (v^2 - 4)(v^3 - 3v + a), \quad a \neq 0, \pm 2,$$

и ее группа автоморфизмов изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Поднимая отображение $\hat{f}$ до голоморфного отображения f римановых поверхностей, получим

$$f(w, z) = \left(\frac{z^2 - 1}{z^3} w, z + \frac{1}{z}\right).$$

7. При $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ группа $\mathrm{Aut}(O_3) = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ — четверная группа Клейна. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z(z^2-1)(z^4+az^2+1)$. Ее точками Вейерштрасса являются $0, \infty, \pm 1, \pm z_1, \pm\frac{1}{z_1}$, где z_1 — один из корней уравнения $z^4 + az^2 + 1 = 0$. Указанные точки образуют «октаэдр» с двумя отмеченными точками на противоположных ребрах. Это 0 и ∞. В данном случае существует только одна инволюция $\hat{\gamma}_f : z \to -\frac{1}{z}$, переводящая множество точек Вейерштрасса в себя и не оставляющая ни одну из них неподвижной. Отсюда $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит только из одного класса эквивалентности. Полагая $\hat{f}(z) = z - \frac{1}{z}$, получим, что S_2 представляется в виде

$$u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + a + 2), \quad a \neq \pm 2.$$

При этом отображение $f : S_3 \to S_2$ записывается так:

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 + 1}{z^3} w, z - \frac{1}{z}\right).$$

По классификации Больца при $a \neq -6$ будет $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$. При $a = -6$ поверхность S_2 переписывается в виде $\hat{u}^2 = \hat{v}(\hat{v}^4 - 1)$ и имеет 48 автоморфизмов.

8. Пусть $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{Aut}(O_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$. Ее точками Вейерштрасса являются $\pm z_1$, $\pm\frac{1}{z_1}$, $\pm z_2$, $\pm\frac{1}{z_2}$, где z_1 и z_2 — корни уравнений $z^4 + az^2 + 1 = 0$ и $z^4 + bz^2 + 1 = 0$ соответственно. Считаем, что все они различны и не равны ± 1, $\pm i$. Тогда справедливы неравенства $a, b \neq \pm 2$, $a \neq b$. Кроме того, считаем, что $a \neq -b$, в противном случае задача сводится к п. 5. В рассматриваемой ситуации возможны три инволюции:

1) $\hat{\gamma}_f : z \to -z$,
2) $\hat{\gamma}_f : z \to \frac{1}{z}$,
3) $\hat{\gamma}_f : z \to -\frac{1}{z}$.

Заметим, что в данном случае инволюции попарно не сопряжены в группе $\mathrm{Aut}(O_3)$. Следовательно, возможны три класса эквивалентности голоморфных отображений. Выпишем по представителю каждого класса эквивалентности.

8a. Рассмотрим отображения $\hat{\gamma}_f : z \to -z$ и $\hat{f} : z \to \frac{z^2+1}{z^2-1}$. Неподвижные точки $\hat{\gamma}_f$ равны 0 и ∞. Отсюда $v_1 = \hat{f}(z_1)$, $v_2 = \hat{f}\big(\frac{1}{z_1}\big)$, $v_3 = \hat{f}(z_2)$, $v_4 = \hat{f}\big(\frac{1}{z_2}\big)$, $v_5 = \hat{f}(0)$ и $v_6 = \hat{f}(\infty)$. Уравнение поверхности S_2 имеет вид

$$u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{a - 2}{a + 2}\right)\left(v^2 - \frac{b - 2}{b + 2}\right).$$

Голоморфное отображение $f : S_3 \to S_2$ представимо формулой

$$(u,v) = f(w,z) = \left(\frac{8z}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1}\right),$$

где $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$.

8b. В этом случае $\hat\gamma_g : z \to \frac{1}{z}$ и $\hat g : z \to \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Учитывая, что $\operatorname{Fix}\hat\gamma_g = \{\pm 1\}$, получим $v_1 = \hat g(z_1)$, $v_2 = \hat g(-z_1)$, $v_3 = \hat g(z_2)$, $v_4 = \hat g(-z_2)$, $v_5 = \hat g(-1)$ и $v_6 = \hat g(1)$. Стало быть, S_2 представимо в виде

$$u^2 = (v^2-1)\left(v^2 - \frac{2-a}{4}\right)\left(v^2 - \frac{2-b}{4}\right).$$

Отображение $g : S_3 \to S_2$ записывается так:

$$(u,v) = g(w,z) = \left(\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

8c. Пусть $\hat\gamma_h : z \to -\frac{1}{z}$ и $\hat h : z \to \frac{i}{2}\bigl(z - \frac{1}{z}\bigr)$. Имеем $\operatorname{Fix}\hat\gamma_h = \{\pm i\}$, отсюда $v_1 = \hat h(z_1)$, $v_2 = \hat h\bigl(\frac{1}{z_1}\bigr)$, $v_3 = \hat h(z_2)$, $v_4 = \hat h\bigl(\frac{1}{z_2}\bigr)$, $v_5 = \hat h(-i)$ и $v_6 = \hat h(i)$. Следовательно, поверхность S_2 задается уравнением

$$u^2 = (v^2-1)\left(v^2 - \frac{a+2}{4}\right)\left(v^2 - \frac{b+2}{4}\right).$$

Отображение $h : S_3 \to S_2$ записывается как

$$(u,v) = h(w,z) = \left(\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Замечание 1. Следуя [27], отметим, что две римановы поверхности $y^2 = (x^2-1)(x^2-p)(x^2-q)$ и $y^2 = (x^2-1)(x^2-p')(x^2-q')$ с группами автоморфизмов $\mathbb{D}_2$ конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из пар (p',q') или (q',p') содержится в следующем списке:

$$(p,q),\ \left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right),\left(\frac{1}{p},\frac{q}{p}\right),\ \left(p,\frac{q}{p}\right),\ \left(\frac{p}{q},\frac{1}{q}\right),\ \left(\frac{q}{p},q\right).$$

Замечание 2. При $(a+2)(b+2) = 16$ из очевидных равенств $\frac{a-2}{a+2} = \frac{2-b}{4}$ и $\frac{b-2}{b+2} = \frac{2-a}{4}$ имеем $f(S_3) = g(S_3) \neq h(S_3)$. Из предыдущего замечания следует, что при $a \neq \pm b$ римановы поверхности $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ не могут быть одновременно конформно эквивалентны друг другу, т. е. двойное равенство $f(S_3) = g(S_3) = h(S_3)$ невозможно.

9. При $\operatorname{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_4$ имеем $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{Z}_2$. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z(z^2-1)(z^4+az^2+b)$, $b \neq 1$ (для случая $b = 1$ см. п. 7). Ее точками Вейерштрасса являются 0, ∞, ± 1, $\pm z_1$, $\pm z_2$, где z_1 и z_2 — подходящие корни уравнения $z^4 + az^2 + b = 0$. Единственной симметрией второго порядка орбифолда является $\alpha : z \to -z$. Ее неподвижными точками будут точки 0 и ∞, которые являются точками Вейерштрасса. Следовательно, не существует голоморфных отображений $f : S_3 \to S_2$ в этом случае.

10. При $\operatorname{Aut}(S_3) = \mathbb{D}_2$ будет $\operatorname{Aut}(O_3) = \mathbb{Z}_2$. В общем положении поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = (z^2-1)(z^6+az^4+bz^2+c)$. Ее точками Вейерштрасса являются ± 1, $\pm z_1$, $\pm z_2$, $\pm z_3$, где z_1, z_2, z_3 удовлетворяют уравнению

$z^6+az^4+bz^2+c=0$. Существует единственная инволюция $\hat\gamma_f : z \to -z$, которая не фиксирует ни одной точки Вейерштрасса. Таким образом, существует единственный класс эквивалентности отображений $f : S_3 \to S_2$. Положим $\hat f(z) = z^2$. Так как неподвижными точками $\hat\gamma_f$ являются 0 и ∞, в качестве особых точек орбифолда O_2 выберем $v_j = \hat f(z_j)$, $j = 1,2,3$, $v_4 = \hat f(1)$, $v_5 = \hat f(0)$, $v_6 = \hat f(\infty)$. В результате уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = v(v-1)(v^3+av^2+bv+c)$, а отображение f представимо по формуле $(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2)$.

11. При $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2$ имеем $\mathrm{Aut}(O_3) = 1$. Поверхность S_3 задается в общем виде $w^2 = z(z-1)(z^5+az^4+bz^3+cz^2+dz+e)$. Ее точки Вейерштрасса — это $0, 1, \infty, z_1, \dots, z_5$. Поскольку группа $\mathrm{Aut}(O_3)$ тривиальна, она не содержит инволюций. Следовательно, в этом случае $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \varnothing$.

5. Основные результаты

Основным результатом предыдущего раздела является следующая классификационная

Теорема 1. *Пусть S_3 и S_2 — римановы поверхности родов 3 и 2 соответственно и $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ — множество сюръективных голоморфных отображений S_3 на S_2. Тогда имеет место один из 11 случаев из разд. 4. При этом*

(i) *в случаях 4, 9 и 11 множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ пусто;*

(ii) *в случае 8 число классов эквивалентности множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ не превосходит 2;*

(iii) *во всех прочих случаях множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности.*

Обозначим через $E(S_3, S_2)$ множество всех классов эквивалентности голоморфных отображений S_3 на S_2. В качестве непосредственного следствия из теоремы 1 получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Число элементов множества $E(S_3, S_2)$ не превосходит 2. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ и $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)\big(v^2 - \frac{a-2}{a+2}\big)\big(v^2 - \frac{b-2}{b+2}\big)$, где $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$ и $(a + 2)(b + 2) = 16$. При этом неэквивалентные отображения имеют вид $(u, v) = f(w, z)$ и $(u, v) = g(w, z)$, где $f(w, z) = \big(\frac{8z}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1}\big)$, $g(w, z) = \big(\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\big)$ и $k = \sqrt{(a + 2)(b + 2)}$.*

Доказательство. Из классификации голоморфных отображений с точностью до эквивалентности (теорема 1) и замечания 2 следует, что число классов эквивалентности множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ не превосходит 2. Полученная оценка точная и достигается для пары поверхностей S_3 и S_2 из формулировки теоремы. Это случай 8 из разд. 3.

Напомним, что всякая риманова поверхность S_2 рода 2, имеющая по крайней мере одну негиперэллиптическую инволюцию, представляется в виде $y^2 = x^6 + a_1x^4 + a_2x^2 + 1$. При этом диэдральные инварианты определяются как $u_1 = a_1^3+a_2^3$ и $u_2 = 2a_1a_2$. Известно [26], что риманова поверхность S_2 однозначно с точностью до конформной эквивалентности определяется парой (u_1, u_2). Если поверхность представлена уравнением $u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - p)(v^2 - q)$, то ее диэдральные инварианты имеют вид

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{(1 + p + q)^3}{pq} + pq\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^3, 2(1 + p + q)\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right).$$

В частности, по этим формулам находятся диэдральные инварианты (u_1^f, u_2^f), (u_1^g, u_2^g) и (u_1^h, u_2^h) римановых поверхностей

$$f(S_3): u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{a-2}{a+2}\right)\left(v^2 - \frac{b-2}{b+2}\right),$$

$$g(S_3): u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{2-a}{4}\right)\left(v^2 - \frac{2-b}{4}\right)$$

и

$$h(S_3): u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{a+2}{4}\right)\left(v^2 - \frac{b+2}{4}\right)$$

соответственно.

Пусть S_g — заданная риманова поверхность рода g. Обозначим через $I_{g'}(S_g)$ множество всех классов эквивалентности голоморфных отображений вида $f : S_g \to S_{g'}$, где $S_{g'}$ пробегает все возможные римановы поверхности рода g' и $g \geq g' > 1$. В работе Кани [28] показано, что $|I_{g'}(S_g)| \leq 2^{2g^2-1}(2^{2g^2-1} - 1)$. Имеет место следующая

Теорема 3. *Число элементов множества $I_2(S_3)$ не превосходит 3. Указанная оценка точная и достигается для римановой поверхности $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$, где $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$ и $(a \pm 2)(b \pm 2) \neq 16$. При этом, за исключением конечного числа наборов параметров $\{a, b\}$, поверхность S_3 имеет три попарно конформно неэквивалентных образа $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$, где f и g те же, что и в предыдущей теореме, а голоморфное отображение h имеет вид $h(w, z) = \left(\frac{i(z^2+1)}{8z^3} w, \frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$.*

Доказательство. Из рассмотрения перечисленных в разд. 4 случаев заключаем, что голоморфными образами заданной римановой поверхности S_3 могут быть не более трех римановых поверхностей рода 2. При этом максимальное число образов (три) достигается в случае 8. Голоморфные отображения f, g, h и соответствующие им образы перечислены в пп. 8a, 8b и 8c. Доказательство теоремы непосредственно следует из следующих трех лемм.

Лемма 2. *Пусть $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$. Предположим, что римановы поверхности $f(S_3)$ и $g(S_3)$ конформно эквивалентны. Тогда либо $(a+2)(b+2) = 16$, либо неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с одной из следующих пар: $\{-6, -2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, 2 \pm 4i\}$ и $\{\pm 2i\sqrt{3}, 2(-2 \pm i\sqrt{3})\}$.*

Доказательство. Решая систему уравнений $u_1^f = u_1^g$, $u_2^f = u_2^g$ при условии $(a + 2)(b + 2) \neq 16$, получим конечное число решений, указанных в формулировке леммы.

Лемма 3. *Пусть $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$. Предположим, что римановы поверхности $f(S_3)$ и $h(S_3)$ конформно эквивалентны. Тогда либо $(a-2)(b-2) = 16$, либо неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с одной из следующих пар: $\{6, 2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, -2 \pm 4i\}$ и $\{\pm 2i\sqrt{3}, 2(2 \pm i\sqrt{3})\}$.*

Доказательство. Решая систему уравнений $u_1^f = u_1^h$, $u_2^f = u_2^h$ при условии $(a - 2)(b - 2) \neq 16$, получим, что система имеет конечное число решений, указанных в лемме.

Лемма 4. *Пусть $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$. Предположим, что римановы поверхности $g(S_3)$ и $h(S_3)$ конформно эквивалентны. Тогда неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с одной из пар $\{2 \pm 4i, -2 \pm 4i\}$ или $\left\{\pm 2i\sqrt{3}, \pm \frac{2i}{\sqrt{3}}\right\}$.*

Доказательство. Решая систему уравнений $u_1^g = u_1^h$, $u_2^g = u_2^h$ при условии $a + b \neq 0$, получим набор решений, приведенных в формулировке леммы.

Следующий пример иллюстрирует, что случай $|I_2(S_3)| = 2$ также реализуется.

Пример. Рассмотрим риманову поверхность $S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$ и заданные на ней голоморфные отображения $h_1(w, z) = \left(\frac{2iz}{(z^2+1)^3}w, \frac{z^2-1}{z^2+1}\right)$ и $h_2(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2-i)}{8z^3}w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\right)\right)$. Тогда римановы поверхности $h_1(S_3)$ и $h_2(S_3)$ представляются уравнениями $h_1(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1)$ и $h_2(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75)$ соответственно. По классификации Больца они неизоморфны.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям профессорам В. В. Асееву и В. В. Чуешеву за постоянное внимание к работе и профессору А. Д. Медных за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Автор также благодарен рецензенту за сделанные замечания, повлекшие заметное улучшение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hurwitz A.* Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1891. V. 39. P. 1–61.
2. *Macbeath A. M.* On a theorem of Hurwitz // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1961. V. 5. P. 90–96.
3. *De Franchis M.* Un teorema sulle involuzioni irrazionali // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1913. V. 36. P. 368.
4. *Howard A., Sommese A. J.* On the theorem of de Franchis // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. 1983. V. 10, N 4. P. 429–436.
5. *Alzati A., Pirola G. P.* Some remarks on the de Franchis theorem // Ann. Univ. Ferrara Nuov. Ser., Sez. VII. 1990. V. 36. P. 45–52.
6. *Tanabe M.* On rigidity of holomorphic maps of Riemann surfaces // Osaka J. Math. 1996. V. 33. P. 485–496.
7. *Tanabe M.* A bound for the theorem of de Franchis // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 2289–2295.
8. *Tanabe M.* Holomorphic maps of Riemann surfaces and Weierstrass points // Kodai Math. J. 2005. V. 28, N 2. P. 423–429.
9. *Ito M., Yamamoto H.* Holomorphic mappings between compact Riemann surfaces // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2009. V. 52. P. 109–126.
10. *Медных И. А.* О голоморфных отображениях римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 2. С. 165–167.
11. *Fuertes Y.* Some bounds for the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces // Israel J. Math. 1999. V. 109, N 1. P. 1–12.
12. *Fuertes Y., Gonzalez-Diez G.* On the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces // Publ. Mat. 1993. V. 37. P. 339–353.
13. *Бандман Т. М.* Сюръективные голоморфные отображения проективных многообразий // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22. С. 48–57.
14. *Imayoshi Y.* Generalizations of de Franchis theorem // Duke Math. J. 1983. V. 50. P. 393–408.
15. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York; Berlin: Springer-Verl., 1980 (Grad. Texts Math.; V. 71).
16. *Accola R. D. M.* On lifting the hyperelliptic involution // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 2. P. 341–347.
17. *Koebe P.* Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven // Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen. 1907. P. 191–210; 633–669.
18. *Koebe P.* Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven Dritte Mitteilung // Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen. 1908. P. 337–360.
19. *Satake I.* On a generalization of the notion of manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. 1956. V. 42. P. 359–363.

20. *Thurston W. P.* The geometry and topology of three-manifolds. Princeton, NJ: Princeton Univ. Math. Dept., 1978.
21. *Скотт П.* Геометрия на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.
22. *Bolza O.* On binary sextics with linear transformations into themselves // Amer. J. Math. 1888. V. 10. P. 47–60.
23. *Magaard K., Shaska T., Shpectorov S., Voelklein H.* The locus of curves with prescribed automorphism group // RIMS Kyoto Ser. Commun. Arithmetic Fund. Groups. 2002. V. 6. P. 112–141.
24. *Martens H.* A remark on Abel's theorem and the mapping of linear series // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 557–559.
25. *Cardona G., Quer J.* Curves of genus 2 with group of automorphisms isomorphic to D8 or D12 // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359, N 6. P. 2831–2849.
26. *Shaska T.* Determining the automorphism group of a hyperelliptic curve // Proc. 2003 Int. Symp. Symbolic and algebraic computation. Philadelphia, PA, 2003. P. 248–254.
27. *Silhol R.* On some one parameter families of genus 2 algebraic curves and half-twists // Comment. Math. Helv. 2007. V. 82. P. 413–449.
28. *Kani E.* Bounds on the number of non-rational subfields of a function field // Invent. Math. 1986. V. 85. P. 185–198.

Статья поступила 9 октября 2009 г.

Илья Александрович Медных
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`ilyamednykh@mail.ru`