Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 514.7

НОРМАЛЬНЫЙ СУБРИМАНОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА ГРУППЕ $E(2)$, ПОРОЖДЕННЫЙ ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКОЙ И ПРАВОИНВАРИАНТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

А. Д. Мажитова

Аннотация. Рассмотрена субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $E(2)$, оснащенной левоинвариантной метрикой и правоинвариантным распределением. Эта задача основана на построении гамильтоновой структуры для заданной метрики при помощи принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: субриманова геометрия, правоинвариантная метрика, гамильтониан, геодезическая.

1. Введение. Геодезические субриманова многообразия: основные определения

В работе продолжено исследование субримановых задач на трехмерных разрешимых группах Ли. В [1, 2] проинтегрированы геодезические потоки на группах Карно $SOLV^+$ и $SOLV^-$ (в терминологии статьи [3]), т. е. оснащенных левоинвариантной метрикой и левоинвариантным распределением. Алгебраически данные группы образованы всеми движениями евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского, т. е. группами $E(2)$ и $SH(2)$ соответственно.

В отличие от указанных случаев данная работа посвящена группе $E(2)$, на которой субриманова метрика задана ограничением левоинвариантной метрики на правоинвариантное распределение.

Исследование геодезических субримановой геометрии на других простых и полупростых группах Ли, а также их классификация приведены в [3–7] (в [7] подробно описана параметризация геодезических потока, проинтегрированного ранее в [2]).

Введем основные понятия и определения.

Пусть M^n — гладкое n-мерное многообразие. Гладкое семейство

$$\Delta = \{\Delta(q) : \Delta(q) \in T_qM^n,\ q \in M^n,\ \dim \Delta(q) = k\}$$

k-мерных подпространств в касательных пространствах в точках $q \in M^n$ вполне неинтегрируемо (или вполне неголономно), если $k < n$ и векторные поля из Δ и их всевозможные коммутаторы порождают все касательное пространство TM^n:

$$\operatorname{span}\{[f_1, [\dots [f_{m-1}, f_m] \dots]](q) : f_i(p) \in \Delta(p),\ p \in M^n,\ m = 1, \dots\} = T_qM^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 1431/ГФ Министерства образования и науки Республики Казахстан и гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

Пусть g_{ij} — полная риманова метрика на M^n. Тройка (M^n, Δ, g_{ij}) называется *субримановым многообразием*.

Непрерывная в смысле Липшица кривая $\gamma : [0,T] \to M^n$ называется *допустимой*, если $\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t))$ для почти всех $t \in [0,T]$. Ее длина вычисляется по формуле

$$l(\gamma) = \int\limits_0^T \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt.$$

Расстояние между двумя точками на многообразии определяется как нижний предел длин допустимых кривых, соединяющих эти точки:

$$d(q_0, q_1) = \inf_{\gamma \in \Omega_{q_0,q_1}} l(\gamma),$$

где Ω_{q_0,q_1} — множество всех допустимых кривых, соединяющих точки q_0 и q_1. Функция $d(\cdot,\cdot)$ называется *субримановой метрикой* на M^n, а геодезическая этой метрики является допустимой кривой $\gamma : [0,T] \to M^n$, которая локально минимизирует функционал длины $l(\gamma)$.

Пусть $f_1, \dots, f_k$ — касательные ортонормированные векторные поля, задающие ортонормированные базисы в Δ.

Для геодезических субримановой метрики должен выполняться

Принцип максимума Понтрягина. *Пусть M^n — гладкое n-мерное многообразие. Рассмотрим для непрерывных в смысле Липшица кривых следующую задачу минимизации:*

$$\dot q = \sum_{i=1}^k u_i f_i(q),\ u_i \in \mathbb{R}, \quad \int\limits_0^T \sum_{i=1}^k u_i^2(t)\, dt \longrightarrow \min, \quad q(0) = q_0,\ q(T) = q_1$$

с фиксированным T, и отображение $\mathscr{H} : T^*M^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, заданное функцией

$$\mathscr{H}(q, \lambda, p_0, u) := \left\langle \lambda, \sum_{i=1}^k u_i f_i(q) \right\rangle + p_0 \sum_{i=1}^k u_i^2.$$

Если кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$ с управлением $u(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^k$ оптимальна, то существуют липшицева функция (ковектор) $\lambda(\cdot) : t \in [0,T] \mapsto \lambda(t) \in T^*_{q(t)}M^n$, $(\lambda(t), p_0) \neq 0$, и постоянная $p_0 \leq 0$ такие, что

(i) $\dot q(t) = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t))$,

(ii) $\dot\lambda(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t))$,

(iii) $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t)) = 0$.

Кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, называется *экстремальной кривой* (или *экстремалью*). Такой кривой соответствует множество пар $(\lambda(\cdot), p_0)$.

Экстремаль называется

- *нормальной*, если $p_0 \neq 0$;
- *анормальной*, если $p_0 = 0$;
- *строго анормальной*, если она не проектируется (на M^n) в нормальные экстремали.

Для нормальных экстремалей будем полагать $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Из п. (iii) следует, что

$$u_i = \langle \lambda(t), f_i(t) \rangle$$

и кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$ будет нормальной геодезической тогда и только тогда, когда она является проекцией на M^n решения $(\lambda(t), q(t))$ гамильтоновой системы на T^*M^n с гамильтонианом

$$H(q,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle\lambda, f_i\rangle^2\right), \quad q \in M^n, \ \lambda \in T_q^*M^n. \tag{1}$$

Гамильтониан H постоянен вдоль любого решения гамильтоновой системы. Более того, $H = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда геодезическая натурально параметризована. За другими фактами отсылаем к [8, 9].

2. Субриманова задача на группе $E(2)$

Рассмотрим группу $E(2)$, представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В качестве базиса в алгебре Ли возьмем следующие элементы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Рассмотрим на группе левоинвариантную метрику, порожденную скалярным произведением

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

и правоинвариантное распределение, образованное правыми сдвигами площадки $\Delta = \operatorname{span}\{e_1, e_3\}$.

Пусть $q = (x, y, z) \in E(2)$. Тогда касательное пространство в q порождено матрицами

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а векторы e_1, e_2, e_3 с помощью правых сдвигов переходят в следующие векторы:

$$R_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & y \\ -\cos z & -\sin z & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$R_q^*(e_1) = \partial_x, \quad R_q^*(e_2) = \partial_y, \quad R_q^*(e_3) = y \cdot \partial_x - x \cdot \partial_y + \partial_z. \tag{5}$$

В каждой точке группы неголономное распределение порождено векторами $\tilde{f}_1 = \partial_x$, $\tilde{f}_3 = y \cdot \partial_x - x \cdot \partial_y + \partial_z$. Ортонормированный базис касательных векторов к распределению может быть выбран в виде

$$f_1 = \partial_x, \quad f_3 = \frac{-x \cdot \partial_y + \partial_z}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Найдем функцию Гамильтона по формуле (1):

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2(x^2+1)}(-xp_y + p_z)^2. \tag{6}$$

Соответствующие уравнения Гамильтона примут вид

$$\begin{gathered} \dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = -\frac{x}{(x^2+1)}(-xp_y + p_z), \quad \dot{z} = \frac{1}{(x^2+1)}(-xp_y + p_z), \\ \dot{p_x} = \frac{x}{(x^2+1)^2}(-xp_y + p_z)^2 + \frac{1}{(x^2+1)}(-xp_y + p_z)p_y, \quad \dot{p_y} = 0, \quad \dot{p_z} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где точка означает производную по t. Система (7) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_y, \quad I_3 = p_z,$$

а значит, вполне интегрируема.

Рассмотрим нормальные геодезические с начальными данными:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \tag{8}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad p_y = a, \quad p_z = b.$$

Подставив эти выражения в гамильтониан (6), получим

$$1 = p_x^2 + \frac{1}{x^2+1}(-ax+b)^2. \tag{9}$$

Из (7) и (9) нетрудно увидеть, что верно следующее

Предложение 1. *Если* $p_x \equiv 0$, *то*

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = ct + y_0, \quad z(t) = dt + z_0,$$

где

$$d = \frac{-ax_0 + b}{x_0^2 + 1}, \quad c = -x_0 d.$$

Пусть $p_x \neq 0$. Из (9) выразим p_x, подставим его в первое уравнение системы (7) и найдем интеграл для переменной t при $p_x > 0$:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{(-ax+b)^2}{x^2+1}}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{\sqrt{(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2}}. \tag{10}$$

Случай $p_x < 0$ может быть рассмотрен аналогично.

Последний интеграл разбивается на два слагаемых:

$$t = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}\sqrt{(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2}}, \tag{11}$$

которые вычисляются в терминах эллиптических функций. Предварительно эти интегралы нужно привести к нормальной форме Лежандра (см. [11–12]). Будем рассматривать случай, когда квадратный трехчлен $(1-a^2)x^2+2abx+1-b^2$ имеет два вещественных корня, т. е. $a^2+b^2-1>0$. Когда $a^2+b^2-1=0$, интеграл (10) вырождается:

$$t=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{\sqrt{(1-a^2)x^2+2abx+1-b^2}}=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{bx+a},$$

и выражается через элементарные функции:

$$t=\frac{1}{b}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{b^2}\operatorname{Arsh}\frac{b-ax}{a+bx}-\frac{a}{b^2}\operatorname{Arsh}x. \tag{12}$$

Подкоренное выражение $G(x)$ в последних интегралах является полиномом четвертой степени, который можно привести к виду

$$G(x)=\left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(x+\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(x-\frac{b}{a}\right)^2\right]\times\left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(x+\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a^2(1-a^2-b^2)}{a^2+b^2}\left(x-\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

и переписать в следующей форме:

$$G(x)=\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^2\left(x+\frac{a}{b}\right)^4\left[1+\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}\right)^2\right]\times\left[1+\frac{a^2(1-a^2-b^2)}{b^2}\left(\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}\right)^2\right].$$

Подставив полученное разложение в интегралы и сделав дробно-линейное преобразование

$$\frac{b}{a}\xi=\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}, \tag{13}$$

получим

$$t=\int\frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-(a^2+b^2-1)\xi^2)}}+\frac{b^2}{a^2}\int\frac{\left(\frac{\xi+\frac{b}{a}}{\xi-\frac{a}{b}}\right)^2d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-(a^2+b^2-1)\xi^2)}}.$$

Вычислив эти интегралы после соответствующего преобразования, имеем

$$t=\frac{1}{k}\mathrm{F}(\arccos m\xi,k)+p_1\Pi(\arccos m\xi,n,k)+p_2E(\arccos m\xi,k)+p_3\frac{\xi\sqrt{(1+\xi^2)\left(\frac{1}{a^2+b^2-1}-\xi^2\right)}}{1-\frac{b^2}{a^2}\xi^2}+p_4\sqrt{A\left(\xi^2-\frac{a^2}{b^2}\right)^{-2}+B\left(\xi^2-\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}+C}+p_5\arcsin\frac{2A\left(\xi^2-\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}+B}{p_6}, \tag{14}$$

где

$$m=\sqrt{a^2+b^2-1},\quad n=\frac{b^2}{b^2-a^2(a^2+b^2-1)},\quad k=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$p_1 = \frac{a^2(a^2+b^2-1)}{\sqrt{a^2+b^2}(a^2(a^2+b^2-1)-b^2)} \times \left[\frac{b^4-a^2+a^2b^2}{a^2b^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2a^4(1-a^2)-a^4+a^2b^2}{2(b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2))} \right) - \frac{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)}{a^2b^2} \right],$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}(b^4-a^4+a^2b^2)}{b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2)}, \quad p_3 = \frac{1}{2}\frac{b^2(b^4-a^4+a^2b^2)(a^2+b^2-1)}{a^2(b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2))},$$

$$p_4 = -\frac{a\sqrt{a^2+b^2-1}}{b^3(a^2+b^2)(1-a^2)}, \quad p_5 = -\frac{b^3\sqrt{a^2+b^2-1}}{2a(a^2-1)^{3/2}}, \quad p_6 = b^4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1}},$$

$$A = \frac{(a^2+b^2)^2(1-a^2)}{a^2+b^2-1}, \quad B = \frac{(a^2+b^2)(2(1-a^2)-b^2)b^2}{a^2+b^2-1}, \quad C = -b^4.$$

Функции F, Π и E являются эллиптическими интегралами первого, второго и третьего родов соответственно. Если в (12) сделать обратную (11) замену переменной, а затем произвести обращение полученного выражения в эллиптических функциях, можно получить зависимость координатной функции x от t. Подставив ее во второе и третье уравнения системы (7), можно получить уравнения геодезических.

В итоге приходим к следующему результату.

Теорема 1. 1. *Если $p_x = 0$, то в координатах x, y, z геодезическая задается линейной функцией (см. предложение* 1).

2. *Если $p_x > 0$ и $p_y^2 + p_z^2 > 1$, то зависимость t от x задается формулами* (13) *и* (14) *и функция $x(t)$ получается обращением эллиптического интеграла. Подстановка ее в* (7) *позволяет прямым интегрированием найти $y(t)$ и $z(t)$.*

3. *Если $p_x > 0$ и $p_y^2+p_z^2 = 1$, то эллиптические интегралы* (11) *вырождаются, x и t связаны уравнением* (12) *и уравнения нормальной геодезической получаются процедурой, аналогичной п.* 2, *но при этом геодезические описываются в элементарных функциях.*

4. *Случай $p_x < 0$ разбирается аналогично случаю $p_x > 0$ с учетом, что уравнения* (14) *при $p_y^2+p_z^2 > 1$ и* (12) *при $p_y^2+p_z^2 = 1$ берутся с противоположным знаком.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мажитова А. Д.* Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 120–128.
2. *Mazhitova A. D.* Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group $SOLV^-$ // J. Dyn. Control Syst. 2012. V. 18, N 3. P. 309–322.
3. *Agrachev A., Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // J. Dyn. Control Syst. 2012. V. 18, N 3. P. 21–44.
4. *Taimanov I. A.* Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics // J. Dyn. Control Syst. 1997. V. 3. P. 129–147.
5. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
6. *Calin O., Chang D.-Ch., Markina I.* Sub-Riemannian geometry on the sphere S^3 // Can. J. Math. 2009. V. 61. P. 721–739.
7. *Butt Ya. A., Sachkov Yu. L., Bhatti A. I.* Parametrization of extremal trajectories in sub-Riemannian problem on group of motions of pseudo Euclidean plane // J. Dyn. Control Syst. (to appear).
8. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
9. *Сачков Ю. Л.* Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. М.: Физматлит, 2007.

10. *Бэйтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

11. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963.

12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила 25 ноября 2013 г.

Мажитова Акмарал Даулетбаевна
Казахский нац. университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71, Алматы 050038, Казахстан
Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz