Theory and Applications of Categories, Vol. 20, No. 17, 2008, pp. 605–649.

PROPRIÉTÉS UNIVERSELLES ET EXTENSIONS DE KAN DÉRIVÉES

DENIS-CHARLES CISINSKI

ABSTRACT. We prove that, given any small category A, the derivator $\mathbf{Hot}_A$, corresponding to the homotopy theory of presheaves of homotopy types on A, is characterized by a natural universal property. In particular, the theory of Kan extensions extends to the setting of Grothendieck derivators.

Contents

Introduction

Ce texte fait suite à deux autres articles: [Cis03, Cis04].

Dans *Pursuing stacks* [Gro83], Grothendieck énonce une *hypothèse inspiratrice* à propos de la catégorie homotopique des CW-complexes, notée ici Hot: la sous-catégorie pleine des endofoncteurs de Hot formée des auto-équivalences est équivalente à la catégorie finale. Autrement dit, toute auto-équivalence de Hot est isomorphe à l'identité, et le seul endomorphisme de l'identité est l'identité. Considérons un cas plus trivial: la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, désignons par $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ qui commutent aux petites limites inductives. L'évaluation sur l'ensemble à un élément e induit, pour toute petite catégorie admettant des petites limites inductives, une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{E}ns,\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C} \ .$$

En particulier, on a une équivalence de catégories $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{E}ns,\mathcal{E}ns) \simeq \mathcal{E}ns$ par laquelle l'identité de $\mathcal{E}ns$ correspond à l'ensemble final. En particulier, $1_{\mathcal{E}ns}$ est un objet final de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{E}ns,\mathcal{E}ns)$, ce qui implique l'analogue de l'hypothèse inspiratrice pour

Received by the editors 2008-07-23 and, in revised form, 2008-12-04.
Transmitted by Steve Lack. Published on 2008-12-12.
2000 Mathematics Subject Classification: 55U40, 18A40, 18G50, 18G55, 55U35.
Key words and phrases: derivator, homotopy theory, derived Kan extension, homotopy colimit, homotopy limit..

la catégorie des ensembles. L'équivalence de catégories ci-dessus est un cas particulier de la théorie des extensions de Kan à gauche qui caractérise la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur une petite catégorie A par une propriété universelle: pour toute catégorie $\mathcal{C}$ admettant des petites limites inductives, la composition avec le plongement de Yoneda de A dans $\widehat{A}$ induit une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\widehat{A},\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(A,\mathcal{C}) \ .$$

Autrement dit, le 2-foncteur $\mathcal{C} \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}(A,\mathcal{C})$ est représenté par $\widehat{A}$ dans la 2-catégorie des catégories admettant des petite limites inductives. Cette propriété universelle a une interprétation géométrique: cela signifie que la catégorie des préfaisceaux sur A est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur elle même pour la topologie canonique.

Le but de ce texte est d'établir des résultats analogues pour des "catégories admettant des petites limites inductives homotopiques", et une notion adéquate de préfaisceaux sur une petite catégorie dans cette situation (3.24 et 3.26). C'est dans cette optique que Grothendieck [Gro83, Gro90] a dégagé la notion de *dérivateur*, déjà introduite dans [Mal01, Cis03]. Le rôle de la catégorie des préfaisceaux sur A est joué dans ce contexte par le dérivateur $\mathbf{Hot}_A$ associé à la théorie de l'homotopie des préfaisceaux en petites catégories (ou de manière équivalente, en ensembles simpliciaux) sur A. L'ingrédient essentiel pour la caractérisation de $\mathbf{Hot}_A$ par une propriété universelle est la définition axiomatique de la théorie de l'homotopie des petites catégories dégagée par Grothendieck [Gro83] par la notion de *localisateur fondamental*. Les localisateurs fondamentaux sont des classes de flèches de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories vérifiant certains axiomes de descente (dont l'énoncé du théorème A de Quillen [Qui73] est un cas particulier). Le théorème principal de [Cis04] est que les équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$ (appelées ici ∞-équivalences) forment le localisateur fondamental minimal. Or toute théorie cohomologique (en un sens adéquat) sur $\mathcal{C}at$ définit canoniquement un localisateur fondamental. En particulier, tout dérivateur $\mathbb{D}$ définit canoniquement une classe de $\mathbb{D}$-équivalences qui se révèlent former un localisateur fondamental (3.7). Une fois constaté que le plongement de Yoneda est homotopiquement dense (1.15), un simple calcul local des extensions de Kan homotopiques, fondé sur le yoga des isomorphismes de changement de base (2.4), permet alors de prouver la propriété universelle. En second lieu, on étend cette propriété universelle aux dérivateurs ponctués (*i.e.* admettant un objet nul). Si $\mathcal{C}$ est une catégorie admettant des petites limites inductives et un objet final $\star$, désignons par $\mathcal{C}_\bullet$ la catégorie des objets pointés de $\mathcal{C}$. On a un foncteur canonique (adjoint à gauche du foncteur d'oubli) $?_+ \ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet$ qui associe à tout objet X de $\mathcal{C}$, l'objet $X_+ = X \amalg \star$. On vérifie facilement que pour toute catégorie $\mathcal{C}'$ admettant des petites limites inductives et un objet nul, la composition par $?_+$ induit une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{C}_\bullet,\mathcal{C}') \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{C},\mathcal{C}') \ .$$

On démontre un énoncé analogue pour les dérivateurs (4.17), ce qui a pour corollaire la propriété universelle annoncée (4.19 et 4.21). Ces propriétés universelles sont exploitées pour définir une structure monoïdale canonique sur $\mathbf{Hot}$ (et sur sa variante ponctuée

$\mathbf{Hot}_\bullet$), laquelle se révèle être celle définie par le produit cartésien (resp. le $\wedge$-produit). On construit de même une action canonique de **Hot** (resp. de $\mathbf{Hot}_\bullet$) sur tout dérivateur (resp. sur tout dérivateur ponctué). Enfin, le théorème principal de [Cis03] étant qu'à toute catégorie de modèles est associé un dérivateur, on utilise ces résultats pour trivialiser les deux conjectures de cohérence homotopique posées par Hovey [Hov99, 5.6.6 et 5.7.5]. On retrouve aussi de la sorte les résultats de Chachólski et Scherer [CS08].

Pour terminer cette introduction, signalons que l'on peut montrer que le dérivateur stable universel associé à la théorie de l'homotopie des CW-complexes par Heller [Hel97] est canoniquement équivalent au dérivateur associé à la catégorie de modèles des spectres symétriques. Les résultats présentés ici permettent donc de caractériser la théorie de l'homotopie stable par une propriété universelle; voir [Tab08] pour plus de détails. D'autres applications sont données dans [Tab08, Cis08].

Conventions et notations

On rapelle ici succintement les définitions concernant les dérivateurs. D'une manière générale, il est conseillé au lecteur de parcourir le premier paragraphe de [Cis03] afin de se familiariser avec les différentes terminologies et notations de manière plus précise.

On se donne une catégorie de diagrammes $\mathcal{D}ia$ (c'est-à-dire une sous-2-catégorie pleine de la 2-catégorie des petites catégories vérifiant des conditions de stabilité adéquates): dans la pratique, $\mathcal{D}ia$ est la 2-catégorie des ensembles ordonnés (éventuellement finis), ou bien la 2-catégorie des petites catégories (c'est cette dernière situation qui sera le centre d'intérêt dans cet article).

Un *prédérivateur* $\mathbb{D}$ (de domaine $\mathcal{D}ia$) est un 2-foncteur contravariant (sur les 1-flèches et les 2-flèches) de $\mathcal{D}ia$ vers la 2-catégorie des catégories (non nécessairement petites). Les prédérivateurs forment une 2-catégorie, notée $\mathcal{P}reder$: les 1-morphismes (appelés dans [Cis03] $\mathcal{D}ia$-*morphismes*) sont les pseudo-transformations naturelles, et les 2-morphismes sont les modifications (appelées dans [Cis03] 2-$\mathcal{D}ia$-*morphismes*). Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux prédérivateurs, on désignera par $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ la catégorie des morphismes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$.

On note e la catégorie ponctuelle (*i.e.* avec un seul objet, et pour seul morphisme, l'identité). La philosophie des (pré)dérivateurs consiste à voir $\mathbb{D}$ comme une structure sur la catégorie $\mathbb{D}(e)$.

La notion de dérivateur à gauche est une généralisation de la notion de catégorie admettant des petites limites projectives. En effet, si $\mathcal{C}$ est une telle catégorie, elle définit un dérivateur à gauche défini par

$$A \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \,,$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$ désigne la catégorie des préfaisceaux sur A à valeurs dans $\mathcal{C}$.

Pour un prédérivateur $\mathbb{D}$ donné et un foncteur $u : A \longrightarrow B$, on note $u^* = \mathbb{D}(u) : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$ le foncteur correspondant.

0.1. DÉFINITION. Un *dérivateur faible à gauche* (sous-entendu de domaine $\mathcal{D}ia$) est un prédérivateur $\mathbb{D}$ satisfaisant les axiomes suivants.

Der 1 (a) Si I et J sont deux objets de $\mathcal{D}ia$, alors le foncteur

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(i^*,j^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

induit par les inclusions canoniques $i : I \longrightarrow I \amalg J$ et $j : J \longrightarrow I \amalg J$, est une équivalence de catégories.

(b) $\mathbb{D}(\varnothing)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle.

Der 2 Pour toute petite catégorie A dans $\mathcal{D}ia$, la famille de foncteurs $a^* : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathsf{Ob}\, A$, est conservative (*i.e.* si φ est un morphisme de $\mathbb{D}(A)$ tel que pour tout objet a de A, $a^*\varphi = \varphi_a$ soit un isomorphisme, alors φ est un isomorphisme).

Der 3g Tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admet une image directe cohomologique dans $\mathbb{D}$. Autrement dit, pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur image inverse

$$u^* : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$$

admet un adjoint à droite

$$u_* : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)\,.$$

Der 4g Pour tout foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ et tout objet b de B, le morphisme de changement de base $b^*\, u_* \longrightarrow p_*\, j^*$, induit par le 2-diagramme associé à (u, b),

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\ \alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$ (où $A/b = B/b \times_B A$, j est la projection canonique, et α est le 2-morphisme défini par les morphismes de la forme $\alpha : u(a) \longrightarrow b$ pour chaque objet (a, α) de A/b).

Si $\mathbb{D}$ est un prédérivateur, on lui associe son prédérivateur *opposé* $\mathbb{D}^{\mathrm{op}}$ par la formule

$$\mathbb{D}^{\mathrm{op}}(A) = \mathbb{D}(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}\,.$$

Cela permet de dualiser les notions concernant les (pré)dérivateurs.

0.2. DÉFINITION. Un prédérivateur $\mathbb{D}$ (de domaine $\mathcal{D}ia$) est un *dérivateur faible à droite* si $\mathbb{D}^{\mathrm{op}}$ est un dérivateur faible à gauche (de domaine $\mathcal{D}ia' = \{A^{\mathrm{op}} \,|\, A \in \mathcal{D}ia\}$), ou encore, de manière équivalente, s'il satisfait les axiomes Der 1 et Der 2, ainsi que les deux axiomes ci-dessous.

Der 3d Tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admet une image directe homologique dans $\mathbb{D}$. Autrement dit, pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur image inverse

$$u^* : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$$

admet un adjoint à gauche

$$u_! : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)\,.$$

Der 4d Pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ et tout objet b de B, le morphisme de changement de base $p_!\, j^* \longrightarrow b^*\, u_!$, induit par le 2-diagramme,

$$\begin{tikzcd} b\backslash A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\ \nearrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$.

Un *dérivateur* est un dérivateur faible à gauche et à droite.

Soit $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ un $\mathcal{D}ia$-morphisme entre deux dérivateurs faibles à gauches (resp. à droite). On dit que $\mathcal{F}$ est *continu*, ou encore *exact à gauche* (resp. *cocontinu*, ou encore *exact à droite*), si pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$, le foncteur $\mathcal{F}$ commute à u_* (resp. $u_!$). Un $\mathcal{D}ia$-morphisme entre dérivateurs est dit *bicontinu*, on encore *exact*, s'il est à la fois continu et cocontinu.

Si A est une petite catégorie, on note par défaut $p_A : A \longrightarrow e$ l'unique foncteur de A vers e.

Étant données deux catégories A et B, on désignera par $\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$ la catégorie des foncteurs de A vers B.

1. Densité homotopique du plongement de Yoneda

1.1. On rappelle que $\widehat{\Delta}$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux, et $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ les équivalences faibles simpliciales [Cis04, 2.1.1]. Le foncteur nerf

$$\mathrm{N} : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

permet de définir les ∞-équivalences par $\mathcal{W}_\infty = \mathrm{N}^{-1}\, \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$. On obtient ainsi un morphisme de localisateurs:

$$\mathrm{N} : (\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty) \longrightarrow (\widehat{\Delta}, \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}})\,.$$

D'autre part, on a un foncteur $i_\Delta : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at$ [Cis04, 1.3.2], et des équivalences faibles naturelles

$$i_\Delta \, \mathrm{N} \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}at} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\, i_\Delta \xrightarrow{\sim} 1_{\widehat{\Delta}}$$

(voir [Cis04, 2.1.15 et 2.2.3]). Cela implique aussitôt que le foncteur nerf induit une équivalence entre les prédérivateurs induits

$$\mathrm{N} \; : \mathbb{D}_{(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{(\widehat{\Delta}, \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}})} \; .$$

On pose $\mathbf{Hot} = \mathbb{D}_{(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)}$. L'équivalence ci-dessus implique que cette notation n'est pas contradictoire avec celle de [Cis03, 3.10] (du moins à équivalence près). Il résulte de [Tho80, Cis99] et de [Cis03, théorème 6.11] et de son dual que $\mathbf{Hot}$ est un dérivateur de domaine $\mathcal{C}at$. On désigne encore par Hot la catégorie $\mathbf{Hot}(e)$. Cette dernière est donc équivalente à celle des CW-complexes à homotopie près. Enfin, si A est une petite catégorie, on note $\mathbf{Hot}^{\mathrm{op}}_A = (\mathbf{Hot}_A)^{\mathrm{op}}$. Autrement dit, $\mathbf{Hot}^{\mathrm{op}}_A$ est le dérivateur qui associe à chaque petite catégorie X, la catégorie homotopique $\mathbf{Hot}(A \times X^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$, localisée de $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times X, \mathcal{C}at)^{\mathrm{op}}$.

Si I est une petite catégorie, on appellera encore ∞-équivalences les flèches de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$ qui sont des ∞-équivalences de $\mathcal{C}at$ argument par argument. Les résultats de ce paragraphe sont rédigés en terme d'∞-équivalences mais n'utilisent en fait que les axiomes de localisateur fondamental [Gro83, Mal05a] (lesquels sont vérifiés par $\mathcal{W}_\infty$ en vertu de [Cis04, théorème 2.1.13] ou encore de la remarque 3.8).

1.2. Soit A une petite catégorie. Pour chaque foncteur $F : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}at$ (resp. $F : A \longrightarrow \mathcal{C}at$), on note

$$\zeta(F) \; : \nabla F \longrightarrow A \quad (\text{resp.} \quad \theta(F) \; : \textstyle\int F \longrightarrow A \quad)$$

la fibration (resp. la cofibration) associée[1]. La construction de $\int F$ est explicitée par exemple dans [Cis04, 1.2.1], et ∇F est définie par la formule $\nabla F = (\int F^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$.

Soient A et X deux petites catégories. On considère un foncteur $F : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)$, *i.e.* un foncteur $X \times A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}at$. En appliquant les constructions ∇ et $\int$ fibre à fibre, on obtient alors deux foncteurs

$$\nabla F \; : X \longrightarrow \mathcal{C}at \qquad \text{et} \qquad \textstyle\int F \; : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}at \; ,$$

un isomorphisme canonique au-dessus de $A \times X$:

$$\begin{tikzcd} \int \nabla F \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\int \zeta(F)"'] & & \nabla \int F \arrow[dl, "\nabla\theta(F)"] \\ & A \times X & \end{tikzcd} \; .$$

[1]Mise à part la section 6, les mots fibration et cofibration sont à prendre dans ces notes au sens catégorique [Gro03, Exposé VI].

En composant avec la projection $X \times A \longrightarrow A$, on obtient une fibration

$$\varpi(F) \ : \nabla\!\int F \longrightarrow A \ ,$$

et en composant avec la projection $X \times A \longrightarrow X$, une cofibration

$$\pi(F) \ : \nabla\!\int F \longrightarrow X \ .$$

D'autre part, on a un foncteur

$$h_A \ : A \longrightarrow \widehat{A} = \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}ns) \subset \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at) \ ,$$

induit par le plongement de Yoneda de A dans $\widehat{A}$ et l'inclusion de la catégorie des ensembles (vus comme des catégories discrètes) dans $\mathcal{C}at$. On peut aussi voir h_A comme un objet de $\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(A) = (\mathbf{Hot}(A^{\mathrm{op}} \times A))^{\mathrm{op}}$. La catégorie $\nabla\!\int h_A$ admet une descritption explicite: c'est la catégorie $\mathsf{Fl}\,A$ des flèches de A. La fibration $s = \varphi(h_A)$ est le foncteur "source", et la cofibration $t = \pi(h_A)$, le foncteur "but". En particulier, on a un morphisme de foncteurs canonique $s \longrightarrow t$.

On fixe à présent une petite catégorie A.

1.3. LEMME. *Les fibres des foncteurs*

$$\varpi(h_A) \ : \nabla\!\int h_A \longrightarrow A \quad \textit{et} \quad \pi(h_A) \ : \nabla\!\int h_A \longrightarrow A$$

sont asphériques. En particulier, le premier est coasphérique, et le second est asphérique.

DÉMONSTRATION. Pour chaque objet a de A, $\int(h_A(a)) = a\backslash A$ est une catégorie asphérique, car elle admet un objet initial. Or ces catégories sont les fibres de la fibration $\varpi(h_A) \ : \nabla \int h_A \longrightarrow A$. L'identification $\pi(h_A)^{\mathrm{op}} = \varpi(h_{A^{\mathrm{op}}})$ achève ainsi cette démonstration. ∎

1.4. Soit X une petite catégorie. On note

$$1_\sharp = 1_\sharp^X \ : \mathcal{C}at/X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathcal{C}at)$$

le foncteur qui associe à chaque X-catégorie C le foncteur

$$1_\sharp(C) \ : X \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \quad x \longmapsto C/x \ .$$

On a d'autre part un foncteur

$$1^\sharp = 1^\sharp_X \ : \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/X$$

associant à chaque foncteur F de X vers $\mathcal{C}at$ la X-catégorie

$$1^\sharp(F) = (\textstyle\int F, \theta(F)) \ .$$

On a en outre des morphismes naturels

$$\varepsilon_F \ : 1_\sharp 1^\sharp(F) \longrightarrow F \quad \text{et} \quad \eta_C \ : C \longrightarrow 1^\sharp 1_\sharp(C) \ .$$

Le morphisme ε_F est défini pour chaque objet x de X par les foncteurs canoniques [Cis04, 1.3.7]

$$(\textstyle\int F)/x \simeq \int F|_{X/x} \longrightarrow \varinjlim F|_{X/x} \simeq F(x) \ .$$

Plus concrètement, si $(a, x', u : x' \to x)$ est un objet de $\int F/x$ (*i.e.* u est une flèche de X et a est un objet de $F(x')$, $\varepsilon_F(x)(a, x', u) = F(u)(a)$. Le morphisme η_C est le foncteur au-dessus de X

$$C \longrightarrow \textstyle\int 1_\sharp(C) \quad , \quad c \longmapsto (c, p_C(c))$$

(où $p_C \ : C \longrightarrow X$ est le morphisme structural). La vérification de l'énoncé ci-dessous est laissée au lecteur.

1.5. Lemme. *Les foncteurs $1_\sharp$ et $1^\sharp$ forment un couple de foncteurs adjoints avec pour co-unité ε et pour unité η.*

1.6. Lemme. *Le morphisme de foncteurs ε est une ∞-équivalence naturelle.*

Démonstration. Si F est un foncteur de X vers $\mathcal{C}at$, et si x est un objet de X, le foncteur $\varepsilon_F(x)$ est l'adjoint à gauche de l'inclusion canonique $F(x) \longrightarrow (\int F)/x$ ($\theta(F)$ est une cofibration), ce qui implique aussitôt que c'est une ∞-équivalence (en vertu de [Cis04, corollaire 1.1.9]). ■

1.7. On appelle ∞-*équivalences* les flèches de $\mathcal{C}at/X$ dont l'image par le foncteur $1_\sharp$ est une ∞-équivalence. Autrement dit, un X-foncteur $C \longrightarrow C'$ est une ∞-équivalence si et seulement si pour tout objet x de X, le foncteur $C/x \longrightarrow C'/x$ est une ∞-équivalence de $\mathcal{C}at$.

1.8. Lemme. *Le morphisme de foncteurs η est une ∞-équivalence naturelle.*

Démonstration. Il résulte de [Cis04, proposition 1.1.12] que le foncteur $1_\sharp$ respecte les ∞-équivalences. L'assertion résulte donc immédiatement du lemme 1.6. ■

1.9. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un foncteur entre petites catégories. On note $\mathcal{C}at/u \ : \mathcal{C}at/X \longrightarrow \mathcal{C}at/Y$ le foncteur d'oubli par u. On désigne alors par

$$u_\sharp \ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times Y, \mathcal{C}at)$$

le foncteur composé

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/X) \xrightarrow{\mathcal{C}at/u} \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/Y) \xrightarrow{1^Y_\sharp} \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Hom}}(Y, \mathcal{C}at)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times Y, \mathcal{C}at),$$

et par

$$u^\sharp \ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times Y, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/X)$$

le foncteur composé

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times Y, \mathcal{C}at) &\xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}\times u, \mathcal{C}at)} \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times X, \mathcal{C}at) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathcal{C}at)) \xrightarrow{1_X^{\sharp}} \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/X).\end{aligned}$$

On appelle encore ∞-équivalences les flèches de $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/X)$ qui sont des ∞-équivalences de $\mathcal{C}at/X$ argument par argument.

1.10. LEMME. *Le foncteur $u_\sharp$ est un adjoint à gauche de $u^\sharp$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer l'assertion dans le cas où A est la catégorie finale. Le foncteur $\mathcal{C}at/u$ admet un adjoint à droite défini par le changement de base le long de u. Par conséquent, il résulte du lemme 1.5 que $u_\sharp$ admet un adjoint à droite, et il suffit de montrer que $u^\sharp$ est isomorphe à ce dernier. Or cela résulte immédiatement du fait que pour tout foncteur F de Y vers $\mathcal{C}at$, le carré

$$\begin{tikzcd} \int u^*F \arrow[r] \arrow[d, "\theta(u^*F)"'] & \int F \arrow[d, "\theta(F)"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien [Cis04, 1.2.1]. ■

1.11. LEMME. *Les foncteurs $u_\sharp$ et $u^\sharp$ respectent les ∞-équivalences.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de nouveau de montrer l'assertion dans lorsque A est la catégorie finale. Le cas de $u^\sharp$ résulte immédiatement de [Cis04, proposition 1.2.4]. Pour ce qui est de $u_\sharp$, il suffit de vérifier que le foncteur $\mathcal{C}at/u$ respecte les ∞-équivalences. Soit $C \longrightarrow C'$ un foncteur au-dessus de X tel que pour tout objet x de X, $C/x \longrightarrow C'/x$ soit une ∞-équivalence. Alors pour tout objet y de Y, le foncteur $C/y \longrightarrow C'/y$ est encore une ∞-équivalence. En effet, vu que les ∞-équivalences forment un localisateur fondamental [Cis04, théorème 2.1.13], il suffit de vérifier que ce foncteur est asphérique au-dessus de X/y. Or pour tout objet $(x, v : u(x) \to y)$ de X/y, le foncteur

$$(C/y)/(x,v) \simeq C/x \longrightarrow C'/x \simeq (C'/y)/(x,v)$$

est une ∞-équivalence, ce qui prouve l'assertion. ■

1.12. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un foncteur entre petites catégories. En vertu du lemme 1.11 appliqué à 1_X et à u, le foncteur

$$1_X^\sharp u_\sharp \ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times X, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times Y, \mathcal{C}at)$$

respecte les ∞-équivalences, et donc en passant à la catégorie homotopique (*i.e.* en inversant les ∞-équivalences), on obtient de la sorte un foncteur noté

$$u_\flat \ : \mathbf{Hot}_A(X^{\mathrm{op}}) \longrightarrow \mathbf{Hot}_A(Y^{\mathrm{op}}) \ .$$

1.13. Théorème. [Grothendieck [Gro83]] *Le foncteur $u_\flat$ est un adjoint à gauche du foncteur image inverse associé à $u^{\mathrm{op}} : X^{\mathrm{op}} \longrightarrow Y^{\mathrm{op}}$*

$$(u^{\mathrm{op}})^* : \mathbf{Hot}_A(Y^{\mathrm{op}}) \longrightarrow \mathbf{Hot}_A(X^{\mathrm{op}}) \ .$$

De manière équivalente, le foncteur

$$(u_\flat)^{\mathrm{op}} : \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(X) \longrightarrow \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(Y)$$

est un adjoint à droite du foncteur image inverse associé à u

$$u^* : \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(Y) \longrightarrow \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(X) \ .$$

Démonstration. En vertu des lemmes 1.5, 1.6 et 1.8, les foncteurs $1_\sharp$ et $1^\sharp$ induisent au niveau des catégories homotopiques des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. D'autre part, il résulte des lemmes 1.10 et 1.11 que les foncteurs $u_\sharp$ et $u^\sharp$ induisent un couple de foncteurs adjoints en passant aux catégories homotopiques. L'assertion en résulte aussitôt. ∎

1.14. Remarque. Ce théorème implique en particulier que si X est une petite catégorie, et si F est un foncteur de X dans $\mathcal{C}at$, alors $\int F$ est la colimite homotopique de F, ce qui est l'un des résultats de Thomason [Tho79].

1.15. Proposition. *Pour toute petite catégorie X, et pour tout objet F de la catégorie $\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(X)$, il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$F \xrightarrow{\sim} \pi(F)_* \ \varpi(F)^*(h_A) \ .$$

Démonstration. Soit F un objet de $\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(X)$, *i.e.* un foncteur F de $A^{\mathrm{op}} \times X$ dans $\mathcal{C}at$. Explicitons le foncteur

$$\textstyle\int \varpi(F)^*(h_A) : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}at \ .$$

Si a est un objet de A, on vérifie que $(\int h_A)(a)$ s'identifie canoniquement à la catégorie $a\backslash A$. On en déduit le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd}
(\int \varpi(F)^*(h_A))(a) \arrow[r] \arrow[d] & a\backslash A \arrow[d] \\
\nabla \int F \arrow[r, "\varpi(F)"'] & A
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, on a les identifications canoniques suivantes:

$$\big(\textstyle\int \varpi(F)^*(h_A)\big)(a) = \int \big(\varpi(F)^*(h_A)\big)(a) \simeq a\backslash\big(\nabla \int F\big) \simeq \nabla \int F|_{(a\backslash A)^{\mathrm{op}} \times X} \ .$$

En vertu du lemme 1.6 et de [Cis04, proposition 1.2.6], on a donc une ∞-équivalence dans $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at/X)$:

$$\textstyle\int \varpi(F)^*(h_A) \simeq \big(1_\sharp^{A^{\mathrm{op}}} 1^\sharp_{A^{\mathrm{op}}}(\int F)^{\mathrm{op}}\big)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \int F \ .$$

Par conséquent, le lemme 1.11 appliqué à l'identité de X et une nouvelle application du lemme 1.6 nous donnent deux nouvelles ∞-équivalences naturelles

$$\textstyle 1_\sharp^X \int \varpi(F)^*(h_A) \longrightarrow 1_\sharp^X \int F = 1_\sharp^X 1^\sharp_X F \longrightarrow F \ .$$

Or $1_\sharp^X \int \varpi(F)^*(h_A)$ est la construction de $\pi(F)_*\, \varpi(F)^*(h_A)$ définie par le théorème 1.13. ■

2. Calcul local: isomorphismes de changement de base

2.1. On rappelle que si A est une petite catégorie, p_A désigne l'unique foncteur de A vers la catégorie finale e.

2.2. Lemme. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$. On considère un foncteur $p : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{D}ia$. Alors pour tout objet y de Y, le morphisme de changement de base $j^*p_* \longrightarrow p/y_* i^*$ associé au carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X/y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p/y"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y/y \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le morphisme $(y, 1_y)^* j^* p_* \longrightarrow (y, 1_y)^* p/y_* i^*$ est un isomorphisme. En effet, comme $(y, 1_y)$ est un objet final de Y/y, en vertu de [Cis03, lemme 1.17], le foncteur image inverse $(y, 1_y)^*$ s'identifie au foncteur image directe p_{Y/y_*}, et donc on obtient une flèche

$$(y, 1_y)^* j^* p_* = y^* p_* \longrightarrow p_{X/y_*} i^* \simeq (y, 1_y)^* p/y_* i^*$$

qui se révèle être un isomorphisme (c'est l'axiome Der 4g). Si $(y', u : y' \to y)$ est un objet de Y/y, en regard des isomorphismes $X/y' \simeq (X/y)/(y', u)$, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} (X/y)/(y',u) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(p/y)/(y',u)"'] & X/y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p/y'"'] & X/y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p/y"'] & X \arrow[d, "p"] \\ (Y/y)/(y',u) \arrow[r, "\sim"] & Y/y' \arrow[r, "j'"'] & Y/y \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui précède nous donne des isomorphismes canoniques

$$(y', u)^* j^* p_* \simeq (y', 1_{y'})^* j'^* j^* p_* \simeq (y', 1_{y'})^* p/y'_* i'^* i^* \simeq (y', u)^* p/y_* i^* \ .$$

L'axiome Der 2 permet ainsi de conclure. ■

2.3. Lemme. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$. On considère une cofibration $p\ : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{D}ia$, et après avoir choisi un objet y de Y, on forme le carré cartésien suivant.*

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ e \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Alors le morphisme de changement de base

$$y^*\ p_* \longrightarrow q_*\ k^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Si y est un objet final de Y, alors k est une inclusion pleine, et admet un adjoint à gauche h. On en déduit par 2-fonctorialité que h^* est un adjoint à gauche de k^* (voir [Cis03, lemme 1.17]) et donc que $k^* \simeq h_*$, d'où un isomorphisme $b^*\ p_* \simeq p_{X\,*}\ \simeq q_*\ k^*$. Dans le cas général, on forme les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] \arrow[rr, bend left, "k"] & X/y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p/y"'] & X \arrow[d, "p"] \\ e \arrow[r, "{(y,1_y)}"'] \arrow[rr, bend right, "y"'] & Y/y \arrow[r, "l"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Celui de gauche correspond à la situation que l'on vient d'examiner, et celui de droite induit un isomorphisme de changement de base (2.2). On en déduit les isomorphismes canoniques suivants

$$y^*p_* = (y, 1_y)^*l^*p_* \simeq (y, 1_y)^*p/y_*j^* \simeq q_*i^*j^* = q_*k^*\ ,$$

ce qui achève la démonstration. ■

2.4. Proposition. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$. On considère un carré cartésien dans $\mathcal{D}ia$*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

dans lequel p (et donc q) est une cofibration. Alors le morphisme de changement de base

$$v^*\ p_* \longrightarrow q_*\ u^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Cela résulte de l'axiome Der2 et du calcul des fibres dans ce cas (cf. le lemme ci-dessus). ■

2.5. REMARQUE. Le calcul ci-dessus s'inscrit dans le cadre plus général de la théorie des foncteurs propres. Il admet une version duale (ici en termes de fibrations), laquelle se généralise en une théorie des foncteurs lisses (voir [Gro83, §70], [Gro90] et [Mal05b]).

2.6. PROPOSITION. *Soit $\mathcal{D}ia$ une 2-catégorie de diagrammes, et $\mathcal{F}\ :\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}'$ un $\mathcal{D}ia$-morphisme entre dérivateurs faibles à gauche. Pour que $\mathcal{F}$ soit exact à gauche, il faut et il suffit que pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, la flèche canonique*

$$\mathcal{F}\ p_{A*}\longrightarrow p_{A*}\ \mathcal{F}$$

soit un isomorphisme dans $\mathbb{D}'(e)$.

DÉMONSTRATION. Il est évident que c'est une condition nécessaire. Supposons que la condition ci-dessus soit vérifiée, et considérons un foncteur $u\ :A\longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$. On veut montrer que la flèche canonique

$$\mathcal{F}\ u_*\longrightarrow u_*\ \mathcal{F}$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}'(B)$. En vertu de l'axiome Der 2, il suffit de vérifier que pour tout objet b de B, la flèche

$$b^*\ \mathcal{F}\ u_*\simeq\mathcal{F}\ b^*\ u_*\longrightarrow b^*\ u_*\ \mathcal{F}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{D}'(e)$. L'expression du foncteur $b^*\ u_*$ obtenue grâce au changement de base de l'axiome Der 4g nous ramène en fin de compte au cas où B est la catégorie ponctuelle, ce qui permet d'invoquer l'hypothèse. ∎

2.7. On rappelle que si $\mathbb{D}$ est un prédérivateur de domaine $\mathcal{D}ia$, pour tout foncteur $u:A\longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, on définit un $\mathcal{D}ia$-*morphisme image inverse* $u^*\ :\mathbb{D}_B\longrightarrow\mathbb{D}_A$ par les foncteurs

$$(u\times 1_C)^*\ :\mathbb{D}_B(C)=\mathbb{D}(B\times C)\longrightarrow\mathbb{D}(A\times C)=\mathbb{D}_A(C)\ .$$

2.8. PROPOSITION. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$. Pour tout foncteur $u:A\longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme image inverse $u^*:\mathbb{D}_B\longrightarrow\mathbb{D}_A$ est exact à gauche. En particulier, pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, les images directes cohomologiques se calculent argument par argument.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 2.6, il suffit de vérifier que pour tout objet C de $\mathcal{D}ia$, le morphisme de changement de base associé au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A\times C \arrow[r, "u\times 1_C"] \arrow[d, "pr_1"'] & B\times C \arrow[d, "pr_1"] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(A)$. Or cela résulte aussitôt de la proposition 2.4 puisque $B\times C$ est un catégorie cofibrée au-dessus de B. ∎

2.9. Proposition. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$. On considère un triangle commutatif dans $\mathcal{D}ia$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

dans lequel p et q sont des cofibrations. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout objet s de S, le foncteur $\phi_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.

(b) Pour tout objet s de S, le foncteur $\phi/s : X/s \longrightarrow Y/s$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.

(c) Le morphisme canonique $q_* \, q^* \longrightarrow p_* \, p^*$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(S)$.

(d) Le foncteur $\phi^* : \mathbb{D}(Y) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$ est pleinement fidèle sur la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}(Y)$ formée des objets isomorphes à un objet du type q^*F, $F \in \mathsf{Ob}\,\mathbb{D}(S)$.

Démonstration. L'équivalence de (a) et de (b) résulte de [Cis03, corollaire 1.20] appliqué à aux inclusion du type $X_s \longrightarrow X/s$, et l'équivalence entre (c) et (d) se vérifie immédiatement. Il suffit donc de montrer que les assertions (a) et (c) sont équivalentes. En vertu du lemme 2.3, pour chaque objet s de S, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d, "p_{X_s}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ e \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

qui induit un isomorphisme $s^* \, p_* \, p^* \simeq p_{X_s *} \, p_{X_s}^* \, s^*$. De même, on a un isomorphisme $s^* \, q_* \, q^* \simeq p_{Y_s *} \, p_{Y_s}^* \, s^*$. On en déduit (grâce à l'axiome Der 2) que l'assertion (c) est vérifiée si et seulement si pour tout $s \in \mathsf{Ob}\,S$, le morphisme

$$p_{Y_s *} \, p_{Y_s}^* \longrightarrow p_{X_s *} \, p_{X_s}^*$$

est un isomorphisme de $\mathbb{D}(e)$, ce qui achève la démonstration. ∎

2.10. Corollaire. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$. On considère une cofibration $p : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{D}ia$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) Le foncteur $p^* : \mathbb{D}(Y) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$ est pleinement fidèle.

(b) Toutes les fibres de p sont $\mathbb{D}$-asphériques. ∎

3. La propriété universelle de $\mathbf{Hot}_A$

3.1. On rappelle qu'un localisateur fondamental [Cis04] est une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}at$ vérifiant les axiomes suivants (on appelle $\mathcal{W}$-équivalences les éléments de $\mathcal{W}$).

LF1 La classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée.

LF2 Toute petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

LF3 Pour toute petite catégorie C, et tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd} ,$$

si u est asphérique au-dessus de C, alors u est une $\mathcal{W}$-équivalence.

L'axiome LF1 signifie que $\mathcal{W}$ contient les identités, que dans tout triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, si deux flèches sur les trois sont des équivalences faibles, alors il en est de même de la dernière, et que si i et r sont deux flèches composables telles que $ri = 1$ et $ir \in \mathcal{W}$, alors r est une $\mathcal{W}$-équivalence. Pour la compréhension des axiomes LF2 et LF3, on rappelle qu'une petite catégorie A est *asphérique* si l'unique foncteur de A vers la catégorie finale est une $\mathcal{W}$-équivalence. Enfin, en reprenant les notations ci-dessus, u est *asphérique au-dessus de* C (on dira encore C*-asphérique*) si c'est une $\mathcal{W}$-équivalence localement au-dessus de C, *i.e.* si pour tout objet c de C, le foncteur $A/c \longrightarrow B/c$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

3.2. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{C}at$. On rappelle qu'une flèche $A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est une $\mathbb{D}$*-équivalence* si elle induit un isomorphisme en cohomologie à coefficients constants dans $\mathbb{D}$, *i.e.* si le morphisme canonique

$$p_{B*}p_B^* \longrightarrow p_{A*}p_A^*$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$ (cf. [Cis03, définition 1.15]).

3.3. Proposition. *Pour toute petite catégorie A, le foncteur canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathbf{Hot}(A)$$

commute aux produits finis.

Démonstration. Cela résulte facilement du fait que les équivalences faibles commutent aux produits finis (voir par exemple [Cis04, 1.1.6]). ∎

3.4. Proposition. *Soient A et B deux petites catégories. On a des isomorphismes canoniques dans* Hot.

$$p_{A^{\mathrm{op}}!}p_{A^{\mathrm{op}}}^* B \simeq A \times B \simeq p_{A!}p_A^* B$$

Démonstration. En effet, si B désigne le foncteur constant de A vers $\mathcal{C}at$ de valeur B, $\int B = A \times B$. Cela donne le premier isomorphisme. Le second résulte de la proposition 3.3 et de la preuve de [Cis04, proposition 1.2.6]. ∎

3.5. Corollaire. *La classe des* **Hot**-*équivalences coïncide avec celle des* ∞-*équivalences.*

Démonstration. Il résulte trivialement des propositions 3.3 et 3.4 que la classe des $\mathbf{Hot}^{\mathrm{op}}$-équivalences coïncide avec celle des ∞-équivalences. Or pour tout dérivateur $\mathbb{D}$, les notions de $\mathbb{D}^{\mathrm{op}}$-équivalence et de $\mathbb{D}$-équivalence sont les mêmes (par un simple argument de transposition) ∎

Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{C}at$.

3.6. Lemme. *On considère le triangle commutatif de* $\mathcal{C}at$ *ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout objet c de C, le foncteur $A/c \longrightarrow B/c$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.

(ii) Le morphisme canonique $\beta_* p_B^* \longrightarrow \alpha_* p_A^*$ est un isomorphisme.

Démonstration. On procède comme pour la démonstration du cas particulier qu'est [Cis03, proposition 1.21]. Pour tout objet c de C, en vertu de l'axiome Der 4g, on a un carré commutatif canonique dont les flèches verticales sont des isomorphismes

$$\begin{tikzcd} c^*\beta_* p_B^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & c^*\alpha_* p_A^* \arrow[d, "\wr"] \\ p_{B/c_*} p_{B/c}^* \arrow[r] & p_{A/c_*} p_{A/c}^* \end{tikzcd} .$$

Le lemme résulte donc immédiatement de l'axiome Der 2. ∎

3.7. Proposition. *Les $\mathbb{D}$-équivalences forment un localisateur fondamental.*

Démonstration. La vérification de la faible saturation est immédiate. L'axiome LF2 résulte aussitôt de [Cis03, proposition 1.18]. Montrons, l'axiome LF3. Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$. Si u est $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$-asphérique au-dessus de C, le lemme ci-dessus nous donne un isomorphisme de foncteurs $\beta_* p_B^* \longrightarrow \alpha_* p_A^*$. On en déduit aussitôt un isomorphisme

$$p_{B*} p_B^* \simeq p_{C*}\beta_* p_B^* \simeq p_{C*}\alpha_* p_A^* \simeq p_{A*} p_A^* \ ,$$

ce qui achève la démonstration. ∎

3.8. REMARQUE. Le corollaire 3.5 et la proposition 3.7, redonnent une preuve plus conceptuelle de [Cis04, théorème 2.1.13], à savoir du fait que les ∞-équivalences forment un localisateur fondamental. Cela peut donc aussi être vu comme une nouvelle preuve du théorème A de Quillen: il suffit de considérer le lemme 3.6 dans le cas où $\mathbb{D} = \mathbf{Hot}$, $B = C$ et $\beta = 1_C$.

3.9. THÉORÈME. *Les ∞-équivalences forment le localisateur fondamental minimal. En particulier, tout localisateur fondamental contient $\mathcal{W}_\infty$.*

DÉMONSTRATION. Voir [Cis04, théorème 2.2.11] (ou bien encore [Cis06, théorème 4.2.15] pour un point de vue plus précis et général). ∎

3.10. COROLLAIRE. *Toute ∞-équivalence est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte aussitôt du théorème 3.9 et de la proposition 3.7. ∎

3.11. Un *dérivateur à gauche* est un dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{C}at$ tel que pour tout triangle commutatif de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd} ,$$

si le foncteur u est coasphérique au-dessus de C au sens de $\mathcal{W}_\infty$ (*i.e.* si pour tout objet c de C, le foncteur $c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$ est dans $\mathcal{W}_\infty$), alors le morphisme canonique

$$p_{B*}\, \beta^* \longrightarrow p_{A*}\, \alpha^*$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$[2].

3.12. PROPOSITION. *Tout dérivateur de domaine $\mathcal{C}at$ est un dérivateur à gauche.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur de domaine $\mathcal{C}at$. Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un C-morphisme coasphérique au-dessus de C au sens de $\mathcal{W}_\infty$, en vertu du corollaire 3.10 et de l'énoncé dual du lemme 3.6, on a un isomorphisme de foncteurs $\alpha_! p_A^* \simeq \beta_! p_B^*$. Par transposition, cela nous donne un isomorphisme de foncteurs $p_{B*}\beta^* \simeq p_{A*}\alpha^*$. ∎

[2]On peut en fait montrer que tout dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{C}at$ est un dérivateur à gauche. Cela résulte d'une généralisation adéquate du théorème 3.9 faisant intervenir la propriété de densité homotopique exprimée par la proposition 1.15. Cela demande cependant l'élaboration d'une machinerie plus lourde que celle développée dans [Cis04].

3.13. Corollaire. *Le dérivateur* **Hot** *est un dérivateur à gauche.*

3.14. On note $\pi_0 \ : \mathsf{Hot} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ le foncteur "composantes connexes". Un dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$ est *enrichi à gauche* si pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, il existe un $\mathcal{C}at$-morphisme exact à gauche $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{D}}(X, ?) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{Hot}$ et un isomorphisme naturel en $Y \in \mathsf{Ob}\,\mathbb{D}(e)$:

$$\pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{D}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, Y) \ .$$

Par exemple, si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles fermée admettant des petites limites projectives, le dérivateur faible à gauche associé $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$ [Cis03, théorème 6.11] est enrichi à gauche [Cis03, proposition 6.14].

3.15. Proposition. *Tout dérivateur faible à gauche enrichi à gauche est un dérivateur à gauche.*

Démonstration. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à gauche enrichi à gauche, et soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Si u est coasphérique au-dessus de C au sens de $\mathcal{W}_\infty$, alors il résulte du corollaire 3.13 que pour tout objet X de $\mathbb{D}$ et tout objet F de $\mathbb{D}(C)$, on a des isomorphismes canoniques:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, p_{B*}\beta^* F) &\simeq \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{D}}(X, p_{B*}\beta^* F) \\ &\simeq \pi_0 p_{B*}\beta^* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{D}}(X, F) \\ &\simeq \pi_0 p_{A*}\ \alpha^* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{D}}(X, F) \\ &\simeq \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{D}}(X, p_{A*}\ \alpha^* F) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, p_{A*}\ \alpha^* F) \ . \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda implique donc aussitôt que $p_{B*}\beta^* F \longrightarrow p_{A*}\alpha^* F$ est un isomorphisme.

■

3.16. Corollaire. *Tout prédérivateur associé à une catégorie de modèles fermée admettant des petites limites projectives est un dérivateur à gauche.*

3.17. On fixe à présent un dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{C}at$, ainsi qu'une petite catégorie A. On suppose en outre que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée.

H1 $\mathbb{D}$ est un dérivateur à gauche.

H2 La catégorie A est la catégorie ponctuelle.

3.18. Soit Φ un objet de $\mathbb{D}(A)$. Pour chaque petite catégorie X, on définit un foncteur

$$\Phi^! \ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times X, \mathcal{C}at)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

par la formule $\Phi^!(F) = \pi(F)_* \ \varpi(F)^*(\Phi)$ sur les objets. Si $p : F \longrightarrow G$ est un morphisme de $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}} \times X, \mathcal{C}at)$, on a le diagramme commutatif ci-dessous (où $q = \nabla \int p$).

$$\begin{tikzcd} & \nabla \int F \arrow[dl, "\varpi(F)"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "\pi(F)"] & \\ A & \nabla \int G \arrow[l, "\varpi(G)"] \arrow[r, "\pi(G)"'] & X \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un morphisme $\Phi^!(p) : \Phi^!(G) \longrightarrow \Phi^!(F)$ comme le composé

$$\pi(G)_*\varpi(G)^*(\Phi) \longrightarrow \pi(G)_*q_*q^*\varpi(G)^*(\Phi) \simeq \pi(F)_*\varpi(F)^*(\Phi) \ .$$

3.19. Lemme. *La construction ci-dessus définit un morphisme de prédérivateurs*

$$\Phi^! \ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D} \ .$$

Démonstration. Soient $\xi \ : X' \longrightarrow X$ un foncteur entre petites catégories, et F un objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(X \times A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)^{\mathrm{op}}$. On obtient les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} \nabla \int \xi^* F \arrow[r, "u_\xi"] \arrow[d, "\nabla\theta(\xi^* F)"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi(\xi^* F)"'] & \nabla \int F \arrow[d, "\nabla\theta(F)"] \arrow[dd, bend left=60, "\pi(F)"] \\ A \times X' \arrow[r, "1_A \times \xi"'] \arrow[d, "pr_2"] & A \times X \arrow[d, "pr_2"] \\ X' \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd} \ .$$

Comme $\pi(F)$ est une cofibration, en vertu de la proposition 2.4, on a un isomorphisme canonique dans $\mathbb{D}(X')$

$$\xi^* \ \pi(F)_* \simeq \pi(\xi^* F)_* \ u_\xi^* \ ,$$

ce qui induit, avec l'égalité $\varpi(F) \ u_\xi = \varpi(\xi^* F)$, les identifications suivantes

$$\begin{aligned} \xi^* \ \Phi^!(F) &= \xi^* \ \pi(F)_* \ \varpi(F)^*(\Phi) \\ &\simeq \pi(\xi^* F)_* \ u_\xi^* \ \varpi(F)^*(\Phi) \\ &= \pi(\xi^* F)_* \ \varpi(\xi^* F)^*(\Phi) \\ &= \Phi^!(\xi^* F) \end{aligned} \ .$$

Si ξ est une identité, alors il en est de même de u_ξ, et $\pi(\xi^* F) = \pi(F)$. On en déduit aussitôt que dans ce cas l'isomorphisme ci-dessus est l'identité de $\Phi^!(F)$. On vérifie par ailleurs en explicitant la construction des morphismes de changement de base que si $\xi' : X'' \longrightarrow X'$ est un second morphisme de $\mathcal{C}at$, le triangle évident suivant commute

$$\begin{tikzcd} \xi^*\xi'^*\Phi^!(F) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Phi^!\xi^*\xi'^*(F) \\ & \xi^*\Phi^!\xi'^*(F) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(cela résulte du fait que les morphismes de changement de base se “composent” en un sens adéquat [Mal01]). Pour achever la démonstration, il reste à vérifier la compatibilité des isomorphismes $\xi^*\Phi^! \simeq \Phi^!\xi^*$ aux 2-morphismes. Considérons à présent une 2-flèche de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, bend left, "\chi"] \arrow[r, bend right, "\xi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & X \end{tikzcd} \quad .$$

On peut la voir comme une flèche $\eta : X'' = X' \times \Delta_1 \longrightarrow X$ telle que $\eta\delta_0 = \chi$ et $\eta\delta_1 = \xi$, $\delta_e : X' \longrightarrow X' \times \Delta_1$ désignant le foncteur $x \longmapsto (x, e)$. Si F est un foncteur de X à valeurs dans $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)$, on obtient d'après ce qui précède un isomorphisme canonique

$$\eta^*\Phi^!(F) \simeq \Phi^!(\eta^*F) \ .$$

L'image de ce dernier par le foncteur canonique

$$\mathbb{D}(X' \times \Delta_1) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}({\Delta_1}^{\mathrm{op}}, \mathbb{D}(X'))$$

est un diagramme commutatif de la forme ci-dessous dans $\mathbb{D}(X')$.

$$\begin{tikzcd} \xi^*\Phi^!(F) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \delta_1^*\eta^*\Phi^!(F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \delta_1^*\Phi^!(\eta^*F) \arrow[d] \\ \chi^*\Phi^!(F) \arrow[r, equal] & \delta_0^*\eta^*\Phi^!(F) \arrow[r, "\sim"] & \delta_0^*\Phi^!(\eta^*F) \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que le carré suivant commute dans $\mathbb{D}(X')$.

$$\begin{tikzcd} \delta_1^*\Phi^!(\eta^*F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \Phi^!(\delta_1^*\eta^*F) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Phi^!(\xi^*F) \arrow[d] \\ \delta_0^*\Phi^!(\eta^*F) \arrow[r, "\sim"] & \Phi^!(\delta_0^*\eta^*F) \arrow[r, equal] & \Phi^!(\chi^*F) \end{tikzcd}$$

Or si G est un foncteur de $X' \times \Delta_1$ vers $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)$, le morphisme

$$\pi(\delta_1^*G)_*u_{\delta_1}^* \longrightarrow \pi(\delta_0^*G)_*u_{\delta_0}^*$$

s'explicite comme suit. Il existe un foncteur $\psi : \nabla\int\delta_0^*G \longrightarrow \nabla\int\delta_1^*G$, induit par les foncteurs $G_{(a,x,0)} \longrightarrow G_{(a,x,1)}$, $a \in \mathsf{Ob}\,A$, $x \in \mathsf{Ob}\,X'$, tel que $\pi(\delta_0^*G) = \pi(\delta_1^*G)\psi$ (ψ est cartésien au-dessus de A, et cocartésien au-dessus de X'). On a en outre un 2-morphisme structural $u_{\delta_0} \longrightarrow u_{\delta_1}\psi$, ce qui induit un morphisme

$$\pi(\delta_0^* G)^*\pi(\delta_1^* G)_* u_{\delta_1}^* = \psi^*\pi(\delta_1^* G)^*\pi(\delta_1^* G)_* u_{\delta_1}^* \longrightarrow \psi^* u_{\delta_1}^* \longrightarrow u_{\delta_0}^* \ .$$

Par adjonction on obtient bien une flèche $\pi(\delta_1^* G)_* u_{\delta_1}^* \longrightarrow \pi(\delta_0^* G)_* u_{\delta_0}^*$. Une vérification explicite montre que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\delta_1^*\pi(G)_* \arrow[r] \arrow[d] & \pi(\delta_1^* G)_* u_{\delta_1}^* \arrow[d] \\
\delta_0^*\pi(G)_* \arrow[r] & \pi(\delta_0^* G)_* u_{\delta_0}^*
\end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui achève la démonstration. ∎

3.20. Lemme. *Pour toute petite catégorie X, le foncteur*

$$\Phi^! \ : \underline{\mathrm{Hom}}(X \times A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

envoie les ∞-équivalences sur des isomorphismes.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que X soit la catégorie ponctuelle. Sous l'hypothèse H1, cela résulte de l'énoncé dual de [Cis04, propositions 1.2.6 et 1.1.12] et de la définition même de dérivateur à gauche donnée ici, et sous l'hypothèse H2, c'est une conséquence du corollaire 3.10. Le cas général en résulte grâce à l'axiome Der 2 et au lemme 3.19. ∎

3.21. Proposition. *Le morphisme de prédérivateurs*

$$\Phi^! \ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}at)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D}$$

induit un $\mathcal{C}at$-morphisme exact à gauche

$$\Phi^! \ : \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D} \ .$$

Démonstration. Les lemmes 3.19 et 3.20 montrent qu'on obtient bien ainsi un morphisme de prédérivateurs. Soient X une petite catégorie, et F un objet de $\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(X)$, *i.e.* un foncteur de $X \times A^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{C}at$. On va montrer que le morphisme canonique

$$\Phi^!(p_{X*}F) \longrightarrow p_{X*}\Phi^!(F)$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$, ce qui est suffisant pour conclure en vertu de la proposition 2.6. Or dans $\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}$, $p_{X*}F$ est représenté par le foncteur

$$\textstyle\int F \ : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}at \ , \qquad a \longmapsto \int F_a \ ,$$

ce qui donne l'identification $\Phi^!(p_{X*}F) = \pi(\int F)_*\, \varpi(\int F)^*(\Phi)$. La démonstration s'achève ainsi par une tautologie : le foncteur $\pi(\int F)$ est le foncteur canonique $\nabla \int F \longrightarrow e$, ce qui donne l'égalité $\pi(\int F) = p_X\, \pi(F)$, d'où un isomorphisme canonique $\pi(\int F)_* \simeq p_{X*}\, \pi(F)_*$, et l'égalité $\varpi(\int F) = \varpi(F)$ amène à l'isomorphisme attendu. ∎

3.22. LEMME. *Les objets Φ et $\Phi^!(h_A)$ sont canoniquement isomorphes.*

DÉMONSTRATION. On a déjà remarqué que $\nabla \int h_A = \mathsf{Fl}\, A$, $\pi(h_A)$ correspondant au foncteur “but" $t\ : \mathsf{Fl}\, A \longrightarrow A$, et $\varpi(h_A)$ au foncteur “source" $s\ : \mathsf{Fl}\, A \longrightarrow A$. On veut donc montrer que $\Phi \simeq s_*\ t^*\Phi$. On a un morphisme de foncteurs $s \longrightarrow t$, d'où un morphisme de foncteurs $t^* \longrightarrow s^*$. Comme t est une cofibration à fibres asphériques (lemme 1.3), le foncteur $t^*\ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathsf{Fl}\, A)$ est pleinement fidèle (corollaire 2.10). On obtient ainsi un morphisme

$$\Phi \simeq t_*\ t^*\Phi \longrightarrow t_*\ s^*\Phi\ .$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de le tester sur les fibres (axiome Der 2). Soit a un objet de A. Alors la fibre de a au-dessus de t est la catégorie A/a, et en vertu du lemme 2.3, on a un isomorphisme $(t_*\ s^*\Phi)_a \simeq {p_{A/a}}_* \Phi|_{A/a}$. Comme A/a admet $(a, 1_a)$ comme objet final, on a aussi par 2-fonctorialité ${p_{A/a}}_* \Phi|_{A/a} \simeq \Phi_a$, d'où $\Phi_a \simeq (t_*\ s^*\Phi)_a$. ■

3.23. On note $\mathcal{D}er^!_f$ la 2-sous-catégorie de la 2-catégorie $\mathcal{P}reder$ des prédérivateurs de domaine $\mathcal{C}at$ Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux dérivateurs faibles à gauche, on note $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ la catégorie des 1-morphismes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$ dans $\mathcal{D}er^!_f$. On note enfin $\mathcal{D}er^!$ la 2-sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}er^!_f$ formée des dérivateurs à gauche.

3.24. THÉORÈME. *Soit A une petite catégorie. Le 2-foncteur*

$$\mathcal{D}er^! \longrightarrow \mathcal{CAT}\ , \qquad \mathbb{D} \longmapsto \mathbb{D}(A)$$

est représenté par $\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}$. Autrement-dit, pour tout dérivateur à gauche $\mathbb{D}$, il existe une équivalence de catégories naturelle

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(A)\ .$$

Dans le cas où A est la catégorie ponctuelle cette représentabilité s'étend à $\mathcal{D}er^!_f$, i.e. *pour tout dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$, on a une équivalence de catégories naturelle*

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}^{\mathrm{op}}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(e)\ .$$

DÉMONSTRATION. On fixe un dérivateur faible à gauche $\mathbb{D}$, et une petite catégorie A satisfaisant l'une des hypothèses H1 ou H2 (3.17).

On définit un foncteur

$$\varepsilon\ : \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}, \mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$$

de la manière suivante. Si $\mathcal{F}\ : \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un morphisme de $\mathcal{D}er^!_f$, il se spécialise en un foncteur

$$\mathcal{F}\ : \mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}(A) = \mathbf{Hot}(A^{\mathrm{op}} \times A)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D}(A)\ ,$$

et on pose $\varepsilon(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(h_A)$.

D'autre part, en vertu de la proposition 3.21 on a un foncteur

$$\vartheta\ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}}, \mathbb{D})\ , \qquad \Phi \longmapsto \Phi^!\ .$$

Il résulte de la proposition 1.15, du lemme 3.22, et de la construction même de ϑ (3.18) que ces deux foncteurs sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. ■

3.25. L'énoncé précédent admet bien entendu une version duale en termes de dérivateurs à droite. On note $\mathcal{Der}_!^f$ la 2-sous-catégorie de $\mathcal{Preder}$ dont les objets sont les dérivateurs faibles à droite de domaine $\mathcal{Cat}$, les 1-flèches, les $\mathcal{Cat}$-morphismes exacts à droite, et les 2-flèches, les 2-$\mathcal{Cat}$-morphismes. Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux dérivateurs faibles à droite, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D},\mathbb{D}')$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D},\mathbb{D}')$ dont les objets sont les $\mathcal{Cat}$-morphismes exacts à droite. On désigne enfin par $\mathcal{Der}_!$ la 2-sous-catégorie pleine de $\mathcal{Der}_!^f$ dont les objets sont les *dérivateurs à droite*, *i.e.* les prédérivateurs $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{Cat}$ tels que $\mathbb{D}^{\mathrm{op}}$ soit un dérivateur à gauche.

3.26. COROLLAIRE. *Soit A une petite catégorie. Pour tout dérivateur à droite $\mathbb{D}$, il existe une équivalence de catégories canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot}_A,\mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(A^{\mathrm{op}}) \ .$$

Si $A = e$ est la catégorie ponctuelle, cette équivalence s'étend aux dérivateurs faibles à droites. Autrement dit, pour tout dérivateur faible à droite $\mathbb{D}$, on a une équivalence de catégories canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot},\mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(e) \ .$$

DÉMONSTRATION. On a des équivalences de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot}_A,\mathbb{D}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}_A^{\mathrm{op}},\mathbb{D}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbb{D}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}) \simeq \mathbb{D}(A^{\mathrm{op}}) \ ,$$

ce qui prouve le corollaire. ∎

3.27. COROLLAIRE. [l'hypothèse inspiratrice de Grothendieck [Gro83]] *Toute auto-équivalence de* $\mathbf{Hot}$ *est un objet final de* $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot},\mathbf{Hot})$. *En particulier, toute auto-équivalence de* $\mathbf{Hot}$ *est isomorphe à l'identité, et le seul endomorphisme de l'identité est l'identité.*

DÉMONSTRATION. Les équivalences $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot},\mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(e)$ sont définies par le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(e)$, où e est l'objet final de $\mathcal{Cat}$ (et donc de Hot en vertu de la proposition 3.3). Dans le cas où $\mathbb{D} = \mathbf{Hot}$, on en déduit aussitôt l'assertion. ∎

4. La propriété universelle de $\mathbf{Hot}_{\bullet,A}$

4.1. On fixe pour le moment une catégorie de diagrammes $\mathcal{Dia}$. Sauf mention explicite du contraire, tous les (pré-)dérivateurs considérés seront de domaine $\mathcal{Dia}$.

Un $\mathcal{Dia}$-morphisme $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ est un *adjoint à gauche* d'un $\mathcal{Dia}$-morphisme $D : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}$ s'il existe des 2-$\mathcal{Dia}$-morphismes $\varepsilon : GD \longrightarrow 1_{\mathbb{D}'}$ et $\eta \ : 1_{\mathbb{D}} \longrightarrow DG$ tels que $D\varepsilon\eta_D = 1_D$ et $\varepsilon_G G\eta = 1_G$.

4.2. LEMME. *Soient $i : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}$ une inclusion pleine de prédérivateurs (*i.e.* un $\mathcal{Dia}$-morphisme tel que pour tout objet A dans $\mathcal{Dia}$, le foncteur $\mathbb{D}'(A) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$ soit une inclusion pleine). On suppose que i admet un adjoint à gauche $a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$. Tout foncteur dans $\mathcal{Dia}$ admettant une image directe homologique (resp. cohomologique) dans $\mathbb{D}$ en admet une dans $\mathbb{D}'$. Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite (resp. faible à gauche), il en est de même de $\mathbb{D}'$.*

Démonstration. Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur dans $\mathcal{Dia}$. Supposons que u admette une image directe homologique dans $\mathbb{D}$. Pour F dans $\mathbb{D}'(A)$ et G dans $\mathbb{D}'(B)$, on a les bijections canoniques suivantes, lesquelles montrent que u admet aussi une image directe homologique dans $\mathbb{D}'$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(A)}(F, u^*G) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(iF, iu^*G) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(iF, u^*iG) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(u_!iF, iG) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(B)}(au_!iF, G)\ . \end{aligned}$$

Supposons cette fois que u admette une image directe cohomologique dans $\mathbb{D}$, et fixons un objet G de $\mathbb{D}'(A)$. Si $F \longrightarrow F'$ est une flèche de $\mathbb{D}(B)$ dont l'image par a est un isomorphisme, on obtient le diagramme commutatif suivant (dont toutes les flèches se révèlent être des bijections).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(F', u_*iG) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(F, u_*iG) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(u^*F', iG) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(u^*F, iG) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(A)}(au^*F', G) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(B)}(au^*F, G) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(A)}(u^*aF', G) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(B)}(u^*aF, G) \end{tikzcd}$$

Comme l'image de la flèche canonique $u_*iG \longrightarrow iau_*G$ par a est un isomorphisme, ce qui précède implique que cette dernière est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(B)$. Mais alors pour tout objet F de $\mathbb{D}'(B)$, on obtient les bijections canoniques suivantes.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(A)}(u^*F, G) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(iu^*F, iG) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(A)}(u^*iF, iG) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(iF, u_*iG) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(B)}(iF, iau_*iG) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}'(B)}(F, au_*iG) \end{aligned}$$

Il est à présent clair que si $\mathbb{D}$ vérifie l'axiome Der 3d (resp. Der 3g), alors il en est de même de $\mathbb{D}'$. L'explicitation des images directes homologiques (resp. cohomologiques) dans $\mathbb{D}'$ en fonction de leurs analogues dans $\mathbb{D}$ donnée ci-dessus permet de vérifier facilement l'axiome Der 4d (resp. Der 4g) dans $\mathbb{D}'$ dès qu'ils sont vérifiés dans $\mathbb{D}$. C'est enfin un exercice facile de vérifier que si $\mathbb{D}$ vérifie les axiomes Der 1 et Der 2, alors il en est de même de $\mathbb{D}'$. ∎

4.3. On rappelle qu'un foncteur $j : U \longrightarrow A$ est une *immersion ouverte* si c'est une inclusion pleine faisant de U un crible de A (*i.e.* pour tout objet a de A, s'il existe une flèche de source a et de but un objet de U, alors a est dans U). Un foncteur $i : Z \longrightarrow A$ est une *immersion fermée* si c'est un inclusion pleine de faisant de Z un cocrible de A

(ou de manière équivalente, si $i^{\mathrm{op}} : Z^{\mathrm{op}} \longrightarrow A^{\mathrm{op}}$ est une immersion ouverte). Par exemple le foncteur $t : e \longrightarrow \Delta_1$ qui pointe l'élément 0 (resp. $s : e \longrightarrow \Delta_1$ qui pointe l'élément 1) est une immersion ouverte (resp. fermée). Les immersions ouvertes sont stables par composition et par changement de base.

4.4. Proposition. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite. Pour tout foncteur pleinement fidèle $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur image directe $u_!\ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)$ est pleinement fidèle. Si en outre u est une immersion ouverte, alors l'image essentielle du foncteur $u_!$ est formée des objets F de $\mathbb{D}(B)$ tels que pour tout objet b de B qui n'est pas dans A, b^*F est un objet initial de $\mathbb{D}(e)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout objet F de $\mathbb{D}(A)$, le morphisme $F \longrightarrow u^*u_!F$ est un isomorphisme. En vertu de l'axiome Der 2, il suffit de vérifier que pour tout objet a de A, $a^*F \longrightarrow a^*u^*u_!F$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$. Or la pleine fidélité de u implique le foncteur canonique $a\backslash A \longrightarrow a\backslash B$ est un isomorphisme, et donc l'axiome Der 3d implique qu'on a un isomorphisme canonique

$$a^*F = F_a = p_{a\backslash A\,!}F|_{a\backslash A} \simeq p_{a\backslash B\,!}(u^*F)|_{a\backslash B} \simeq (u_!F)_{u(a)} = a^*u^*u_!F\ .$$

Si u est une immersion ouverte, et si $b : e \longrightarrow B$ est un objet de B qui n'est pas dans A, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

et comme u est en particulier une fibration, l'énoncé dual de la proposition 2.4, donne un isomorphisme canonique pour tout objet F de $\mathbb{D}(A)$: $\varnothing = p_{\varnothing !}F|_{\varnothing} \simeq b^*u_!F$. On en déduit aussitôt la seconde assertion. ∎

4.5. Un dérivateur faible à droite $\mathbb{D}$ est *préponctué* si la catégorie $\mathbb{D}$ admet un objet final $\star$ et si pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, le foncteur $1_A \times s\ : A \simeq A \times e \longrightarrow A \times \Delta_1$ admet une image directe cohomologique pleinement fidèle dans $\mathbb{D}$ dont l'image essentielle est formée des objets F tels que $(1_A \times t)^*F$ soit un objet final de $\mathbb{D}(A)$ (on vérifie en effet dans ce cas que pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(A)$ admet un objet final, à savoir $p_A^*\star$, car le foncteur p_A^* admet un adjoint à gauche). Il est remarquable que tout dérivateur est un dérivateur faible à droite préponctué (4.4). Un dérivateur faible à droite est *ponctué* s'il est préponctué et si la catégorie $\mathbb{D}(e)$ admet un objet nul (*i.e.* à la fois initial et final), alors noté 0. Dans ce cas, pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, p_A^*0 est un objet nul de $\mathbb{D}(A)$. En effet, le $\mathcal{D}ia$-morphisme $p_A^*\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_A$ est exact à droite (par l'énoncé dual de 2.8), ce qui implique en particulier que p_A^*0 est aussi un objet initial. On peut définir dualement les notions de dérivateur faible à gauche préponctué et ponctué.

Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite préponctué. Pour chaque objet A de $\mathcal{D}ia$, on note $\mathbb{D}_\bullet(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}(A \times \Delta_1)$ formée des objets F tels que $(1_A \times s)^*F$ soit isomorphe à 0. On vérifie aussitôt que cela définit un sous-prédérivateur $\mathbb{D}_\bullet$ de $\mathbb{D}_{\Delta_1}$.

4.6. On note $\square = \Delta_1 \times \Delta_1$, $\ulcorner$ le sous-ensemble ordonné de $\square$ formé des couples $(i,j) \neq (0,0)$, et $i_\ulcorner \ : \ulcorner \longrightarrow \square$ l'inclusion. Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite et A un objet de $\mathcal{D}ia$, un objet F de $\mathbb{D}(A \times \square)$ est *(homotopiquement) cocartésien* s'il est dans l'image essentielle du foncteur $(1_A \times i_\ulcorner)_!$ (lequel est pleinement fidèle en vertu de 4.4). Comme les images directes homologiques se calculent argument par argument dans $\mathbb{D}_A$ (2.8), on remarque grâce à l'axiome Der 2 qu'un objet F de $\mathbb{D}_A(\square)$ est cocartésien si et seulement si pour tout objet a de A, a^*F est un objet cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$. En utilisant les axiomes Der 2 et Der 3d, on vérifie facilement qu'un objet F de $\mathbb{D}(\square)$ est cocartésien si et seulement si le morphisme canonique $p_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* F \longrightarrow F_{0,0}$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$.

4.7. Lemme. *Soient $u : A \longrightarrow B$ et $v : \square \longrightarrow B$ deux foncteurs dans $\mathcal{D}ia$. On suppose que $x = v(0,0)$ n'est pas dans l'image de u ni dans celle de $vi_\ulcorner$, et qu'il existe une sous-catégorie pleine C de E satisfaisant les conditions suivantes:*

(a) u et v se factorisent par C;

(b) le foncteur $\tilde{v} : \ulcorner \longrightarrow x\backslash(C \smallsetminus \{x\})$ induit par v admet un adjoint à droite.

Alors pour tout objet F de $\mathbb{D}(A)$, $v^*u_!F$ est un objet cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$.

Démonstration. La proposition 4.4 appliquée à l'inclusion de C dans B montre qu'on peut supposer que $B = C$, ce qui sera le cas dans la suite de cette preuve. Notons $D = x\backslash(B \smallsetminus \{x\})$ et $w : D \longrightarrow \ulcorner$ l'adjoint à droite de $\tilde{v}$. Alors par 2-fonctorialité, w^* est un adjoint à droite de $\tilde{v}^*$. Autrement dit, on a une identification canonique $\tilde{v}^* = w_!$. En conséquence, on a des identifications canoniques $p_{\ulcorner !}\tilde{v}^* = p_{\ulcorner !} w_! \simeq p_{D!}$. Soit $u' : A \longrightarrow B \smallsetminus \{x\}$ la factorisation de u par l'inclusion $k : B \smallsetminus \{x\} \longrightarrow B$. Le morphisme canonique $u'_! \longrightarrow k^*k_!u'_!$ est un isomorphisme (grâce à la proposition 4.4 appliquée à k). On en déduit des identifications: $u_! = (ku')_! \simeq k_!u'_! \simeq k_!k^*k_!u'_! \simeq k_!k^*u_!$. Notons $j : D \longrightarrow B \smallsetminus \{x\}$ le foncteur d'oubli. On a les égalités $kj\tilde{v} = vi$ (où i est l'inclusion de $\ulcorner$ dans $\square$). On en déduit les relations $i^*v^* = \tilde{v}^*j^*k^*$. On obtient donc des isomorphismes canoniques

$$p_{\ulcorner !} i^*v^*u_! \simeq p_{\ulcorner !}\tilde{v}^*j^*k^*k_!u'_! \simeq p_{D!}j^*k^*k_!u'_! \simeq p_{D!}j^*k^*u_! \ .$$

Or il résulte de l'axiome Der 3d que le foncteur $p_{D!}j^*k^*u_!$ s'identifie canoniquement à $x^*k_!k^*u_! \simeq x^*u_! = (0,0)^*v^*u_!$, ce qui achève la démonstration. ∎

4.8. Proposition. *Soit $\square_2 = \Delta_1 \times \Delta_2$. On note $u_i \ : \square \longrightarrow \square_2$ $(0 \leq i \leq 2)$ le foncteur correspondant à $1_{\Delta_1 \times \delta_2^i}$ (δ_2^i étant l'unique application strictement croissante de Δ_1 vers Δ_2 qui ne prend pas la valeur i). On considère enfin un objet F de $\mathbb{D}(\square_2)$, tel que u_0^*F soit un objet cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$. Alors u_2^*F est un objet cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$ si et seulement si u_1^*F en est un.*

Démonstration. Soit Z le sous-ensemble ordonné de $\square_2$ formé des couples (i,j) tels que $(i,j) \neq (0,0), (0,1)$, et soit $j : Z \longrightarrow \square_2$ l'inclusion. En vertu de la proposition 4.4, le foncteur $j_! : \mathbb{D}(Z) \longrightarrow \mathbb{D}(\square_2)$ est pleinement fidèle, et on vérifie facilement grâce au lemme ci-dessus que l'image essentielle de $j_!$ est formée des objets F de $\mathbb{D}(\square_2)$ tels que u_0^*F et u_i^*F soient cocartésiens pour $i = 1$ ou $i = 2$. ∎

4.9. Lemme. *Soit F un objet de $\mathbb{D}(\ulcorner)$ tel que le morphisme induit $F_{1,1} \longrightarrow F_{0,1}$, soit un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$. Si i désigne l'inclusion de $\ulcorner$ dans $\square$, le morphisme canonique $F_{1,0} \simeq (i_!F)_{1,0} \longrightarrow (i_!F)_{0,0}$ est un isomorphisme. Réciproquement, si F est un objet de $\mathbb{D}(\square)$ tel que les morphismes $F_{1,\eta} \longrightarrow F_{0,\eta}$, $\eta = 0, 1$, soient des isomorphismes, alors F est cocartésien.*

Démonstration. Soit $p : \square \longrightarrow \Delta_1$ le morphisme défini par $p(\varepsilon, \eta) = \eta$. Ce dernier admet un adjoint à droite j défini par $j(\eta) = (1, \eta)$. En particulier, le morphisme de foncteurs de l'identité de $\square$ vers jp induit en posant $G = j^*F$, une flèche de F vers p^*G, laquelle se révèle être un isomorphisme (grâce à l'hypothèse faite sur F et à l'axiome Der 2). On peut donc supposer que $F = p^*G$ pour un objet G de $\mathbb{D}(\Delta_1)$. Par 2-fonctorialité, p^* est un adjoint à gauche de j^*, ce qui signifie encore que $p^* = j_!$. Comme $p_{\Delta_1 !}$ est l'évaluation en 0, on en déduit que

$$p_{\ulcorner !}F = p_{\ulcorner !}p^*G \simeq p_{\ulcorner !}j_!G \simeq p_{\Delta_1 !}G \simeq G_0 = F_{1,0}\ .$$

La réciproque résulte de la pleine fidélité de $i_!$ et d'une nouvelle utilisation de l'axiome Der 2. ∎

4.10. Lemme. *L'inclusion $i : \mathbb{D}_\bullet \longrightarrow \mathbb{D}_{\Delta_1}$ admet un adjoint à gauche a.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les inclusions

$$\mathbb{D}_\bullet(A) \longrightarrow \mathbb{D}_{\Delta_1}(A) = \mathbb{D}(A \times \Delta_1)$$

admettent un adjoint à gauche. Quitte à remplacer $\mathbb{D}$ par $\mathbb{D}_A$, on voit qu'on peut se contenter du cas où $A = e$ est la catégorie finale (cela ne sert qu'à alléger les notations). On a un foncteur image directe cohomologique

$$(1_{\Delta_1} \times s)_* \ : \mathbb{D}(\Delta_1) \longrightarrow \mathbb{D}(\square)\ .$$

Si $j : \ulcorner \longrightarrow \square$ désigne l'inclusion, on a deux foncteurs adjoints

$$j_! \ : \mathbb{D}(\ulcorner) \longrightarrow \mathbb{D}(\square) \quad \text{et} \quad j^* \ : \mathbb{D}(\square) \longrightarrow \mathbb{D}(\ulcorner)\ .$$

On définit un foncteur $a : \mathbb{D}(\Delta_1) \longrightarrow \mathbb{D}_\bullet(e)$ par $a = (1_{\Delta_1} \times t)^* j_! j^* (1_{\Delta_1} \times s)_*$: le foncteur $j_!$ est pleinement fidèle (4.4) et la description de l'image essentielle de $(1_{\Delta_1} \times s)_*$ montre que pour tout objet F de $\mathbb{D}(\Delta_1)$, on a un objet cocartésien aF de $\mathbb{D}(\square)$ dont l'image dans $\mathbb{D}(e)$ est de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} s^*F \arrow[r] \arrow[d] & \star \arrow[d] \\ t^*F \arrow[r] & t^*iaF \end{tikzcd}$$

Autrement dit, t^*iaF est le quotient homotopique de $s^*F \longrightarrow t^*F$. En particulier, a est un foncteur de $\mathbb{D}(\Delta_1)$ vers $\mathbb{D}_\bullet(e)$. Si F est un objet de $\mathbb{D}(\Delta_1)$, on a des isomorphismes canoniques

$$(1_{\Delta_1} \times s)^* j_! j^* (1_{\Delta_1} \times s)_* F \simeq (1_{\Delta_1} \times s)^* (1_{\Delta_1} \times s)_* F \simeq F\ ,$$

et un morphisme $(1_{\Delta_1} \times s)^* \longrightarrow (1_{\Delta_1} \times t)^*$ induit par la 2-flèche $t \longrightarrow s$, ce qui définit un morphisme naturel $\eta_F : F \longrightarrow iaF$. Si F est un objet de $\mathbb{D}_\bullet(e)$, $j^*(1_{\Delta_1} \times s)_* iF$ est un diagramme dont l'image dans $\mathbb{D}(e)$ est de la forme

$$F_0 \longleftarrow F_1 \xrightarrow{\sim} \star \ ,$$

d'où on déduit grâce à 4.9 que le morphisme canonique

$$j_! j^*(1_{\Delta_1} \times s)_* iF \longrightarrow (1_{\Delta_1} \times p_{\Delta_1})^* iF \simeq (1_{\Delta_1} \times t)_* iF$$

est un isomorphisme. L'isomorphisme canonique $(1_{\Delta_1} \times t)^*(1_{\Delta_1} \times t)_* iF \longrightarrow iF$ induit donc un isomorphisme $\varepsilon_F : aiF \longrightarrow F$. On vérifie alors que a et i forment un couple de foncteurs adjoints avec pour co-unité ε, et pour unité η. ■

4.11. Proposition. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite préponctué (resp. un dérivateur). Alors $\mathbb{D}_\bullet$ est un dérivateur faible à droite ponctué (resp. un dérivateur ponctué).*

Démonstration. Cela résulte aussitôt des lemmes 4.2 et 4.10 et du fait que $\mathbb{D}_{\Delta_1}$ est un dérivateur faible à droite préponctué (resp. un dérivateur). ■

4.12. Exemple. Vu que **Hot** est un dérivateur, on obtient de la sorte un dérivateur ponctué $\mathbf{Hot}_\bullet$, et on pose $\mathsf{Hot}_\bullet = \mathbf{Hot}_\bullet(e)$. Ce dérivateur peut aussi être obtenu par une voie plus classique: $\mathbf{Hot}_\bullet$ est le dérivateur associé au localisateur de Quillen $(\mathcal{C}at_\bullet, \mathcal{W}_\infty)$ formé de la catégorie des petites catégories pointées et de la classe des ∞-équivalences. Cette affirmation n'est qu'un énoncé de strictification: une fois choisi l'objet final $\star$ de **Hot** correspondant à l'objet final de $\mathcal{C}at$ (ce qui a un sens en vertu de 3.3), la catégorie $\mathbf{Hot}_\bullet(A)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hot}(A \times \Delta_1)$ formée des objets F tels que $(1_A \times s)^* F = p_A^* \star$ (et non pas seulement $(1_A \times s)^* F \simeq p_A^* \star$). On peut bien entendu aussi le définir à partir de la catégorie des ensembles simpliciaux pointés, ou encore de celle des espaces topologiques pointés, *etc.*

4.13. Exemple. Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite préponctué, alors pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$, il en est de même de $\mathbb{D}_A$, et on vérifie aussitôt que $\mathbb{D}_{A,\bullet} = \mathbb{D}_{\bullet,A}$.

4.14. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite préponctué. Le $\mathcal{D}ia$-morphisme image inverse $t^* : \mathbb{D}_{\Delta_1} \longrightarrow \mathbb{D}$ induit un $\mathcal{D}ia$-morphisme d'oubli $\mathcal{U} : \mathbb{D}_\bullet \longrightarrow \mathbb{D}$.

4.15. Lemme. *Le $\mathcal{D}ia$-morphisme d'oubli $\mathcal{U} : \mathbb{D}_\bullet \longrightarrow \mathbb{D}$ admet un adjoint à gauche $?_+ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_\bullet$.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathbb{D}$ par $\mathbb{D}_A$, il suffit encore une fois de vérifier que le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathbb{D}_\bullet(e) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$ admet un adjoint à gauche. Le foncteur image directe homologique $t_! : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(\Delta_1)$ est pleinement fidèle et admet pour image essentielle les objets F tels que $s^* F$ soit un objet initial de $\mathbb{D}(e)$. Si X est un objet de $\mathbb{D}(e)$, on note $X_+ = \star \amalg t_! X$ (où $\star$ est un objet final de $\mathbb{D}(\Delta_1)$. On va vérifier que $X \longmapsto X_+$ est un adjoint à gauche de $\mathcal{U}$. On remarque que $p_{\Delta_1}^* = s_!$. Par conséquent, pour tout objet Y de $\mathbb{D}'_\bullet(e)$, on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\Delta_1)}(\star, iY) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\Delta_1)}(s_!\star, iY)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(\star, s^*iY)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(\star,\star) = \{1_\star\}\ .\end{aligned}$$

Si X est un objet de $\mathbb{D}(e)$, on obtient donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_\bullet(e)}(X_+, Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\Delta_1)}(\star \amalg t_!X, iY)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\Delta_1)}(\star, iY) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\Delta_1)}(t_!X, iY)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, t^*iY) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(X, \mathcal{U}Y)\ ,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ∎

4.16. LEMME. *Pour tout dérivateur faible à droite ponctué $\mathbb{D}$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme $?_+ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_\bullet$ est une équivalence.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer $\mathbb{D}$ par $\mathbb{D}_A$ pour chaque A dans $\mathcal{D}ia$, il suffit de montrer que le foncteur $?_+ : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}_\bullet(e)$ est une équivalence de catégories. On constate que $i?_+$ est isomorphe au foncteur $t_!$: en effet, comme $0 = \star$ est un objet initial, pour tout objet F de $\mathbb{D}(\Delta_1)$, $0 \amalg F = F$. Par conséquent, le foncteur $?_+$ est pleinement fidèle. Il est immédiat qu'il est aussi essentiellement surjectif: $\mathbb{D}_\bullet(e)$ est exactement l'image essentielle du foncteur $t_!$ (cf. 4.4). ∎

4.17. PROPOSITION. *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur faible à droite préponctué. Pour tout dérivateur faible à droite ponctué $\mathbb{D}'$, le foncteur induit par $?_+ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_\bullet$*

$$\underline{\mathrm{Hom}_!}(\mathbb{D}_\bullet, \mathbb{D}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}_!}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$$

est une équivalence de catégories. Autrement dit, $\mathbb{D}_\bullet$ est le dérivateur faible à droite ponctué universel associé à $\mathbb{D}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ un $\mathcal{D}ia$-morphisme exact à droite. Il induit un $\mathcal{D}ia$-morphisme $\Phi_\bullet : \mathbb{D}_\bullet \longrightarrow \mathbb{D}'$ obtenu par les compositions

$$\mathbb{D}_\bullet \xrightarrow{i} \mathbb{D}_{\Delta_1} \xrightarrow{\Phi_{\Delta_1}} \mathbb{D}'_{\Delta_1} \xrightarrow{a} \mathbb{D}'_\bullet \xrightarrow{\mathcal{U}} \mathbb{D}'\ .$$

On va montrer que le morphisme canonique $a\Phi_{\Delta_1} \longrightarrow a\Phi_{\Delta_1}ia$ est un isomorphisme. En vertu de l'axiome Der 2, il suffit de le vérifier dans $\mathbb{D}'(e)$. On désigne par v l'unique application strictement croissante de $\square_2$ vers $\square \times \Delta_1$ qui ne prend pas les valeurs $(1,1,0)$ et $(0,1,0)$. On a un foncteur canonique

$$(1_\square \times s)_* : \mathbb{D}'(\square) \longrightarrow \mathbb{D}'(\square \times \Delta_1)$$

et un foncteur image inverse

$$v^* : \mathbb{D}'(\square \times \Delta_1) \longrightarrow \mathbb{D}'(\square_2)\ .$$

En les composant, on définit donc un foncteur $b_0 : \mathbb{D}'(\square) \longrightarrow \mathbb{D}'(\square_2)$. Soit Z le sous-ensemle ordonné de $\square_2$ formé des couples $(i,j) \neq (0,0)$, et soit $k : Z \longrightarrow \square_2$ l'inclusion. On définit ainsi un foncteur

$$b = k_! k^* b_0 \ : \mathbb{D}(\square) \longrightarrow \mathbb{D}(\square_2) \ .$$

Notons $j : \ulcorner \longrightarrow \square$ l'inclusion. Si F est un objet de $\mathbb{D}(\Delta_1)$, comme Φ est exact à droite, $G = \Phi_{\square}(j_! j^*(1_{\Delta_1} \times s)_* F)$ est un objet cocartésien de $\mathbb{D}'(\square)$, et en vertu du lemme 4.7 bG est un objet de $\mathbb{D}'(\square_2)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4.8 et dont l'image dans $\mathbb{D}'(e)$ est un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
s^*\Phi_{\Delta_1} F \arrow[r] \arrow[d] & \Phi\star \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
t^*\Phi_{\Delta_1} F \arrow[r] & t^*\Phi_{\Delta_1} iaF \arrow[r] & t^* ia\Phi_{\Delta_1} F
\end{tikzcd} .$$

On en déduit aussitôt un isomorphisme canonique $a\Phi_{\Delta_1} F \simeq a\Phi_{\Delta_1} iaF$. Considérons à présent un foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{Dia}$. On a alors les isomorphismes canoniques suivants dans $\mathbb{D}'(B)$.

$$u_! a\Phi_{\Delta_1} i \simeq au_!\Phi_{\Delta_1} i \simeq a\Phi_{\Delta_1} u_! i \simeq a\Phi_{\Delta_1} iau_! i \simeq a\Phi_{\Delta_1} iu_! ai \simeq a\Phi_{\Delta_1} iu_!$$

Grâce au lemme 4.7, on a ainsi prouvé que $\Phi_\bullet$ est exact à droite. On a en outre un isomorphisme canonique $\Phi_\bullet\ ?_+ \simeq \Phi$. En effet, pour tout objet A de $\mathcal{Dia}$, et tout objet F de $\mathbb{D}(A)$, on a un carré cocartésien (au sens usuel) dans $\mathbb{D}'(A)$ (car Φ commute aux sommes finies):

$$\begin{tikzcd}
\Phi\star \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Phi F \amalg \Phi\star \arrow[r] & \Phi_\bullet F_+
\end{tikzcd} .$$

Par un raisonnement similaire, on constate que si Ψ est un $\mathcal{Dia}$-morphisme exact à droite de $\mathbb{D}_\bullet$ vers $\mathbb{D}'$, alors on a un isomorphisme canonique $(\Psi\ ?_+)_\bullet \simeq \Psi$. Il est donc clair que le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}_\bullet, \mathbb{D}') \quad , \quad \Phi \longmapsto \Phi_\bullet$$

est un quasi-inverse du foncteur $\Psi \longmapsto \Psi\ ?_+$. ∎

4.18. On suppose à présent que $\mathcal{Dia} = \mathcal{Cat}$. On appelle *dérivateurs ponctués à droite* les dérivateurs à droite de domaine $\mathcal{Cat}$ qui sont aussi ponctués.

4.19. Corollaire. *Soit A une petite catégorie. Pour tout dérivateur ponctué à droite $\mathbb{D}$ il existe une équivalence de catégories naturelle*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot}_{\bullet,A}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(A^{\mathrm{op}}) \ .$$

Pour tout dérivateur faible à droite et ponctué $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{Cat}$, il existe une équivalence de catégories canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot}_\bullet, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(e) \ .$$

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la proposition précédente appliquée à $\mathbf{Hot}_A$ et du corollaire 3.26. ■

4.20. On appelle dualement *dérivateurs ponctués à gauche* les dérivateurs à gauche qui sont aussi ponctués.

4.21. Corollaire. *Soit A une petite catégorie. Pour tout dérivateur ponctué à gauche $\mathbb{D}$, il existe une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}^{\mathrm{op}}_{\bullet,A}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(A)\ .$$

Pour tout dérivateur faible à gauche ponctué $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{C}at$, il existe une équivalence de catégories canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{Hot}^{\mathrm{op}}_{\bullet}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(e)\ .$$

5. Sorites monoïdaux: $\mathbb{D}$-algèbres et $\mathbb{D}$-modules

Dans cette section, on fixe une catégorie de diagramme $\mathcal{D}ia$ (même si seul le cas $\mathcal{D}ia = \mathcal{C}at$ nous intéresse ici).

5.1. On désigne par e le prédérivateur ponctuel, *i.e.* le prédérivateur constant de valeur la catégorie pontcuelle. On remarque que pour tout prédérivateur $\mathbb{D}$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, e)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle. D'autre part, le 2-foncteur $\mathbb{D} \longmapsto \mathbb{D}(e)$ est représentable par e dans $\mathcal{P}reder$. Autrement dit, on a une équivalence de catégories canonique $\underline{\mathrm{Hom}}(e, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(e)$. Cette dernière sera considérée comme une égalité. Autrement dit, si X est un objet de $\mathbb{D}(e)$, on note encore $X : e \longrightarrow \mathbb{D}$ le $\mathcal{D}ia$-morphisme correspondant.

Soient $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ deux prédérivateurs (de domaine $\mathcal{D}ia$). On définit un prédérivateur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}'$ par

$$A \longmapsto \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}'(A)\ .$$

On vérifie aussitôt que $\mathbb{D} \times \mathbb{D}'$ est le 2-produit de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ dans $\mathcal{P}reder$. Autrement dit, pour tout prédérivateur $\mathbb{D}''$, le foncteur induit par les projections canoniques

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}'', \mathbb{D} \times \mathbb{D}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}'', \mathbb{D}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}'', \mathbb{D}')$$

est une équivalence de catégories (c'est en fait un isomorphisme de catégories). Il est remarquable que si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont des dérivateurs faibles à droite, alors il en est de même de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}'$, et les projections vers $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont exactes à droites. En outre pour tout dérivateur faible à droite $\mathbb{D}''$, le foncteur canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}'', \mathbb{D} \times \mathbb{D}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}'', \mathbb{D}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}'', \mathbb{D}')$$

est encore un isomorphisme de catégories.

On peut d'autre part définir pour tous prédérivateurs $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ un prédérivateur $\mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ par

$$A \longmapsto \mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')(A) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_A)$$

i.e. comme le composé des 2-foncteurs $A \longmapsto \mathbb{D}'_A$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, ?)$. On remarque aussitôt que pour tout prédérivateur $\mathbb{D}$, on a une équivalence de prédérivateurs canonique $\mathbf{Hom}(e, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}$.

5.2. Proposition. *Les prédérivateurs forment une 2-catégorie monoïdale symétrique fermée pour le produit cartésien. Autrement dit, pour tous prédérivateurs $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$, il existe une équivalence de catégories canonique*

$$s : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}', \mathbb{D}'') \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbf{Hom}(\mathbb{D}', \mathbb{D}'')) \ .$$

Démonstration. On définit le foncteur s comme suit. Soit Φ un $\mathcal{Dia}$-morphisme de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}'$ vers $\mathbb{D}''$. Si A et B sont deux catégories dans $\mathcal{Dia}$, et si p (resp. q) désigne la projection de $A \times B$ sur A (resp. sur B), on peut former le foncteur composé

$$\rho(\Phi)(A, B) : \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}'(B) \xrightarrow{(p^*, q^*)} \mathbb{D}(A \times B) \times \mathbb{D}'(A \times B)$$
$$\xrightarrow{\Phi} \mathbb{D}''(A \times B) = \mathbb{D}''_A(B) \ .$$

Pour chaque objet F de $\mathbb{D}(A)$, on note

$$s(\Phi)(A, B)(F) \ : \mathbb{D}'(B) \longrightarrow \mathbb{D}''_A(B)$$

le foncteur $G \longmapsto \rho(\Phi)(A, B)(F, G)$. Si $v : B \longrightarrow B'$ est un foncteur dans $\mathcal{Dia}$, l'isomorphisme structural $(1_A \times v)^*\Phi \simeq \Phi(1_A \times v)^*$ induit un isomorphisme de foncteurs $v^* s(\Phi)(A, B')(F) \simeq s(\Phi)(A, B)(F)v^*$. On vérifie sans difficultés que ces données définissent un $\mathcal{Dia}$-morphisme $s(\Phi)(A)(F)$ de $\mathbb{D}'$ vers $\mathbb{D}''_A$. Il est d'autre part immédiat que cette construction est naturelle en F. On a ainsi défini un foncteur

$$s(\Phi)(A) \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}', \mathbb{D}''_A) = \mathbf{Hom}(\mathbb{D}', \mathbb{D}'')(A) \ .$$

Pour tout foncteur $u : A \longrightarrow A'$ dans $\mathcal{Dia}$, les isomorphismes structuraux $(u \times 1_B)^*\Phi \simeq \Phi(u \times 1_B)^*$, $B \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{Dia}$, induisent un isomorphisme de foncteurs

$$u^* s(\Phi)(A') \simeq s(\Phi)(A)u^* \, .$$

Cela définit le $\mathcal{Cat}$-morphisme $s(\Phi)$.

Construisons à présent un foncteur

$$e : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbf{Hom}(\mathbb{D}', \mathbb{D}'')) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}', \mathbb{D}'') \ .$$

Si Ψ est un $\mathcal{Dia}$-morphisme de $\mathbb{D}$ vers $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}', \mathbb{D}'')$, à chaque catégorie A dans $\mathcal{Dia}$ et chaque objet F de $\mathbb{D}(A)$, le $\mathcal{Dia}$-morphisme $\Psi(F)$ définit en particulier un foncteur $\mathbb{D}'(A) \longrightarrow \mathbb{D}''(A \times A)$. La diagonale $\delta_A \ : A \longrightarrow A \times A$ induit un foncteur image inverse $\delta_A^* \ : \mathbb{D}''(A \times A) \longrightarrow \mathbb{D}''(A)$ et donne donc par composition un foncteur

$$\varepsilon(\Psi)(A)(F) \ : \mathbb{D}'(A) \longrightarrow \mathbb{D}''(A) \ .$$

Cette construction est naturelle en F et induit par conséquent un foncteur

$$\varepsilon(\Psi)(A) \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}'(A), \mathbb{D}''(A)) \quad , \quad F \longmapsto \varepsilon(\Psi)(A)(F) \ .$$

Cela définit donc un foncteur $e(\Psi)(A) \ : \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}'(A) \longrightarrow \mathbb{D}''(A)$. On vérifie que pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, l'isomorphisme structural $u^*\Psi \simeq \Psi u^*$ induit un isomorphisme $(u^* \times u^*)\varepsilon(\Psi)(B) \simeq \varepsilon(\Psi)(A)u^*$. Cela définit de la sorte un $\mathcal{D}ia$-morphisme $e(\Psi) \ : \mathbb{D} \times \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}''$. On vérifie alors explicitement que e et s sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. ∎

5.3. COROLLAIRE. *Pour tous prédérivateurs $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$, il existe une équivalence de prédérivateurs canonique*

$$\mathbf{Hom}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}', \mathbb{D}'') \simeq \mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbf{Hom}(\mathbb{D}', \mathbb{D}'')) \ .$$

5.4. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur. Une structure *prémonoïdale* sur $\mathbb{D}$ est la donnée d'un *produit tensoriel* $\otimes$, *i.e.* d'un $\mathcal{D}ia$-morphisme $\otimes \ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, d'un *objet unité* I, *i.e.* d'un objet I de $\mathbb{D}(e)$, et de 2-$\mathcal{D}ia$-morphismes

$$a : \otimes \circ (1_{\mathbb{D}} \times \otimes) \longrightarrow \otimes \circ (\otimes \times 1_{\mathbb{D}}) \ ,$$

$$l : \otimes \circ (I \times 1_{\mathbb{D}}) \longrightarrow 1_{\mathbb{D}} \ ,$$

$$r : \otimes \circ (1_{\mathbb{D}} \times I) \longrightarrow 1_{\mathbb{D}} \ .$$

Pour chaque objet A de $\mathcal{D}ia$, et tout couple (F, G) d'objets de $\mathbb{D}(A)$, on note $F \otimes G = \otimes(F, G)$ le *produit tensoriel* de F et de G. Si A et B sont deux objets de $\mathcal{D}ia$, et F et G des objets de $\mathbb{D}(A)$ et $\mathbb{D}(B)$ respectivement, on note $F \boxtimes G$ le *produit tensoriel extérieur* de F et G, c'est-à-dire $F \boxtimes G = p^*F \otimes q^*G$ dans $\mathbb{D}(A \times B)$, où p (resp. q) désigne la projection de $A \times B$ vers A (resp. vers B). Le produit tensoriel extérieur à gauche par un objet F de $\mathbb{D}(A)$ définit un $\mathcal{D}ia$-morphisme $F \boxtimes \ ? \ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_A$ qui n'est autre que $s(\otimes)(F)$ (cf. 5.2). Dualement, si τ désigne l'automorphisme d'échange des facteurs de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, le produit tensoriel extérieur à droite par G définit un $\mathcal{D}ia$-morphisme $? \boxtimes G \ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_B$ correspondant à $s(\otimes \circ \tau)(G)$. Les 2-$\mathcal{D}ia$-morphismes a, l et r définissent des morphismes fonctoriels

$$a_{F,G,H} \ : F \boxtimes (G \boxtimes H) \longrightarrow (F \boxtimes G) \boxtimes H \ ,$$

$$l_F \ : I \boxtimes F \longrightarrow F \ ,$$

$$r_F \ : F \boxtimes I \longrightarrow F \ .$$

En outre, pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, on a des isomorphismes définis dans la structure de $\mathcal{D}ia$-morphisme de $\otimes$

$$\gamma_u \ : u^* \circ \otimes \simeq \otimes \circ (u^* \times u^*) \ .$$

Une structure *monoïdale* sur un prédérivateur $\mathbb{D}$ est une structure prémonoïdale $(\otimes, I, a, l, r)$ dont la restriction à chacune des catégories $\mathbb{D}(A)$ est une structure de catégorie monoïdale.

Autrement dit une structure monoïdale sur $\mathbb{D}$ est une structure de pseudo monoïde dans la 2-catégorie monoïdale des prédérivateurs. Concrètement, cela revient à demander que a, l et r soient des isomorphismes et induisent les diagrammes commutatifs attendus: le pentagone de Mac Lane et les deux diagrammes de compatibilité entre l et r (voir [Mac98, p. 252] et [Joy93]). On vérifie alors que les isomorphismes γ_u définissent des structures de foncteurs monoïdaux sur les foncteurs image inverse u^*, et que tous les 2-morphismes induits par les 2-flèches de $\mathcal{D}ia$ sont des 2-morphismes de foncteurs monoïdaux. De manière équivalente, se donner une structure monoïdale sur $\mathbb{D}$ revient à se donner pour chaque objet A de $\mathcal{D}ia$, une structure de catégorie monoïdale sur $\mathbb{D}(A)$ d'objet unité ($I_A = p_A^*(I)$), pour chaque foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, une structure de foncteur monoïdal sur le foncteur image inverse $u^* : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$, et pour chaque 2-flèche

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "v"'{name=V}] \arrow[from=U, to=V, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{D}ia$, une structure de morphisme de foncteurs monoïdaux sur α^*,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(B) \arrow[r, bend left, "v^*"{name=U}] \arrow[r, bend right, "u^*"'{name=V}] \arrow[from=U, to=V, phantom, "\Downarrow\alpha^*"] & \mathbb{D}(A) \end{tikzcd} \quad ,$$

le tout de manière compatible aux différentes compositions dans $\mathcal{D}ia$ (c'est-à-dire de telle manière que les produits tensoriels sur chacune des catégories $\mathbb{D}(A)$ définissent de la sorte un $\mathcal{D}ia$-morphisme *etc.*). Un prédérivateur *monoïdal* est un prédérivateur muni d'une structure monoïdale.

Un *tressage* sur un prédérivateur monoïdal $\mathbb{D}$ est la donnée d'un 2-$\mathcal{D}ia$-isomorphisme $t : \otimes \longrightarrow \otimes \circ \tau$ (où τ est l'automorphisme d'échange des facteurs de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$) dont la restriction à chacune des catégorie $\mathbb{D}(A)$ est un tressage de la structure de catégorie monoïdale (voir *loc. cit.*). Un prédérivateur monoïdal *tressé* est un prédérivateur monoïdal muni d'un tressage. Autrement dit, c'est un pseudo-monoïde tressé dans la 2-catégorie monoïdale symétrique des prédérivateurs.

Un prédérivateur monoïdal *symétrique* est un prédérivateur monoïdal muni d'un tressage t tel que $t^2 = 1$ (voir *loc. cit.*). Autrement dit, c'est un pseudo-monoïde symétrique dans la 2-catégorie monoïdale symétrique des prédérivateurs.

Une structure monoïdale sur un prédérivateur $\mathbb{D}$ est *exacte à droite* (resp. *à gauche*) si pour tout objet A de $\mathcal{D}ia$ et tout objet F de $\mathbb{D}(A)$, le produit tensoriel extérieur à gauche et à droite par F sont des $\mathcal{D}ia$-morphismes exacts à droite (resp. à gauche). Un *dérivateur monoïdal faible à droite* (resp. *à gauche*) est un dérivateur faible à droite (resp. à gauche) muni d'une structure monoïdale exacte à droite (resp. à gauche). On définit de même les notions de dérivateur monoïdal tressé ou symétrique faible à droite (resp. à gauche).

5.5. Exemple. Le prédérivateur final e est un dérivateur monoïdal symétrique.

5.6. EXEMPLE. Si $\mathbb{D}$ est un prédérivateur, $\mathbf{End}(\mathbb{D}) = \mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ est un prédérivateur monoïdal strict (ni symétrique ni tressé en général). Le produit tensoriel extérieur est défini par la composition des endomorphismes "gradués par $\mathcal{D}ia$" de $\mathbb{D}$: si A et B sont deux objets de $\mathcal{D}ia$, et si $\Phi\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_A$ et $\Psi\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_B$ sont deux $\mathcal{D}ia$-morphismes, $\Phi \boxtimes \Psi$ est le morphisme composé

$$\mathbb{D} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{D}_A \xrightarrow{\Psi_A} (\mathbb{D}_B)_A = \mathbb{D}_{A\times B} \ .$$

L'objet unité est bien entendu l'identité de $\mathbb{D}$.

5.7. Soient $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ deux dérivateurs faibles à droite de domaine $\mathcal{D}ia$. On définit un sous-prédérivateur plein $\mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ de $\mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ par

$$A \longmapsto \mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')(A) = \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_A) \ .$$

Pour voir que c'est un sous-prédérivateur, il suffit de constater que pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme $u^*\ : \mathbb{D}_B \longrightarrow \mathbb{D}_A$ est exact à droite (2.8).

5.8. PROPOSITION. *Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux dérivateurs faibles à droite, alors il en est de même de $\mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$. Si en outre $\mathbb{D}'$ est ponctué (resp. dans le cas où $\mathcal{D}ia = \mathcal{C}at$, si en outre $\mathbb{D}'$ est un dérivateur à droite), alors $\mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ est aussi ponctué (resp. un dérivateur à droite).*

DÉMONSTRATION. L'axiome Der 1 résulte aussitôt du fait que le 2-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, ?)$ commute aux produits finis (voir 5.1). L'axiome Der 2 résulte du fait les $\mathcal{D}ia$-morphismes sont compatibles aux images inverses, et que si Φ et Ψ sont deux $\mathcal{D}ia$-morphisme de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$, et si α est un 2-$\mathcal{D}ia$-morphisme de Φ vers Ψ, alors α est un isomorphisme si et seulement si pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, et tout objet X de $\mathbb{D}(A)$, $\alpha_X\ : \Phi X \longrightarrow \Psi X$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(A)$. Les axiomes Der 3d et Der 4d sont quant à eux conséquences du fait que $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, ?)$ est un 2-foncteur. Autrement dit, si $u\ : A \longrightarrow B$ est une flèche de $\mathcal{D}ia$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme $u_!\ : \mathbb{D}_A \longrightarrow \mathbb{D}_B$ défini par les foncteurs

$$(u \times 1_C)_!\ : \mathbb{D}'(A \times C) \longrightarrow \mathbb{D}'(B \times C) \quad , \quad C \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{D}ia \ ,$$

est un adjoint à gauche du $\mathcal{D}ia$-morphisme $u^*\ : \mathbb{D}'_B \longrightarrow \mathbb{D}'_A$. Par conséquent, par 2-fonctorialité, le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, u_!)\ : \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_B)$$

est l'adjoint à gauche du foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, u^*)\ : \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_A) \ ,$$

lequel n'est autre que le foncteur image inverse

$$u^*\ : \mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')(B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')(A) \ .$$

On en déduit que tous les isomorphismes de foncteurs faisant intervenir des foncteurs image inverse et des foncteurs image directe homologique dans $\mathbb{D}'$ induisent des isomorphismes analogues dans $\mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$. Cela montre l'axiome Der 4d et implique aussi que si $\mathbb{D}'$ est un dérivateur à droite, il en est de même de $\mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$. Pour prouver le cas ponctué, on remarque que $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ admet un objet nul (à savoir le $\mathcal{D}ia$-morphisme constant de valeur 0). Il suffit donc de montrer que le $\mathcal{D}ia$-morphisme $s_* \ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_{\Delta_1}$ est exact à droite. Comme s_* est pleinement fidèle, en vertu de l'énoncé dual de la proposition 2.6, cela revient à montrer que si A est un objet de $\mathcal{D}ia$, et si F est un objet de $\mathbb{D}(A \times \Delta_1)$ tel que $(1_A \times t)^* F = 0$, alors $t^*(p_A \times 1_{\Delta_1})_! F = 0$. Or en vertu de l'énoncé dual de la proposition 2.4, on a un isomorphisme canonique $t^*(u \times 1_{\Delta_1})_! F \simeq p_{A!}(1_A \times t)^* F$, et comme $u_!$ respecte l'objet nul, cela achève la démonstration. ∎

5.9. Remarque. La même preuve montre que si $\mathbb{D}'$ est un dérivateur faible à gauche, alors pour tout prédérivateur $\mathbb{D}$, $\mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ est un dérivateur faible à droite. Si en outre $\mathbb{D}$ est aussi un dérivateur faible à droite, l'inclusion canonique

$\mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}') \subset \mathbf{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ est exacte à droite.

5.10. Corollaire. *Pour tout dérivateur faible à droite* $\mathbb{D}$, $\mathbf{End}_!(\mathbb{D}) = \mathbf{Hom}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ *est un dérivateur monoïdal faible à droite.*

Démonstration. On sait grâce à la proposition ci-dessus que $\mathbf{End}_!(\mathbb{D})$ est un dérivateur faible à droite. Il est immédiat que la structure monoïdale canonique sur $\mathbf{End}(\mathbb{D})$ décrite dans l'exemple 5.6 se restreint en une structure monoïdale sur $\mathbf{End}_!(\mathbb{D})$. Comme les images directes homologiques se calculent argument par argument dans $\mathbf{End}_!(\mathbb{D})$, on s'aperçoit aussitôt que cette structure est exacte à droite. ∎

5.11. Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux prédérivateurs monoïdaux, un *$\mathcal{D}ia$-morphisme monoïdal* $\Phi \ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ est la donnée d'un triplet (Φ, c, u), où Φ est un $\mathcal{D}ia$-morphisme, c est un 2-$\mathcal{D}ia$-isomorphisme de $\otimes \circ (\Phi \times \Phi)$ vers $\Phi \circ \otimes$, et i un isomorphisme de l'objet unité de $\mathbb{D}'$ vers l'image de l'objet unité de $\mathbb{D}$ par Φ, dont les restrictions $\Phi \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$, $A \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{D}ia$, sont des foncteurs monoïdaux (forts) au sens de *loc. cit.* Si en outre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont des prédérivateurs monoïdaux tressés, on dira que Φ est un *$\mathcal{D}ia$-morphisme tressé* si chacun des foncteurs $\Phi \ : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$, $A \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{D}ia$, sont des foncteurs monoïdaux tressés. Un *2-$\mathcal{D}ia$-morphisme monoïdal* entre $\mathcal{D}ia$-morphismes monoïdaux est un 2-$\mathcal{D}ia$-morphisme compatible aux produits tensoriels et aux identités au sens de *loc. cit* (le tressage n'intervient pas au niveau des 2-morphismes).

Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur monoïdal (resp. monoïdal tressé) fixé. Une $\mathbb{D}$-*algèbre* (resp. une $\mathbb{D}$-*algèbre tressée*) est un prédérivateur monoïdal (resp. un monoïdal tressé) muni d'un $\mathcal{D}ia$-morphisme monoïdal (resp. tressé) i de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$. Si $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ sont deux $\mathbb{D}$-algèbres (resp. deux $\mathbb{D}$-algèbres tressées), un $\mathbb{D}$-*morphisme* (resp. un $\mathbb{D}$-*morphisme tressé*) est un $\mathcal{D}ia$-morphisme monoïdal (resp. tressé) Φ de $\mathbb{D}'$ vers $\mathbb{D}''$ compatible avec les structures de $\mathbb{D}$-algèbres i et i' sur $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ respectivement, c'est-à-dire muni d'un 2-$\mathcal{D}ia$-morphisme monoïdal de Φi vers i'. Un 2-$\mathbb{D}$-*morphisme* entre $\mathbb{D}$-morphismes est un 2-$\mathcal{D}ia$-morphisme monoïdal compatible aux structures de $\mathbb{D}$-algèbres. On vérifie aussitôt qu'avec ces définitions, les $\mathbb{D}$-algèbres (resp. les $\mathbb{D}$-algèbres tressées) forment une 2-catégorie. Si en outre $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite, on définit de manière analogue les 2-catégories des $\mathbb{D}$-algèbres faibles à droite et des $\mathbb{D}$-algèbres tressées faibles à droite.

5.12. Exemple. Pour tout prédérivateur monoïdal $\mathbb{D}$, $\mathbf{End}(\mathbb{D})$ est une $\mathbb{D}$-algèbre (le morphisme structural est défini par le produit tensoriel *via* la correspondance de la proposition 5.2). Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite, cette structure se restreint en une structure de $\mathbb{D}$-algèbre faible à droite sur $\mathbf{End}_!(\mathbb{D})$.

5.13. Exemple. Pour tout prédérivateur monoïdal $\mathbb{D}$ et tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme image inverse $u^* : \mathbb{D}_B \longrightarrow \mathbb{D}_A$ est monoïdal, et si en outre $\mathbb{D}$ est tressé, alors u^* est tressé. Cependant, si $\mathbb{D}$ est un dérivateur monoïdal faible à droite, le $\mathcal{D}ia$-morphisme $u_!\ : \mathbb{D}_A \longrightarrow \mathbb{D}_B$ n'est pas monoïdal en général. Si on impose que u est une fibration, la relation de $u_!$ avec le produit tensoriel apparaît sous la forme d'une formule de projection comme ci-dessous.

5.14. Proposition. *Soient $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ trois dérivateurs faibles à droite. On se donne un $\mathcal{D}ia$-morphisme $\otimes$ de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}'$ vers $\mathbb{D}''$ (on note $F \otimes G$ pour $\otimes(F, G)$). On suppose que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme $X \boxtimes\ ? : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}''$ induit par $\otimes$ (5.2) est exact à droite. Alors pour toute fibration $p : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, pour tout objet F de $\mathbb{D}(B)$ et tout objet G de $\mathbb{D}'(A)$, on a un isomorphisme canonique $p_!(p^*F \otimes G) \xrightarrow{\sim} F \otimes p_!G$ dans $\mathbb{D}''(B)$.*

Démonstration. On a un morphisme canonique

$$p^*F \otimes G \longrightarrow p^*F \otimes p^*p_!G \xleftarrow{\sim} p^*(F \otimes p_!G)\ ,$$

ce qui induit un morphisme $p_!(p^*F \otimes G) \longrightarrow F \otimes p_!G$. Soit b un objet de B. Formons le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} A_b & \xrightarrow{i} & A \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ e & \xrightarrow[b]{} & B \end{array}$$

En vertu de l'énoncé dual du lemme 2.3, on a un isomorphisme de changement de base $q_!i^* \simeq b^*p_!$. On obtient alors les isomorphismes canoniques suivants.

$$\begin{aligned} b^*p_!(p^*F \otimes G) \simeq q_!i^*(p^*F \otimes G) \simeq q_!(i^*p^*F \otimes i^*G) \simeq q_!(q^*b^*F \otimes i^*G) = q_!(b^*F \boxtimes i^*G) \\ \simeq b^*F \boxtimes q_!i^*G = b^*F \otimes q_!i^*G \simeq b^*F \otimes b^*p_!G \simeq b^*(F \otimes p_!G) \end{aligned}$$

L'axiome Der 2 achève donc la démonstration. ∎

5.15. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur monoïdal. Un $\mathbb{D}$-*module (à droite)* $\mathbb{D}'$ est la donnée d'un triplet $(\otimes, a, l)$, où $\otimes$ est un $\mathcal{D}ia$-morphisme de $\mathbb{D}' \times \mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$, et

$$a : \otimes \circ (1_{\mathbb{D}'} \times \otimes) \longrightarrow \otimes \circ (\otimes \times 1_{\mathbb{D}})\ ,$$

$$r : \otimes \circ (1_{\mathbb{D}'} \times I) \longrightarrow 1_{\mathbb{D}'}\ ,$$

sont des 2-$\mathcal{D}ia$-isomorphismes, satisfaisant les conditions de cohérence attendues (en fait, simplement l'associativité par un pentagone de Mac Lane et un triangle commutatif exprimant la trivialité de l'action de l'unité de $\mathbb{D}$). De manière équivalente, en vertu de la proposition 5.2, cela revient à se donner une structure de $\mathbb{D}$-algèbre sur $\mathbf{End}(\mathbb{D}')$. Comme dans le cas des structures monoïdales, si F est un objet de $\mathbb{D}(A)$ et G un objet de $\mathbb{D}'(B)$, on peut définir des produits extérieurs

$$F \boxtimes\ ?\ : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}' \quad \text{et} \quad ? \boxtimes G\ : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'_B\ .$$

Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite, un $\mathbb{D}$-module *faible à droite* est un dérivateur faible à droite $\mathbb{D}'$ muni d'une structure de $\mathbb{D}$-module telle que les $\mathcal{C}at$-morphismes de la forme $F \boxtimes\ ?$ et $? \boxtimes G$ soient exacts à droite.

Un morphisme de $\mathbb{D}$-modules est un couple (Φ, c), où $\Phi\ : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}''$ est un $\mathcal{D}ia$-morphisme, et $c\ : \otimes \circ (1_{\mathbb{D}} \times \Phi) \longrightarrow \Phi \circ \otimes$ est un 2-$\mathcal{D}ia$-isomorphisme satisfaisant des conditions de cohérence analogues à celles imposées pour les $\mathcal{D}ia$-morphismes monoïdaux. On définit de même une notion de 2-morphisme entre morphismes de $\mathbb{D}$-modules, ce qui permet de définir une 2-catégorie des $\mathbb{D}$-modules.

5.16. Exemple. Tout prédérivateur $\mathbb{D}$ est muni d'une structure de $\mathbf{End}(\mathbb{D})$-module: l'identité de $\mathbf{End}(\mathbb{D})$ définit par la proposition 5.2 un $\mathcal{D}ia$-morphisme $\mathbb{D} \times \mathbf{End}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{D}$, ce qui définit la structure de module (en prenant pour a et r les identités). On vérifie aussitôt que si $\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à droite, cette action se restreint en une action exacte à droite de $\mathbf{End}_!(\mathbb{D})$ sur $\mathbb{D}$.

5.17. On considère une 2-sous-catégorie $\mathcal{D}er_\sharp$ de $\mathcal{P}reder$. Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux objets de $\mathcal{D}er_\sharp$, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ la catégorie des 1-morphismes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}'$ dans $\mathcal{D}er_\sharp$. On suppose que pour tous $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ dans $\mathcal{D}er_\sharp$, le foncteur canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$$

est pleinement fidèle et que toute $\mathcal{D}ia$-équivalence est dans $\mathcal{D}er_\sharp$. On suppose que le 2-foncteur $\mathbb{D} \longmapsto \mathbb{D}(e)$ est représentable dans $\mathcal{D}er_\sharp$, *i.e.* qu'il existe un objet $\mathbf{Hot}_\sharp$ de $\mathcal{D}er_\sharp$ et des équivalences de catégories naturelles en $\mathbb{D}$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(e)\ .$$

On suppose aussi que pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, et pour tout objet $\mathbb{D}$ de $\mathcal{D}er_\sharp$, le $\mathcal{D}ia$-morphisme image inverse $u^* : \mathbb{D}_B \longrightarrow \mathbb{D}_A$ est dans $\mathcal{D}er_\sharp$. Cela permet de définir des prédérivateurs $\mathbf{Hom}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ par

$$A \longmapsto \mathbf{Hom}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}')(A) = \underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}'_A)\ .$$

On fait enfin l'hypothèse que pour tous $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ dans $\mathcal{D}er_\sharp$, $\mathbf{Hom}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ est dans $\mathcal{D}er_\sharp$.

Soient $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n$ une famille finie d'objets de $\mathcal{D}er_\sharp$, et $\mathbb{D}$ un objet de $\mathcal{D}er_\sharp$. On considère un $\mathcal{D}ia$-morphisme Φ de $\prod_i \mathbb{D}_i$ vers $\mathbb{D}$. Pour chaque i, $0 \leq i \leq n$, si F_j est un objet de $\mathbb{D}_j(A_j)$ pour $j \neq i$ (où les A_j sont des objets de $\mathcal{D}ia$), on note

$$\Phi(F_1, \ldots, F_{j-1}, ?, F_{j+1}, \ldots, F_n) \ : \mathbb{D}_i \longrightarrow \mathbb{D}_{\prod_{i \neq j} A_j}$$

le $\mathcal{D}ia$-morphisme défini par les foncteurs déterminés pour chaque objet A_i de $\mathcal{D}ia$ par

$$F_i \longmapsto \Phi(p_1^* F_1, \ldots, p_{j-1}^* F_{j-1}, p_i^* F_i, p_{j+1}^* F_{j+1}, \ldots, p_n^* F_n) \ ,$$

où $p_k \ : \prod_l A_l \longrightarrow A_k$ désignent les projections. On note

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp^n(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n; \mathbb{D})$$

la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}_1 \times \cdots \times \mathbb{D}_n, \mathbb{D})$ formée des $\mathcal{D}ia$-morphismes Φ tels que les $\mathcal{D}ia$-morphismes de la forme

$$\Phi(F_1, \ldots, F_{j-1}, ?, F_{j+1}, \ldots, F_n)$$

soient dans $\mathcal{D}er_\sharp$.

On peut alors définir un prédérivateur $\mathbf{Hom}_\sharp^n(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n; \mathbb{D})$ par

$$A \longmapsto \mathbf{Hom}_\sharp^n(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n; \mathbb{D})(A) = \underline{\mathrm{Hom}}_\sharp^n(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n; \mathbb{D}_A) \ .$$

5.18. Lemme. *Pour tout $n \geq 2$ et tout i, $0 \leq i \leq n$, il existe des équivalences de catégories canoniques*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp^n(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n; \mathbb{D}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_\sharp^{n-1}(\mathbb{D}_1, \ldots, \widehat{\mathbb{D}}_i, \ldots, \mathbb{D}_n; \mathbf{Hom}_\sharp(\mathbb{D}_i, \mathbb{D})) \ ,$$

$(\mathbb{D}_1, \ldots, \widehat{\mathbb{D}}_i, \ldots, \mathbb{D}_n)$ *désignant le $n-1$-uplet dans lequel manque le facteur $\mathbb{D}_i$.*

Démonstration. Cela résulte de l'explicitation de l'équivalence de catégories de la proposition 5.2. ∎

5.19. Lemme. *Pour tout objet $\mathbb{D}$ de $\mathcal{D}er_\sharp$, il existe une $\mathcal{D}ia$-équivalence naturelle*

$$\mathbf{Hom}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D} \ .$$

Démonstration. Pour chaque objet A de $\mathcal{D}ia$, on a une $\mathcal{D}ia$-équivalence canonique

$$\mathbf{Hom}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D})(A) = \underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D}_A) \simeq \mathbb{D}_A(e) = \mathbb{D}(A) \ .$$

Il suffit donc de vérifier que cela définit bien un $\mathcal{D}ia$-morphisme. Or l'équivalence de catégories $\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(e)$ est nécessairement le foncteur composé

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D}) \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(e, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(e) \ ,$$

où le second foncteur est celui induit par l'objet de $\mathbf{Hot}_\sharp(e)$ correspondant à l'identité de $\mathbf{Hot}_\sharp$. On en déduit facilement l'assertion. ∎

5.20. LEMME. *Soit $n \geq 1$ un entier. Il existe une équivalence de catégories naturelle Pour tout objet $\mathbb{D}$ de $\mathcal{D}er_\sharp$*

$$\underline{\mathrm{Hom}}^n_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \ldots, \mathbf{Hot}_\sharp; \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(e) \ .$$

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'assertion est vérifiée par hypothèse. Si $n \geq 2$, on obtient grâce aux lemmes 5.18 et 5.19 les équivalences de catégories suivantes

$$\begin{aligned} &\underline{\mathrm{Hom}}^n_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \ldots, \mathbf{Hot}_\sharp; \mathbb{D}) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{n-1}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \ldots, \mathbf{Hot}_\sharp; \mathbf{Hom}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbb{D})) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{n-1}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \ldots, \mathbf{Hot}_\sharp; \mathbb{D}) \ , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ∎

5.21. Soit $\mathbb{D}$ un objet de $\mathcal{D}er_\sharp$. Une $\sharp$-structure monoïdale sur $\mathbb{D}$ est une structure monoïdale sur $\mathbb{D}$ dont le produit tensoriel est un objet de $\underline{\mathrm{Hom}}^2_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}; \mathbb{D})$. Par exemple, pour tout objet $\mathbb{D}$ de $\mathcal{D}er_\sharp$, la structure monoïdale de $\mathbf{End}(\mathbb{D})$ induit une $\sharp$-structure monoïdale sur $\mathbf{End}_\sharp(\mathbb{D}) = \mathbf{Hom}_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Si $\mathbb{D}'$ est un objet de $\mathcal{D}er_\sharp$, une $\sharp$-structure de $\mathbb{D}$-module est une structure de $\mathbb{D}$-module dont l'action est un objet de $\underline{\mathrm{Hom}}^2_\sharp(\mathbb{D}, \mathbb{D}'; \mathbb{D}')$.

On note $I_\sharp$ l'objet de $\mathbf{Hot}_\sharp(e)$ correspondant à l'identité de $\mathbf{Hot}_\sharp$.

5.22. THÉORÈME. *On se place sous les hypothèses de* 5.17.

(i) *Le prédérivateur $\mathbf{Hot}_\sharp$ est muni d'une unique $\sharp$-structure monoïdale dont l'objet unité est $I_\sharp$. En outre, cette structure monoïdale est symétrique, et l'équivalence de prédérivateurs canonique $\mathbf{Hom}_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \mathbf{Hot}_\sharp) \simeq \mathbf{Hot}_\sharp$ est monoïdale.*

(ii) *Tout objet de $\mathcal{D}er_\sharp$ admet canoniquement une $\sharp$-structure de $\mathbf{Hot}_\sharp$-module. Tout morphisme de $\mathcal{D}er_\sharp$ est un morphisme de $\mathbf{Hot}_\sharp$-modules. Tout 2-morphisme de $\mathcal{D}er_\sharp$ est un 2-morphisme de $\mathbf{Hot}_\sharp$-modules.*

(iii) *Tout objet de $\mathcal{D}er_\sharp$ muni d'une $\sharp$-structure monoïdale est une $\mathbf{Hot}_\sharp$-algèbre. Tout morphisme monoïdal de $\mathcal{D}er_\sharp$ entre objet monoïdaux est un morphisme de $\mathbf{Hot}_\sharp$-algèbres. Tout 2-morphisme monoïdal entre morphisme monoïdaux de $\mathcal{D}er_\sharp$ est un 2-morphisme de $\mathbf{Hot}_\sharp$-algèbres.*

(iv) *Tout objet de $\mathcal{D}er_\sharp$ muni d'une $\sharp$-structure monoïdale tressée est une $\mathbf{Hot}_\sharp$-algèbre tressée. Tout morphisme tressé de $\mathcal{D}er_\sharp$ entre objet monoïdaux tressés est un morphisme de $\mathbf{Hot}_\sharp$-algèbres tressées.*

DÉMONSTRATION. Lorsque $\mathcal{D}er_\sharp$ est la 2-catégorie $\mathcal{P}reder$ des prédérivateurs de domaine $\mathcal{D}ia$, $\mathbf{Hot}_\sharp$ est alors le dérivateur ponctuel e, et ce théorème est alors une trivialité. Dans le cas général, on remarque grâce au lemme 5.20 que, pour tout prédérivateur $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{D}er_\sharp$, on a une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}^n_\sharp(\mathbf{Hot}_\sharp, \ldots, \mathbf{Hot}_\sharp; \mathbb{D}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^n(e, \ldots, e; \mathbb{D}) = \mathbb{D}(e) \, .$$

Autrement dit, toute action de $\mathbf{Hot}_\sharp$ sur $\mathbb{D}$ est totalement déterminée par l'action induite de e sur le prédérivateur $\mathbb{D}$. Dans la mesure où le foncteur d'oubli de $\mathcal{D}er_\sharp$ vers $\mathcal{P}reder$ respecte les structures de modules et d'algèbres (éventuellement tressées ou symétriques), le cas général résulte donc trivialement du cas $\mathcal{D}er_\sharp = \mathcal{P}reder$. ■

5.23. Remarque. En vertu du corollaire 3.26 (resp. 4.19) et de la proposition 5.8, le théorème ci-dessus s'applique à la 2-catégorie des dérivateurs faibles à gauche (resp. des dérivateurs ponctués faibles à gauche). On a alors $\mathbf{Hot}_\sharp = \mathbf{Hot}$ (resp. $\mathbf{Hot}_\sharp = \mathbf{Hot}_\bullet$), et l'objet unité de $\mathbf{Hot}$ (resp. de $\mathbf{Hot}_\bullet$) est l'objet final de Hot (resp. la sphère S^0). En effet, l'explicitation de l'équivalence $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot}, \mathbf{Hot}) \simeq \mathsf{Hot}$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{Hot}, \mathbf{Hot}_\bullet) \simeq \mathsf{Hot}_\bullet$) envoie l'identité de $\mathbf{Hot}$ (resp. $?_+$) sur l'objet final de Hot (resp. sur la sphère S^0).

6. Catégories de modèles monoïdales

6.1. Proposition. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles monoïdale (symétrique) au sens de [Hov99, 4.2.6]. Alors le dérivateur associé $\mathbb{D}_\mathcal{M}$ admet une structure monoïdale (symétrique) exacte à droite, et la structure de catégorie monoïdale (symétrique) induite sur la catégorie homotopique $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M} = \mathbb{D}_\mathcal{M}(e)$ est celle définie dans [Hov99, théorème 4.3.2].*

Démonstration. Soit X un objet de $\mathcal{M}$. Les foncteurs

$$X \otimes\ ?,\ ? \otimes X\ : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

sont des foncteurs de Quillen à gauche. En particulier, ils respectent donc les cofibrations, les cofibrations triviales, et les équivalences faibles entre objets cofibrants. Si $\mathcal{M}_c$ désigne la sous-catégorie des objets cofibrants de $\mathcal{M}$, pour toute petite catégorie A, on définit un foncteur

$$\otimes\ : \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{M}_c) \times \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{M}_c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{M})$$

en posant $(F \otimes G)(a) = F(a) \otimes G(a)$, $a \in \mathsf{Ob}\,A$. Ce foncteur respecte les équivalences faibles, et en vertu de l'équivalence de prédérivateurs canonique $\mathbb{D}_{\mathcal{M}_c} \simeq \mathbb{D}_\mathcal{M}$ [Cis03, proposition 6.9], induit de la sorte un $\mathcal{C}at$-morphisme

$$\otimes^{\mathbf{L}}\ : \mathbb{D}_\mathcal{M} \times \mathbb{D}_\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{D}_\mathcal{M}\ ,$$

lequel se révèle être le foncteur dérivé (total) à gauche de $\otimes$. La propriété universelle du foncteur dérivé total à gauche [Qui67, chap. I, 4, définition 1], l'énoncé dual de [Cis03, proposition 2.7 (ii)], et l'axiome Der 2 montrent aussitôt que la structure monoïdale sur $\underline{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}}, \mathcal{M})$ induit une structure monoïdale sur $\mathbb{D}_\mathcal{M}(A)$. Pour la même raison, les foncteurs image inverse sont canoniquement munis d'une structure monoïdale, ainsi que les images inverses de 2-morphismes. Autrement dit, $\mathbb{D}_\mathcal{M}$ est ainsi muni d'une structure monoïdale. Si en outre $\mathcal{M}$ est tressée (resp. symétrique), la propriété universelle des foncteurs dérivés totaux à gauche induit de même une structure tressée. Il est clair que la structure monoïdale (symétrique) induite sur $\mathbb{D}_\mathcal{M}(e)$ est celle construite dans [Hov99, théorème 4.3.2]. Pour conclure, il suffit donc de vérifier que pour toute petite catégorie

A, et tout préfaisceau F sur A à valeurs dans $\mathcal{M}$, les $\mathcal{C}at$-morphismes $?\boxtimes^{\mathbf{L}} F$ et $F \boxtimes^{\mathbf{L}}\ ?$ sont exacts à droite. Or l'axiome Der 2, et le fait que les images directes homologiques se calculent argument par argument dans $\mathbb{D}_A$ (2.8) montrent qu'il suffit de traiter le cas $A = e$. L'assertion est alors une conséquence immédiate de l'énoncé dual de [Cis03, proposition 6.12] appliqué aux foncteurs $?\boxtimes F$ et $F \boxtimes\ ?$. ■

6.2. Corollaire. *La structure monoïdale exacte à droite canonique sur* **Hot** *est celle induite par le produit cartésien.*

Démonstration. Le produit cartésien d'ensembles simpliciaux fait de $\widehat{\Delta}$ une structure de catégorie de modèles monoïdale symétrique. On en déduit par la proposition précédente une structure monoïdale exacte à droite sur $\mathbf{Hot} \simeq \mathbb{D}_{\widehat{\Delta}}$. Or en vertu de la proposition 3.3, l'objet unité de cette structure est l'objet final de Hot. L'assertion résulte donc aussitôt de la remarque 5.23. ■

6.3. Remarque. Ce corollaire est en fait une conséquence immédiate des propositions 3.3 et 3.4.

6.4. Corollaire. *La structure monoïdale exacte à droite canonique sur* $\mathbf{Hot}_\bullet$ *est celle induite par le* $\wedge$*-produit.*

Démonstration. Le $\wedge$-produit d'ensembles simpliciaux pointés fait de $\widehat{\Delta}_\bullet$ une catégorie de modèles monoïdale (symétrique) dont l'objet unité est la 0-sphère. La proposition ci-dessus et la remarque 5.23 permettent donc de conclure. ■

6.5. Proposition. *Soit* $\mathcal{M}$ *une catégorie de modèles admettant des petites limites inductives. L'action de* Hot *sur* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *définie par la propriété universelle de* **Hot** *(théorème* 5.22*) coïncide avec celle définie par [Hov99, théorème 5.5.3]. Si en outre* $\mathcal{M}$ *admet un objet nul, alors l'action de* $\mathsf{Hot}_\bullet$ *sur* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *définie par la propriété universelle de* $\mathbf{Hot}_\bullet$ *coïncide avec celle définie par [Hov99, théorème 5.7.3].*

Démonstration. On considère un objet cosimplicial A de $\mathcal{M}$. On suppose qu'il est cofibrant pour la structure de Reedy [Hov99, théorème 5.2.5], et que pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme $A_n \longrightarrow A_0$ est une équivalence faible. On note

$$A_! = A \otimes\ ? : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{M}$$

l'unique foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers $\mathcal{M}$ qui commute aux petites limites inductives et qui prolonge A. C'est un foncteur de Quillen à gauche [Hov99, corollaire 5.4.4], et donc en vertu de l'énoncé dual de [Cis03, proposition 6.12], il induit un $\mathcal{C}at$-morphisme exact à droite

$$A \otimes^{\mathbf{L}}\ ? : \mathbf{Hot} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathcal{M}}\ .$$

Or il résulte du corollaire 3.26 que ce $\mathcal{C}at$-morphisme est celui induit par l'objet A_0. Ces identifications sont fonctorielles en A, et le corollaire 3.26 permet d'une manière générale de vérifier que l'action de Hot définie par Hovey sur $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ est celle induite par la propriété universelle en ne considérant que l'action homotopique de l'objet final Δ_0 sur $\mathcal{M}$, ce qui rend les vérifications triviales. Des arguments analogues permettent de traiter le cas où $\mathcal{M}$ admet un objet nul. ■

6.6. Corollaire. *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles monoïdale (symétrique), alors le foncteur monoïdal (symétrique) de* Hot *vers* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *défini par [Hov99, 5.6.5] est la restriction du $\mathcal{C}at$-morphisme monoïdal (symétrique) canonique de* $\mathbf{Hot}$ *vers* $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$. *De même, si $\mathcal{M}$ admet en outre un objet nul, le foncteur monoïdal (symétrique) de* $\mathsf{Hot}_\bullet$ *vers* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ *défini par [Hov99, 5.7.4] est la restriction du $\mathcal{C}at$-morphisme monoïdal (symétrique) canonique de* $\mathbf{Hot}_\bullet$ *vers* $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$.

Démonstration. Le $\mathcal{C}at$-morphisme monoïdal de $\mathbf{Hot}$ (resp. de $\mathbf{Hot}_\bullet$) vers $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$ est le $\mathcal{C}at$-morphisme exact à droite défini par l'objet unité de $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}(e) = \mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$. De même, le foncteur monoïdal de Hot (resp. de $\mathsf{Hot}_\bullet$) vers $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$ défini dans [Hov99] est induit par l'action de Hot (resp. de $\mathsf{Hot}_\bullet$) sur l'objet unité de $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$. La proposition précédente implique donc que ce dernier est isomorphe au foncteur induit par le morphisme de $\mathbf{Hot}$ vers $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$. Il est par ailleurs immédiat que les structures de foncteurs monoïdaux coïncident[3]. ■

On peut à présent démontrer la conjecture de cohérence de Hovey [Hov99, 5.6.6].

6.7. Corollaire. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles monoïdale d'objet unité S. On considère un ensemble simplicial K. Les isomorphismes naturels de* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$*, définis pour tout objet X de $\mathcal{M}$ par*

$$X \otimes^{\mathbf{L}} (S \otimes^{\mathbf{L}} K) \simeq (X \otimes^{\mathbf{L}} S) \otimes^{\mathbf{L}} K \simeq X \otimes^{\mathbf{L}} K \ ,$$

définissent un 2-morphisme de morphismes de Hot*-modules.*

Démonstration. La propriété universelle de $\mathbf{Hot}$ permet d'invoquer le théorème 5.22 avec $\mathbf{Hot}_\sharp = \mathbf{Hot}$ (5.23). En vertu de la proposition 6.1 et du corollaire 6.6, ces isomorphismes sont donc des 2-morphismes induits par restriction de 2-morphismes entre $\mathcal{C}at$-morphismes exacts à droite, ce qui implique aussitôt l'assertion. ■

De même, la propriété universelle de $\mathbf{Hot}_\bullet$ implique la variante ponctuée de l'énoncé précédent (c'est-à-dire [Hov99, conjecture 5.7.5]).

6.8. Corollaire. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles monoïdale ponctuée d'objet unité S, et soit K un ensemble simplicial pointé. Les isomorphismes naturels de* $\mathsf{Ho}\,\mathcal{M}$*, définis pour tout objet X de $\mathcal{M}$ par*

$$X \otimes^{\mathbf{L}} (S \otimes^{\mathbf{L}} K) \simeq (X \otimes^{\mathbf{L}} S) \otimes^{\mathbf{L}} K \simeq X \otimes^{\mathbf{L}} K \ ,$$

définissent un 2-morphisme de morphismes de $\mathsf{Hot}_\bullet$*-modules.*

6.9. Remarque. Les conséquences de ces deux énoncés données dans [Hov99] peuvent bien entendu être montrées directement en termes de dérivateurs.

[3] Le théorème 5.22 et cette démonstration redonnent en fait une preuve de [Hov99, théorèmes 5.6.5 et 5.7.4] en évitant la vérification de diagrammes de cohérence non triviaux.

References

[Cis99] D.-C. Cisinski, *Les morphismes de Dwyer ne sont pas stables par rétractes*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques **XL-3** (1999), 227–231.

[Cis03] ———, *Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **10** (2003), 195–244.

[Cis04] ———, *Le localisateur fondamental minimal*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques **XLV-2** (2004), 109–140.

[Cis06] ———, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, vol. 308, Soc. Math. France, 2006.

[Cis08] ———, *Locally constant functors*, arXiv:0803.4342v2, 2008.

[CS08] W. Chachólski and J. Scherer, *Representations of spaces*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 1, 245–278.

[Gro83] A. Grothendieck, *Pursuing stacks*, 1983, manuscrit. À paraître dans la série Documents Mathématiques, Soc. Math. France.

[Gro90] ———, Dérivateurs, Manuscrit, ∼1990.

[Gro03] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques, vol. 3, Soc. Math. France, 2003, édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics publié en 1971 par Springer-Verlag.

[Hel97] A. Heller, *Stable homotopy theories and stabilization*, J. Pure. Appl. Algebra **115** (1997), 113–130.

[Hov99] M. Hovey, *Model categories*, Math. surveys and monographs, vol. 63, Amer. Math. Soc., 1999.

[Joy93] A. Joyal, R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. Math. **102** (1993).

[Mac98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998, Second edition.

[Mal01] G. Maltsiniotis, *Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck)*, prépublication, 2001.

[Mal05a] ———, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, vol. 301, Soc. Math. France, 2005.

[Mal05b] ———, *Structures d'asphéricité*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **12** (2005), no. 1, 1–39.

[Qui67] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[Qui73] ———, *Higher algebraic K-theory*, Higher K-theories I, Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85–147.

[Tab08] G. Tabuada, *Higher K-theory via universal invariants*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 1, 121–206.

[Tho79] R. Thomason, *Homotopy colimits in the category of small categories*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85** (1979), 91–109.

[Tho80] ———, *$\mathcal{C}at$ as a closed model category*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques **XXI-3** (1980), 305–324.

LAGA, CNRS (UMR 7539)
Université Paris 13
Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse, France
Email: `cisinski@math.univ-paris13.fr`

This article may be accessed at `http://www.tac.mta.ca/tac/` or by anonymous ftp at `ftp://ftp.tac.mta.ca/pub/tac/html/volumes/20/17/20-17.{dvi,ps,pdf}`