*Theory and Applications of Categories,* Vol. 28, No. 19, 2013, pp. 552–576.

# SUR LES TYPES D'HOMOTOPIE MODÉLISÉS PAR LES $\infty$-GROUPOÏDES STRICTS

*À la mémoire de Jean-Louis Loday*

DIMITRI ARA

Résumé. L'objet de ce texte est l'étude de la classe des types d'homotopie qui sont modélisés par les $\infty$-groupoïdes stricts. Nous démontrons que la catégorie homotopique des $\infty$-groupoïdes stricts simplement connexes est équivalente à la catégorie dérivée en degré homologique $d \geq 2$ des groupes abéliens. Nous en déduisons que les types d'homotopie simplement connexes modélisés par les $\infty$-groupoïdes stricts sont exactement les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Nous étudions également brièvement le cas des 3-catégories avec des inverses faibles. Nous terminons par deux questions autour du problème suggéré par le titre de ce texte.

Abstract. The purpose of this text is the study of the class of homotopy types which are modelized by strict $\infty$-groupoids. We show that the homotopy category of simply connected strict $\infty$-groupoids is equivalent to the derived category in homological degree $d \geq 2$ of abelian groups. We deduce that the simply connected homotopy types modelized by strict $\infty$-groupoids are precisely the products of Eilenberg-Mac Lane spaces. We also briefly study 3-categories with weak inverses. We finish by two questions about the problem suggested by the title of this text.

## Introduction

Dans *Pursuing Stacks* ([12]), Grothendieck propose de généraliser le fait classique suivant : le foncteur groupoïde fondamental $\Pi_1 : \mathcal{T}op \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$, de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupoïdes, induit une équivalence de catégories $\overline{\Pi_1} : \mathsf{Hot}_1 \to \mathrm{Ho}(\mathcal{G}\mathrm{pd})$ entre la catégorie des 1-types d'homotopie et la localisation de la catégorie des groupoïdes par les équivalences de groupoïdes. Il conjecture l'existence d'une structure algébrique de $\infty$-groupoïdes (faibles) et d'un foncteur $\infty$-groupoïde fondamental qui induirait une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique $\mathsf{Hot}$ et une localisation de la catégorie des $\infty$-groupoïdes (faibles) (voir [2] pour un énoncé précis de cette conjecture).

Grothendieck est conscient du fait que les $\infty$-groupoïdes stricts ne permettent pas de réaliser cette équivalence de catégories. En effet, il lui apparaît comme évident le fait

Received by the editors 2012-09-24 and, in revised form, 2013-07-16.

Transmitted by Clemens Berger. Published on 2013-07-21.

2010 Mathematics Subject Classification: 18B40, **18D05**, 18E30, **18E35**, 18G35, **18G55**, 55P10, **55P15**, 55Q05, 55U15, 55U25, 55U35.

Key words and phrases: strict $\infty$-groupoid, homotopy type, chain complex, homotopy category, Eilenberg-Mac Lane space.

que les types d'homotopie simplement connexes modélisés par ceux-ci sont exactement les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane : « At first sight it had seemed to me that the Bangor group had indeed come to work out (quite independently) one basic intuition of the program I had envisioned in those letters to Larry Breen. [...] But finally it appears this is not so, they have been working throughout with a notion of $\infty$-groupoid too restrictive for the purposes I had in mind (probably because they insist I guess on strict associativity of compositions, rather than associativity up to a (given) isomorphism (or rather, homotopy) — to the effect that the simply connected homotopy types they obtain are merely products of Eilenberg-Mac Lane spaces. »

Ce résultat apparaît huit ans plus tard dans [9], où il est attribué à Loday. (Le résultat est exprimé en termes de complexes croisés mais ceux-ci sont équivalents aux $\infty$-groupoïdes stricts par [8].)

Dans ce texte, qui est essentiellement un remaniement du premier chapitre de la thèse [1] de l'auteur, nous présentons une preuve élémentaire de ce résultat, sans doute plus proche de celle que Grothendieck avait en tête. Voici comment s'articule cette preuve. L'argument de Eckmann-Hilton montre qu'un $\infty$-groupoïde strict avec un unique objet et une unique 1-flèche (on dira qu'un tel $\infty$-groupoïde est 1-réduit) est canoniquement un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens. Par un théorème de Bourn ([6]), la donnée d'un tel $\infty$-groupoïde est équivalente à celle d'un complexe de groupes abéliens en degré homologique $d \geq 2$. On en déduit facilement que la catégorie homotopique des $\infty$-groupoïdes stricts 1-réduits est canoniquement équivalente à la catégorie dérivée $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ des groupes abéliens en degré homologique $d \geq 2$. En utilisant un résultat classique sur les catégories dérivées, on obtient que tout $\infty$-groupoïde strict 1-réduit est faiblement équivalent à un produit de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane. Puisque tout $\infty$-groupoïde simplement connexe est faiblement équivalent à un $\infty$-groupoïde strict 1-réduit, on obtient facilement que tout foncteur de réalisation topologique raisonnable envoie un $\infty$-groupoïde strict simplement connexe sur un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

En fait, nous obtenons un résultat plus précis. La catégorie homotopique des $\infty$-groupoïdes simplement connexes est canoniquement équivalente à la catégorie dérivée $\mathcal{D}_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$. Ce résultat est une conséquence facile des considérations précédentes et de l'existence de la structure de catégorie de modèles de Brown-Golasiński sur la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts (voir [7] et [4]). Nous avons pris soin de marquer clairement les résultats qui utilisent cette structure afin d'insister sur le fait que le résultat principal n'en dépend pas.

Une brève section de ce texte est consacrée aux $\infty$-groupoïdes quasi-stricts, c'est-à-dire aux $\infty$-catégories admettant des inverses faibles. Cette notion a été introduite par Kapranov et Voedvosky dans [16]. Les deux auteurs étaient convaincus que les $\infty$-groupoïdes quasi-stricts modélisaient les types d'homotopie. Il n'en est en fait rien, comme l'a démontré Simpson dans [22] (voir également le chapitre 4 de [23]). Nous exposons dans ce texte un argument alternatif. Nous montrons qu'il résulte de considérations bien connues que tout 3-groupoïde quasi-strict est faiblement équivalent, *via* un pseudo-foncteur, à un 3-groupoïde strict, et donc que les 3-types d'homotopie simplement connexes modélisés par les 3-groupoïdes stricts, ou quasi-stricts, sont les mêmes. On retrouve ainsi le résultat de Simpson, à savoir que le 3-type de la sphère de dimension 2 n'est pas modélisé par un 3-groupoïde quasi-strict.

Nous insistons sur le fait que ce texte ne répond pas à la question suggérée par son titre. En effet, la détermination de la classe des types d'homotopie modélisés par les $\infty$-groupoïdes stricts reste à notre connaissance ouverte. Il en est de même de la question analogue pour les $\infty$-groupoïdes quasi-stricts. En particulier, il n'est pas à notre connaissance connu si ceux-ci modélisent strictement plus de types d'homotopie que les $\infty$-groupoïdes stricts.

Notre texte est organisé de la manière suivante. Dans la première section, nous rappelons la définition de $\infty$-groupoïde strict et fixons la terminologie. Dans la seconde section, nous définissons les groupes d'homotopie des $\infty$-groupoïdes stricts, ainsi que leurs équivalences faibles. Nous donnons différentes caractérisations de ces équivalences faibles. La troisième section est consacrée à la catégorie homotopique. On y définit notamment les notions de type d'homotopie et de $n$-type d'homotopie. La quatrième section est le cœur de ce texte. On y démontre, selon la stratégie exposée ci-dessus, que la catégorie homotopique des $\infty$-groupoïdes simplement connexes est canoniquement équivalente à la catégorie dérivée $\mathcal{D}_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$. On définit une notion de $\infty$-groupoïde d'Eilenberg-Mac Lane et on montre que tout $\infty$-groupoïde simplement connexe est faiblement équivalent à un produit de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane. Dans la cinquième section, on définit une notion de foncteur de réalisation de Simpson et on démontre que les types d'homotopie simplement connexes modélisés par les $\infty$-groupoïdes stricts, *via* un tel foncteur de réalisation, sont exactement les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. On en déduit qu'aucune sphère de dimension $n \geq 2$ n'est modélisée par un $\infty$-groupoïde strict. Dans la sixième section, on définit les $\infty$-groupoïdes quasi-stricts. On explique qu'il résulte de considérations bien connues que tout 3-groupoïde quasi-strict est faiblement équivalent, *via* un pseudo-foncteur, à un 3-groupoïde strict, et donc que les 3-types d'homotopie simplement connexes modélisés par les 3-groupoïdes stricts, ou quasi-stricts, sont les mêmes. Enfin, dans la dernière section, nous détaillons les deux questions exposées ci-dessus.

## 1. $\infty$-groupoïdes stricts

1.1. La catégorie des globes $\mathbb{G}$ est la catégorie engendrée par le graphe

$$\mathrm{D}_0 \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{D}_1 \underset{\tau_2}{\overset{\sigma_2}{\rightrightarrows}} \cdots \underset{\tau_{i-1}}{\overset{\sigma_{i-1}}{\rightrightarrows}} \mathrm{D}_{i-1} \underset{\tau_i}{\overset{\sigma_i}{\rightrightarrows}} \mathrm{D}_i \underset{\tau_{i+1}}{\overset{\sigma_{i+1}}{\rightrightarrows}} \cdots$$

soumis aux relations coglobulaires

$$\sigma_{i+1}\sigma_i = \tau_{i+1}\sigma_i \quad \text{et} \quad \sigma_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i, \qquad i \geq 1.$$

La catégorie des $\infty$-*graphes* ou *ensembles globulaires* est la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbb{G}$. Si $X$ est un $\infty$-graphe, on notera $X_n$ l'ensemble $X(\mathrm{D}_n)$ et $s_i$ (resp. $t_i$) l'application

$X(\sigma_i)$ (resp. $X(\tau_i)$). Ainsi, la donnée de $X$ équivaut à celle d'un diagramme d'ensembles

$$\cdots \overset{s_{n+1}}{\underset{t_{n+1}}{\rightrightarrows}} X_n \overset{s_n}{\underset{t_n}{\rightrightarrows}} X_{n-1} \overset{s_{n-1}}{\underset{t_{n-1}}{\rightrightarrows}} \cdots \overset{s_2}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} X_1 \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} X_0$$

soumis aux relations globulaires

$$s_i s_{i+1} = s_i t_{i+1} \quad \text{et} \quad t_i s_{i+1} = t_i t_{i+1}, \qquad i \geq 1.$$

Si $X$ est un $\infty$-graphe et $i, j$ sont deux entiers tels que $i \geq j \geq 0$, on définit des applications $s^i_j, t^i_j : X_i \to X_j$ en posant

$$s^i_j = s_{j+1} \cdots s_{i-1} s_i \quad \text{et} \quad t^i_j = t_{j+1} \cdots t_{i-1} t_i.$$

Si $X$ est un $\infty$-graphe et $n$ est un entier positif, on appellera $X_n$ l'ensemble des *$n$-flèches* de $X$. Si $n = 0$, on appellera également $X_0$ l'ensemble des *objets* de $X$. Si $u$ est une $n$-flèche pour $n \geq 1$, on appellera *source* (resp. *but*) de $u$, la $(n-1)$-flèche $s_n(u)$ (resp. $t_n(u)$). Pour indiquer qu'une flèche $u$ a pour source $x$ et pour but $y$, on écrira $u : x \to y$. On dira que deux $n$-flèches $u$ et $v$ sont *parallèles* si, ou bien $n = 0$, ou bien $n \geq 1$ et $u, v$ ont même source et même but.

1.2. Soient $X$ un $\infty$-graphe, $k$ un entier strictement positif et $i_1, \dots, i_k$, $j_1, \dots, j_{k-1}$ des entiers positifs satisfaisant

$$j_l < i_l \quad \text{et} \quad j_l < i_{l+1}, \quad \text{pour } 1 \leq l \leq k-1.$$

On notera

$$X_{i_1} \times_{X_{j_1}} X_{i_2} \times_{X_{j_2}} \cdots \times_{X_{j_{k-1}}} X_{i_k}$$

la limite projective du diagramme d'ensembles

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X_{i_1} \arrow[dr, "s^{i_1}_{j_1}"'] & & X_{i_2} \arrow[dl, "t^{i_2}_{j_1}"] \arrow[dr, "s^{i_2}_{j_2}"'] & & \cdots & & X_{i_k} \arrow[dl, "t^{i_k}_{j_{k-1}}"] \\
& X_{j_1} & & X_{j_2} & \cdots & X_{j_{k-1}} &
\end{tikzcd} .$$

1.3. Une *$\infty$-précatégorie* est un $\infty$-graphe $X$ muni d'applications

$$\begin{aligned} *^i_j &: X_i \times_{X_j} X_i \to X_i, \quad \text{pour } i > j \geq 0, \\ k_i &: X_i \to X_{i+1}, \quad \text{pour } i \geq 0, \end{aligned}$$

vérifiant les relations suivantes :

– pour tout couple $(v, u)$ dans $X_i \times_{X_j} X_i$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$s_i(v *^i_j u) = \begin{cases} s_i(u), & \text{si } j = i-1 \\ s_i(v) *^{i-1}_j s_i(u), & \text{si } j < i-1 \end{cases};$$

– pour tout couple $(v,u)$ dans $X_i \times_{X_j} X_i$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$t_i(v *_j^i u) = \begin{cases} t_i(v), & \text{si } j = i-1 \\ t_i(v) *_j^{i-1} t_i(u), & \text{si } j < i-1 \end{cases};$$

– pour tout $u$ dans $X_i$ avec $i \geq 0$, on a

$$s_{i+1}k_i(u) = u = t_{i+1}k_i(u).$$

Pour $i$ et $j$ deux entiers tels que $i \geq j \geq 0$, on notera

$$k_i^j = k_{i-1} \cdots k_{j+1}k_j.$$

Un *morphisme de $\infty$-précatégories* est un morphisme de $\infty$-graphes qui respecte les applications $*_i^j$ et $k_i$.

Une $\infty$-précatégorie $X$ est une *$\infty$-catégorie stricte* si elle satisfait en outre les axiomes suivants :

– Associativité
pour tout triplet $(w,v,u)$ dans $X_i \times_{X_j} X_i \times_{X_j} X_i$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$(w *_j^i v) *_j^i u = w *_j^i (v *_j^i u)\,;$$

– Loi d'échange
pour tout quadruplet $(\delta,\gamma,\beta,\alpha)$ dans

$$X_i \times_{X_j} X_i \times_{X_k} X_i \times_{X_j} X_i,$$

avec $i > j > k \geq 0$, on a

$$(\delta *_j^i \gamma) *_k^i (\beta *_j^i \alpha) = (\delta *_k^i \beta) *_j^i (\gamma *_k^i \alpha)\,;$$

– Identités
pour tout $u$ dans $X_i$ avec $i \geq 1$ et tout $j$ tel que $i > j \geq 0$, on a

$$u *_j^i k_i^j s_j^i(u) = u = k_i^j t_j^i(u) *_j^i u\,;$$

– Fonctorialité des identités
pour tout couple $(v,u)$ dans $X_i \times_{X_j} X_i$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$k_i(v *_j^i u) = k_i(v) *_j^{i+1} k_i(u).$$

On notera $\infty$-$\mathcal{C}$at la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\infty$-précatégories dont les objets sont les $\infty$-catégories strictes.

1.4. Soient $C$ une $\infty$-catégorie stricte, $u$ une $i$-flèche pour $i \geq 1$ et $j$ un entier tel que $0 \leq j < i$. On dit que $u$ *admet un* $*^i_j$*-inverse* s'il existe une $i$-flèche $v$ telle que

$$s^i_j(v) = t^i_j(u), \quad t^i_j(v) = s^i_j(u), \quad u *^i_j v = k^j_i(t^i_j(u)) \quad \text{et} \quad v *^i_j u = k^j_i(s^i_j(u)).$$

Le même argument qu'en théorie des groupes montre que si un tel $v$ existe, il est unique. On appelle alors $v$ le $*^i_j$*-inverse* de $u$. Le $*^i_{i-1}$-inverse de $u$ (s'il existe) sera noté $u^{-1}$.

On dit qu'une $\infty$-catégorie stricte $C$ est un $\infty$*-groupoïde strict* si pour tous entiers $i, j$ tels que $0 \leq j < i$, toute $i$-flèche de $C$ admet un $*^i_j$-inverse. On notera $\infty$-$\mathcal{G}$pd la sous-catégorie pleine de $\infty$-$\mathcal{C}$at dont les objets sont les $\infty$-groupoïdes stricts.

1.5. Proposition. *Soit $C$ une $\infty$-catégorie stricte. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$C$ est un $\infty$-groupoïde strict ;*
2. *$C$ admet des $*^i_{i-1}$-inverses pour tout $i \geq 1$ ;*
3. *$C$ admet des $*^i_0$-inverses pour tout $i \geq 1$ ;*
4. *pour tout $i \geq 1$, il existe un entier $j$ tel que $0 \leq j < i$ pour lequel $C$ admet des $*^i_j$-inverses.*

Démonstration. Les implications $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$, $2 \Rightarrow 4$ et $3 \Rightarrow 4$ sont évidentes. Il s'agit donc de montrer l'implication $4 \Rightarrow 1$. Supposons 4 et fixons deux entiers $i$ et $j$ tels que $0 \leq j < i$. Nous allons montrer que $C$ admet des $*^i_j$-inverses par récurrence sur $i$. D'après 4, il existe un entier $k$ tel que $0 \leq k < i$ pour lequel $C$ admet des $*^i_k$-inverses. On distingue trois cas :

- si $k = j$ (c'est nécessairement le cas si $i = 1$), alors C admet bien des $*^i_j$-inverses ;
- si $k < j$, alors C admet des $*^j_k$-inverses d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $j < i$ ;
- si $k > j$, alors C admet des $*^k_j$-inverses d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $k < i$.

Pour conclure dans les deux derniers cas, il suffit de montrer que pour tous $i > j > k \geq 0$, si $C$ admet des $*^j_k$-inverses, alors $C$ admet des $*^i_k$-inverses si et seulement si $C$ admet des $*^i_j$-inverses. En utilisant le fait que le 2-graphe

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, shift left, "s^i_j"] \arrow[r, shift right, "t^i_j"'] & C_j \arrow[r, shift left, "s^j_k"] \arrow[r, shift right, "t^j_k"'] & C_k \end{tikzcd}$$

est naturellement muni d'une structure de 2-catégorie stricte, on se ramène au cas $k = 0$, $j = 1$ et $i = 2$. Le résultat est alors une conséquence du lemme suivant. ∎

1.6. Lemme. *Soit $C$ une 2-catégorie stricte dont les 1-flèches sont inversibles. Alors une 2-flèches de $C$ est inversible pour la composition horizontale (c'est-à-dire $*^2_0$) si et seulement si elle est inversible pour la composition verticale (c'est-à-dire $*^2_1$).*

Démonstration. Soit $\alpha : u \to v$ une 2-flèche de $C$. Si $\alpha$ admet un inverse $\alpha^*$ pour la composition horizontale, alors on vérifie immédiatement que $v *_0 \alpha^* *_0 u$ est un inverse pour la composition verticale. Réciproquement, si $\alpha$ admet un inverse $\alpha^{-1}$ pour la composition verticale, alors $v^{-1} *_0 \alpha^{-1} *_0 u^{-1}$ est un inverse pour la composition horizontale. ∎

## 2. Équivalences faibles de $\infty$-groupoïdes stricts

2.1. Soient $G$ un $\infty$-groupoïde strict et $u, v$ deux $n$-flèches pour $n \geq 0$. Une homotopie de $u$ vers $v$ est une $(n+1)$-flèche $u \to v$. Si une telle homotopie existe, on dira que $u$ est homotope à $v$ et on écrira $u \sim_n v$. Par définition, si $u$ est homotope à $v$, alors $u$ et $v$ sont parallèles.

2.2. Lemme. *Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict. Pour tout $n \geq 0$, la relation $\sim_n$ est une relation d'équivalence. De plus, si $n \geq 1$, cette relation est compatible avec la composition $*^n_{n-1}$.*

Démonstration. Soit $u$ une $n$-flèche de $G$. La $(n+1)$-flèche $k_n(u)$ est une homotopie de $u$ vers $u$. La relation $\sim_n$ est donc réflexive.

Soit maintenant $v$ une deuxième $n$-flèche de $G$ et soit $h : u \to v$ une homotopie. La $(n+1)$-flèche $h^{-1}$ est une homotopie de $v$ vers $u$. La relation $\sim_n$ est donc symétrique.

Soit maintenant $w$ une troisième $n$-flèche de $G$ et $k : v \to w$ une deuxième homotopie. La $(n+1)$-flèche $k *^{n+1}_n h$ est une homotopie de $u$ vers $w$. La relation $\sim_n$ est donc transitive.

Enfin, soit

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "u"{name=U}] \arrow[r, bend right, "u'"'{name=U2}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=U2, "h"] & \bullet \arrow[r, bend left, "v"{name=V}] \arrow[r, bend right, "v'"'{name=V2}] \arrow[Rightarrow, from=V, to=V2, "k"] & \bullet \end{tikzcd}$$

un diagramme dans $G$, où les flèches simples sont des $n$-flèches avec $n \geq 1$ et les flèches doubles sont des $(n+1)$-flèches. La $(n+1)$-flèche $k *^{n+1}_{n-1} h$ est une homotopie de $v *^{n+1}_n u$ vers $v' *^{n+1}_n u'$. La relation $\sim_n$ est donc compatible avec la composition $*^n_{n-1}$. ∎

2.3. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict. Pour $n \geq 0$, on notera $\overline{G_n}$ le quotient de $G_n$ par la relation d'équivalence $\sim_n$.

Fixons maintenant $n \geq 1$. Les applications

$$s_n, t_n : G_n \to G_{n-1}, \quad k_{n-1} : G_{n-1} \to G_n,$$

induisent des applications

$$s_n, t_n : \overline{G_n} \to G_{n-1}, \quad k_{n-1} : G_{n-1} \to \overline{G_n}.$$

De plus, par le lemme ci-dessus, l'application

$$*^n_{n-1} : G_n \times_{G_{n-1}} G_n \to G_n$$

induit une application

$$*^n_{n-1} : \overline{G_n} \times_{G_{n-1}} \overline{G_n} \to \overline{G_n}.$$

Il est immédiat que le graphe

$$\overline{G_n} \overset{s_n}{\underset{t_n}{\rightrightarrows}} G_{n-1},$$

muni des applications

$$*^n_{n-1} : \overline{G_n} \times_{G_{n-1}} \overline{G_n} \to \overline{G_n} \quad \text{et} \quad k_{n-1} : G_{n-1} \to \overline{G_n}$$

définit un groupoïde. Nous noterons $\varpi_n(G)$ ce groupoïde.

On vérifie facilement que $\varpi_n$ définit un foncteur de la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts vers la catégorie des groupoïdes.

2.4. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict. L'ensemble des *composantes connexes* de $G$ est l'ensemble

$$\pi_0(G) = \pi_0(\varpi_1(G)) = \overline{G_0}.$$

Soient $n \geq 1$ et $u, v$ deux $(n-1)$-flèches parallèles de $G$. On notera

$$\pi_n(G, u, v) = \mathsf{Hom}_{\varpi_n(G)}(u, v) \quad \text{et} \quad \pi_n(G, u) = \pi_n(G, u, u).$$

La composition de $\varpi_n(G)$ induit une structure de groupe sur $\pi_n(G, u)$.

Si $n \geq 1$ et $x$ est un objet de $G$, le *n-ième groupe d'homotopie* de $(G, x)$ est le groupe

$$\pi_n(G, x) = \pi_n(G, k^0_{n-1}(x)).$$

L'argument de Eckmann-Hilton montre que ce groupe est abélien dès que $n \geq 2$.

On déduit de la fonctorialité de $\varpi_n$ que :
- $\pi_0$ définit un foncteur de la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts vers la catégorie des ensembles ;
- pour $n \geq 1$, $\pi_n$ définit un foncteur de la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts munis d'une $(n-1)$-flèche (ou d'un objet) vers la catégorie des groupes.

2.5. Soit $f : G \to H$ un morphisme de $\infty$-groupoïdes stricts. On dira que $f$ est une *équivalence faible de $\infty$-groupoïdes stricts* si
- l'application $\pi_0(f) : \pi_0(G) \to \pi_0(H)$ est une bijection ;
- pour tout $n \geq 1$ et tout objet $x$ de $G$, le morphisme $\pi_n(f, x) : \pi_n(G, x) \to \pi_n(H, f(x))$ est un isomorphisme.

2.6. PROPOSITION. *Soit $f : G \to H$ un morphisme de $\infty$-groupoïdes stricts. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1. *$f$ est une équivalence faible ;*
2. *l'application $\pi_0(f) : \pi_0(G) \to \pi_0(H)$ est une bijection, et pour tout $n \geq 1$ et toute $(n-1)$-flèche $u$ de $G$, le morphisme $f$ induit un isomorphisme*

$$\pi_n(G, u) \to \pi_n(H, f(u))\,;$$

3. *le foncteur $\varpi_1(f) : \varpi_1(G) \to \varpi_1(H)$ est une équivalence de catégories, et pour tout $n \geq 2$ et tout couple $(u, v)$ de $(n-1)$-flèches parallèles de $G$, le morphisme $f$ induit une bijection*
$$\pi_n(G, u, v) \to \pi_n(H, f(u), f(v))\,;$$
4. *le foncteur $\varpi_1(f) : \varpi_1(G) \to \varpi_1(H)$ est plein et essentiellement surjectif, et pour tout $n \geq 2$ et tout couple $(u, v)$ de $(n-1)$-flèches parallèles de $G$, le morphisme $f$ induit une surjection*
$$\pi_n(G, u, v) \to \pi_n(H, f(u), f(v)).$$

Démonstration. L'implication $2 \Rightarrow 1$ est évidente. Montrons la réciproque. Le cas $n = 1$ est évident. Soient $n \geq 2$ et $u$ une $(n-1)$-flèche de $G$. Posons $x = s_0^{n-1}(u)$. On définit un isomorphisme
$$\pi_n(G, x) \to \pi_n(G, u)$$
en envoyant une $n$-flèche $v : k_{n-1}^0(x) \to k_{n-1}^0(x)$ sur la $n$-flèche $k_{n-1}(u) *_0^n v : u \to u$. Il est immédiat que le morphisme $f$ commute à cet isomorphisme, c'est-à-dire que le carré
$$\begin{tikzcd}
\pi_n(G, x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(G, u) \arrow[d] \\
\pi_n(H, f(x)) \arrow[r] & \pi_n(H, f(u))
\end{tikzcd}$$
est commutatif. Le morphisme $\pi_n(G, u) \to \pi_n(H, f(u))$ est donc un isomorphisme.

L'implication $3 \Rightarrow 2$ est évidente. Montrons la réciproque. Soient $n \geq 1$ et $u, v$ deux $(n-1)$-flèches parallèles de $G$. Supposons qu'il existe une $n$-flèche $\alpha : u \to v$ dans $G$. On définit alors une bijection
$$\pi_n(G, u) \to \pi_n(G, u, v)$$
en envoyant une $n$-flèche $\beta : u \to u$ sur la $n$-flèche $\alpha *_{n-1}^n \beta : u \to v$. Il est immédiat que le morphisme $f$ commute à cette bijection, c'est-à-dire que le carré
$$\begin{tikzcd}
\pi_n(G, u) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(G, u, v) \arrow[d] \\
\pi_n(H, f(u))) \arrow[r] & \pi_n(H, f(u), f(v))
\end{tikzcd}$$
est commutatif. Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que s'il existe une $n$-flèche $f(u) \to f(v)$ dans $H$, alors il existe une $n$-flèche $u \to v$ dans $G$. C'est clair pour $n = 1$ par injectivité de $\pi_0(f)$. Soit donc $n \geq 2$ et $\beta : f(u) \to f(v)$ une $n$-flèche de $H$. Posons $x = s_{n-1}(u)$. La $n$-flèche $k_{n-1}(f(u)^{-1}) *_{n-2}^n \beta$ de $H$ a pour source $f(u)^{-1} *_{n-2}^{n-1} f(u) : f(x) \to f(x)$ et pour but $f(u)^{-1} *_{n-2}^{n-1} f(v) : f(x) \to f(x)$. Puisque l'application
$$\pi_{n-1}(G, x) \to \pi_{n-1}(H, f(x))$$
est injective, les deux $(n-1)$-flèches $u^{-1} *_{n-2}^{n-1} u$ et $u^{-1} *_{n-2}^{n-1} v$ sont égales dans $\pi_{n-1}(G, x)$. Puisque $\varpi_{n-1}(G)$ est un groupoïde, cela entraîne que $u = v$ dans $\pi_{n-1}(G, x, y)$ et donc qu'il existe une $n$-flèche de $G$ de $u$ vers $v$.

L'implication 3 $\Rightarrow$ 4 est évidente. Montrons la réciproque. Soient $n \geq 1$, $u, v$ deux $(n-1)$-flèches parallèles de $G$ et $\alpha, \beta$ deux $n$-flèches de $u$ vers $v$. Supposons qu'on ait $f(\alpha) = f(\beta)$ dans $\pi_n(H, f(u), f(v))$. Il existe alors une $(n+1)$-flèche de $H$ de $f(\alpha)$ vers $f(\beta)$. Par surjectivité de l'application

$$\pi_{n+1}(G, \alpha, \beta) \to \pi_{n+1}(H, f(\alpha), f(\beta)),$$

il existe une $(n+1)$-flèche de $G$ de $\alpha$ vers $\beta$. D'où $\alpha = \beta$ dans $\pi_n(G, u, v)$. ∎

2.7. Remarque. La dernière condition se reformule en la conjonction des propriétés suivantes :

- pour tout objet $y$ de $H$, il existe un objet $x$ de $G$ tel que $f(x)$ et $y$ soient homotopes ;
- pour tout entier $n \geq 0$, tout couple $(u, v)$ de $n$-flèches parallèles de $G$ et toute $(n+1)$-flèche $\beta : f(u) \to f(v)$ de $H$, il existe une $(n+1)$-flèche $\alpha : u \to v$ de $G$ telle que $f(\alpha)$ soit homotope à $\beta$.

C'est exactement la notion d'équivalence faible de $\infty$-catégories strictes exposée dans [18], restreinte aux $\infty$-groupoïdes stricts.

## 3. La catégorie homotopique

3.1. Un *localisateur* est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$ et d'une classe de flèches $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}$. On notera $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ un tel localisateur et on appellera $\mathcal{W}$ la classe des *équivalences faibles*.

La donnée d'un localisateur est suffisante pour définir les notions importantes homotopique, de limites homotopiques et de foncteurs dérivés).

Si $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ est un localisateur, la *catégorie homotopique* de $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ est la localisation de Gabriel-Zisman de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{W}$, c'est-à-dire la catégorie obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en inversant formellement les flèches de $\mathcal{W}$. On notera cette catégorie $\mathrm{Ho}_{\mathcal{W}}(\mathcal{C})$ ou $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ si le contexte rend claire la classe $\mathcal{W}$.

*A priori*, l'existence de la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ nécessite un changement d'univers (au sens de Grothendieck). Cependant, dans tous les exemples que nous considèrerons, la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ existera sans changement d'univers.

3.2. Exemples.

1. Soient $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$ la catégorie des espaces topologiques et $\mathcal{W}_\infty$ la classe des équivalences faibles topologiques, c'est-à-dire des applications continues $f : X \to Y$ vérifiant les propriétés suivantes :

- l'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection ;
- pour tout $x$ dans $X$ et tout $i \geq 1$, le morphisme $\pi_i(f, x) : \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(x))$ est un isomorphisme.

La *catégorie homotopique* $\mathsf{Hot}$ est la catégorie $\mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_\infty}(\mathcal{T}op)$. Un *type d'homotopie* est un objet de $\mathsf{Hot}$ à isomorphisme canonique près.

2. Fixons un entier $n \geq 0$. Soient $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$ et $\mathcal{W}_n$ la classe des $n$-équivalences faibles topologiques, c'est-à-dire des applications continues $f : X \to Y$ vérifiant les propriétés suivantes :

– l'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection ;
– pour tout $x$ dans $X$ et tout $i$ tel que $1 \leq i \leq n$, le morphisme de groupes $\pi_i(f,x)$ : $\pi_i(X,x) \to \pi_i(Y, f(x))$ est un isomorphisme.

La *catégorie des $n$-types d'homotopie* $\mathsf{Hot}_n$ est la catégorie $\mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_n}(\mathcal{T}op)$. Un *$n$-type d'homotopie* est un objet de $\mathsf{Hot}$ à isomorphisme canonique près.

3. Soit $n \geq 0$. Notons $\mathcal{T}op_{\leq n}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}op$ constituée des espaces topologiques possédant la propriété suivante : pour tout $i > n$ et tout $x$ dans $X$, le groupe $\pi_i(X,x)$ est trivial. Cette catégorie sera munie dans la suite des équivalences faibles topologiques (qui coïncide évidemment avec les $n$-équivalences faibles)

4. La catégorie $\mathsf{CW}$ des CW-complexes sera dans la suite munie des équivalences d'homotopie entre CW-complexes (qui sont également les équivalences faibles topologiques entre CW-complexes par un théorème de Whitehead).

5. La catégorie $\widehat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux sera dans la suite munie des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux, c'est-à-dire des morphismes d'ensembles simpliciaux qui s'envoient *via* le foncteur réalisation géométrique $|\cdot|$ sur une équivalence d'homotopie entre CW-complexes.

6. La catégorie $\mathcal{C}\mathrm{at}$ des petites catégories sera dans la suite munie des équivalences faibles de catégories, c'est-à-dire des foncteurs s'envoyant *via* le foncteur nerf $N$ sur une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

7. La catégorie $\infty$-$\mathcal{G}\mathrm{pd}$ des $\infty$-groupoïdes stricts sera dans la suite munie des équivalences faibles de $\infty$-groupoïdes stricts (qui ont été définies dans la section précédente).

8. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $k$ dans $\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$. On notera $C_{\geq k}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes homologiques d'objets de $\mathcal{A}$ en degré supérieur ou égal à $k$. Cette catégorie sera munie dans la suite des quasi-isomorphismes, c'est-à-dire des morphismes de complexes induisant des isomorphismes en homologie.

La catégorie $\mathrm{Ho}(C_{\geq k}(\mathcal{A}))$ n'est rien d'autre que la catégorie dérivée $D_{\geq k}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

3.3. Theorème. *La chaîne de foncteurs*

$$\mathcal{C}\mathrm{at} \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{|\cdot|} \mathsf{CW} \hookrightarrow \mathcal{T}op$$

*induit une chaîne d'équivalences de catégories*

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}\mathrm{at}) \xrightarrow{\overline{N}} \mathrm{Ho}(\widehat{\Delta}) \xrightarrow{\overline{|\cdot|}} \mathrm{Ho}(\mathsf{CW}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{T}op) = \mathsf{Hot}.$$

Démonstration. Voir le corollaire 3.3.1 du chapitre VI de [14] pour $\overline{N}$. Pour les deux autres foncteurs, voir [21] ou le chapitre VII de [10]. ∎

3.4. Remarque. Par le théorème précédent, on dispose donc de quatre définitions équivalentes de $\mathsf{Hot}$. De même, un théorème similaire donne quatre définitions équivalentes de $\mathsf{Hot}_n$. Le choix des définitions utilisant $\mathcal{C}\mathrm{at}$ est à la base de la théorie des catégories test de Grothendieck exposée dans [12] et [20].

3.5. Les propriétés universelles de $\mathsf{Hot}$ et $\mathsf{Hot}_n$ entraînent l'existence d'un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(\mathcal{T}op_{\leq n}) \arrow[rr, "I"] \arrow[dr, "J"'] & & \mathsf{Hot} \arrow[dl, "K"] \\
& \mathsf{Hot}_n &
\end{tikzcd} .$$

Des résultats classiques de la théorie de l'homotopie montrent que $I$ est pleinement fidèle et que $J$ est une équivalence de catégories. Ainsi, on peut identifier la catégorie $\mathsf{Hot}_n$ à la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Hot}$ dont les objets proviennent de $\mathcal{T}op_{\leq n}$.

Si $X$ est un type d'homotopie, on appellera $K(X)$ le *$n$-type d'homotopie associé à $X$*. On pourra le voir comme un objet de $\mathsf{Hot}$ *via* l'identification que l'on vient de décrire.

## 4. La catégorie homotopique des $\infty$-groupoïdes stricts simplement connexes

4.1. On dira qu'un $\infty$-groupoïde strict $G$ est *0-connexe* s'il a exactement une composante connexe. On dira que $G$ est *simplement connexe* s'il est 0-connexe et si pour tout objet $x$ de $G$, le groupe $\pi_1(G, x)$ est trivial. On notera $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{sc}}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}$ formée des $\infty$-groupoïdes simplement connexes.

Soit $k$ un entier positif. On dira qu'un $\infty$-groupoïde strict $G$ est *$k$-réduit* si pour tout $l \leq k$, $G$ possède une unique $l$-flèche. On notera $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq k+1}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}$ dont les objets sont les $\infty$-groupoïdes $k$-réduits.

4.2. Proposition. *Pour tout $\infty$-groupoïde strict simplement connexe $G$, il existe un $\infty$-groupoïde strict 1-réduit $G'$ et une équivalence faible de $G'$ vers $G$. En particulier, le foncteur* $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}) \to \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{sc}})$*, induit par le foncteur d'inclusion de* $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$ *dans* $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{sc}}$*, est essentiellement surjectif.*

Démonstration. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict simplement connexe. Le choix d'un objet de $x$ de $G$ détermine un sous-$\infty$-groupoïde $G'$ de $G$ défini de la manière suivante : $G'_0 = \{x\}$, $G'_1 = \{k^0_1(x)\}$ et pour $n \geq 2$, $G'_n$ est l'ensemble des $n$-flèches $f$ de $G$ telles qu'on ait $s^n_1(f) = k^0_1(x) = t^n_1(f)$. L'inclusion $G' \to G$ est clairement une équivalence faible. ■

4.3. Remarque. Le foncteur $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}) \to \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{sc}})$ est en fait une équivalence de catégories. Par la proposition précédente, il suffit de montrer que ce foncteur est pleinement fidèle. Cela résulte de l'existence de la structure de catégorie de modèles de Brown-Golasiński sur $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}$ (voir [7] et [4]) et du fait que les sous-catégories $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$ et $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{sc}}$ admettent des remplacements cofibrants et fibrants pour cette structure.

4.4. On notera $\mathsf{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens et $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts en groupes abéliens, c'est-à-dire des objets $\infty$-groupoïdes stricts dans la catégorie des groupes abéliens. Par définition, un objet $G$ de $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ est un $\infty$-groupoïde strict dont, pour tout $n \geq 0$, l'ensemble des flèches $G_n$ est muni d'une structure de groupe abélien, et dont tous les morphismes structuraux sont des morphismes de groupes abéliens. On notera $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts en groupes abéliens 1-réduits. Le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes abéliens vers la catégorie des ensembles induit un foncteur $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}$ qui envoie un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens sur son $\infty$-groupoïde strict sous-jacent. Ce foncteur se restreint en un foncteur $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$.

4.5. PROPOSITION. *Le foncteur $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$ est un isomorphisme de catégories.*

DÉMONSTRATION. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que tout $\infty$-groupoïde strict 1-réduit est canoniquement un $\infty$-groupoïde en groupes abéliens et que les morphismes de $\infty$-groupoïdes stricts préservent cette structure abélienne.

Soit donc $G$ un tel $\infty$-groupoïde. Notons $e_\varepsilon$ l'unique $\varepsilon$-flèche de $G$ pour $\varepsilon = 0, 1$. Soit $i \geq 2$. Si $u$ et $v$ sont deux $i$-flèches de $G$, alors

$$s^i_\varepsilon(u) = t^i_\varepsilon(u) = s^i_\varepsilon(v) = t^i_\varepsilon(v) = e_\varepsilon$$

pour $\varepsilon = 0, 1$. L'ensemble des $i$-flèches est donc muni de deux structures de groupes, induites par les compositions $*^i_0$ et $*^i_1$. Par la loi de l'échange, ces deux opérations sont compatibles. De plus, elles ont la même unité puisque $k^0_i(e_0) = k^1_i(e_1)$. Par l'argument d'Eckmann-Hilton, ces deux lois sont égales et commutatives. On notera $+$ cette opération. Le groupe $(G_i, +)$ est donc abélien.

Vérifions que les données de $G$ sont compatibles avec cette structure abélienne. Supposons toujours $i \geq 2$ et soient $u$, $v$ deux $i$-flèches. On a

$$s_i(u + v) = s_i(u *^i_0 v) = s_i(u) *^{i-1}_0 s_i(v) = s_i(u) + s_i(v).$$

L'application $s_i : G_i \to G_{i-1}$ est donc un morphisme de groupes. Il en est de même de l'application $t_i$. Soient $j$ tel que $0 \leq j < i$ et $u', v'$ deux autres $i$-flèches vérifiant $s^i_j(u) = t^i_j(v)$ et $s^i_j(u') = t^i_j(v')$. On a

$$(u + u') *^i_j (v + v') = (u *^i_0 u') *^i_j (v *^i_0 v') = (u *^i_j v) *^i_0 (u' *^i_j v') = (u *^i_j v) + (u' *^i_j v').$$

Ainsi $*^i_j$ est un morphisme de groupes. Supposons maintenant $i \geq 0$ et soient $u, v$ deux $i$-flèches. On a

$$k_i(u + v) = k_i(u *^i_0 v) = k_i(u) *^{i+1}_0 k_i(v) = k_i(u) + k_i(v)$$

et $k_i$ est un morphisme de groupes.

Montrons maintenant que cette structure abélienne est unique. Donnons-nous donc une structure de $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens sur $G$. Fixons $i \geq 2$ et notons $+'$ la loi de groupe sur $G_i$ de cette structure. Puisque l'application $k^0_i$ respecte la loi $+'$, l'unité de $+'$ est $k^0_i(e_0)$. En particulier, $+'$ et $*^i_0$ ont même unité. Par ailleurs, puisque l'application $*^i_0 : G_i \times G_i \to G_i$ respecte la loi $+'$, les lois $+'$ et $*^i_0$ sont compatibles. Par l'argument d'Eckmann-Hilton, elles sont donc égales. Ainsi, la structure abélienne est uniquement déterminée par les compositions $*^i_0$.

De plus, puisque $+ = *^i_0$, un morphisme de $\infty$-groupoïdes stricts 1-réduits est automatiquement un morphisme de $\infty$-groupoïdes stricts en groupes abéliens. ∎

4.6. Nous allons maintenant montrer que la catégorie des $\infty$-groupoïdes stricts en groupes abéliens est canoniquement équivalente à la catégorie $C_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$ des complexes de groupes abéliens en degré homologique positif (ce résultat a été établi par Bourn dans [6]).

Soit $C$ un tel complexe. Notons $d_i : C_i \to C_{i-1}$ sa différentielle. On associe à $C$ un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens $G$ défini de la manière suivante :

- le groupe $G_i$ des $i$-flèches est $C_i \oplus C_{i-1} \oplus \cdots \oplus C_0$ ;
- pour $i \geq 1$, le morphisme $s_i : G_i = C_i \oplus G_{i-1} \to G_{i-1}$ est la projection canonique ;
- pour $i \geq 1$, le morphisme $t_i : G_i = C_i \oplus G_{i-1} \to G_{i-1}$ est la somme de $d_i$ et de la projection canonique ;
- pour $i \geq 0$, le morphisme $k_i : G_i \to G_{i+1} = C_{i+1} \oplus G_i$ est l'injection canonique ;
- pour $i > j \geq 0$, le morphisme $*^i_j : G_i \times_{G_j} G_i \to G_i$ est défini par

$$(x_i, \ldots, x_0) *^i_j (y_i, \ldots, y_0) = (x_i + y_i, \ldots, x_{j+1} + y_{j+1}, y_j, \ldots, y_0)$$

  (notons que $(x_i, \ldots, x_0, y_i, \ldots, y_0)$ appartient à $G_i \times_{G_j} t^i_j$ si et seulement si on a $(x_j, \ldots, x_0) = (d_{j+1}(y_{j+1}) + y_j, y_{j-1}, \ldots, y_0)$).

On vérifie facilement que $G$ est bien un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens. Pour $i > j \geq 0$, le $*^i_j$-inverse d'un élément $(x_i, \ldots, x_0)$ de $G_i$ est donné par

$$(-x_i, \ldots, -x_{j+1}, d_{j+1}(x_{j+1}) + x_j, x_{j-1}, \ldots, x_0).$$

De plus, si $f : C \to C'$ est un morphisme de complexes, les composantes $f_k : C_k \to C'_k$ induisent pour tout $i$ positif, un morphisme $G_i = C_i \oplus \cdots \oplus C_0 \to G'_i = C'_i \oplus \cdots \oplus C'_0$. On vérifie facilement que ces morphismes définissent un morphisme de $\infty$-groupoïdes stricts en groupes abéliens. On vient ainsi de définir un foncteur $C_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$.

4.7. Proposition. *Le foncteur $C_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ défini ci-dessus est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens. Posons $C_0 = G_0$ et $C_i = \operatorname{Ker} s_i$ pour $i \geq 1$. Puisque le morphisme $s_i : G_i \to G_{i-1}$ admet $k_{i-1}$ comme section, $G_i$ est canoniquement isomorphe à $C_i \oplus G_{i-1}$. Ainsi, on a montré que l'ensemble globulaire sous-jacent à $G$ est isomorphe à un $\infty$-graphe en groupes abéliens de la forme

$$C_0 \underset{t_1}{\overset{s_1}{\leftleftarrows}} C_1 \oplus C_0 \underset{t_2}{\overset{s_2}{\leftleftarrows}} \cdots \underset{t_i}{\overset{s_i}{\leftleftarrows}} C_i \oplus C_{i-1} \oplus \cdots \oplus C_0 \underset{t_{i+1}}{\overset{s_{i+1}}{\leftleftarrows}} \cdots.$$

À travers cet isomorphisme, $s_i$ devient la projection canonique $C_i \oplus G_{i-1} \to G_{i-1}$, et $k_{i-1}$ l'inclusion canonique $G_{i-1} \to C_i \oplus G_{i-1}$. Puisque $k_{i-1}$ est également une section de $t_i$, pour $(0, y)$ dans $C_i \oplus G_{i-1}$, on a $t_i(0, y) = y$. Par ailleurs, l'identité $s_{i-1}t_i = s_{i-1}s_i$ entraîne que, pour $(x, 0)$ dans $C_i \oplus G_{i-1}$, on a $t_i(x, 0) = (d_i(x), 0)$, où $d_i$ est un morphisme de $C_i$ vers $C_{i-1}$. Ainsi, $t_i$ est la somme de la projection canonique et de ce morphisme $d_i$. L'identité $t_{i-1}t_i = t_{i-1}s_i$ implique immédiatement qu'on a $d_{i-1}d_i = 0$. On a ainsi associé un complexe $(C, d)$ à $G$.

On montre de même que si $g : G \to G'$ est un morphisme de $\infty$-groupoïdes stricts en groupes abéliens, le morphisme $g_i : G_i \to G'_i$ se décompose en une somme de deux morphismes $f_i \oplus g_{i-1} : C_i \oplus G_{i-1} \to C'_i \oplus G'_{i-1}$ et que les morphismes $f_i$ définissent un morphisme de complexes.

On a donc construit un foncteur $\Psi : \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab}) \to C_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$. Montrons que celui-ci est un quasi-inverse du foncteur $K : C_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ de l'énoncé. Il est évident que $\Psi\Phi$ est isomorphe à l'identité. Montrons que $\Phi\Psi$ est isomorphe à l'identité. Soit donc $G$ un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens. On a déjà montré que $(\Phi\Psi)(G)$ et $G$ ont des ensembles globulaires sous-jacents canoniquement isomorphes et que cette isomorphisme est compatible avec les identités. Pour conclure, il suffit de montrer que ces données suffisent à déterminer les composition $*^i_j$.

Soient donc $C$ un complexe et $i > j \geq 0$ deux entiers. Soit $(x_i, \dots, x_0, y_i, \dots, y_0)$ un élément de $G_i \times_{G_j} G_i$. Rappelons que cela signifie que les relations

$$x_j = d_{j+1}(y_{j+1}) + y_j \quad \text{et} \quad x_i = y_i, \quad \text{pour } 0 \leq i < j,$$

sont satisfaites. On a alors

$$\begin{aligned}
&(x_i, \dots, x_0) *^i_j (y_i, \dots, y_0) \\
&\quad = (x_i, \dots, x_{j+1}, d_{j+1}(y_{j+1}) + y_j, y_{j-1}, \dots, y_0) *^i_j (y_i, \dots, y_0) \\
&\quad = (x_i, \dots, x_{j+1}, 0, \dots 0) *^i_j (0, \dots, 0) + \\
&\qquad\qquad (0, \dots, 0, d_{j+1}(y_{j+1}) + y_j, y_{j-1}, \dots, y_0) *^i_j (y_i, \dots, y_0) \\
&\quad = (x_i, \dots, x_{j+1}, 0, \dots 0) + (y_i, \dots, y_0) \\
&\quad = (x_i + y_i, \dots, x_{j+1} + y_{j+1}, y_j, \dots, y_0),
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité résulte des égalités

$$\begin{aligned}
(0, \dots, 0) &= k^j_i(s^i_j(x_i, \dots, x_{j+1}, 0, \dots, 0)), \\
(0, \dots, 0, d_{j+1}(y_j) + y_j, y_{j-1}, \dots, y_0) &= k^j_i(t^i_j(y_i, \dots, y_0)),
\end{aligned}$$

et de l'axiome des identités. ∎

4.8. Proposition. *Dans l'équivalence de catégories $C_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ de la proposition précédente, les quasi-isomorphismes et les équivalences faibles de $\infty$-groupoïdes sont échangés.*

Démonstration. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict en groupes abéliens et $n \geq 1$. Rappelons qu'on note $\sim_n$ la relation d'équivalence d'homotopie des $n$-flèches. Si $x$ est un objet de $G$, l'application $G_n \to G_n$, qui à $f$ associe $f - k^0_{n-1}(x)$, induit un isomorphisme de groupes de $\pi_n(G,x)$ vers $\pi_n(G,0)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\pi_n(G,0) &\simeq \{f \in G_n ; s_n(f) = t_n(f) = 0\}/\sim_n \\
&= \{f \in G_n ; s_n(f) = t_n(f) = 0\}/\{f \in G_n ; f \sim_n 0\} \\
&= \{f \in G_n ; s_n(f) = t_n(f) = 0\}/\{t_{n+1}(h) ; h \in G_{n+1}, s_{n+1}(h) = 0\} \\
&\simeq \{(f,0) \in C_n \oplus G_{n-1} ; d_n(f) = 0\}/\{d_{n+1}(h) ; (h,0) \in C_{n+1} \oplus G_n\} \\
&\simeq \{f \in C_n ; d_n(f) = 0\}/\{d_{n+1}(h) ; h \in C_{n+1}\} \\
&= \operatorname{Ker}(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n+1}) \\
&= H_n(C(G)).
\end{aligned}$$

De même, on montre que $\pi_0(G) \simeq H_0(C(G))$.

La proposition résulte de la naturalité de ces isomorphismes. ∎

4.9. Corollaire. *L'équivalence de catégories* $C_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ *induit une équivalence de catégories* $D_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab}))$.

4.10. Remarque. Soit $k \geq 0$. L'équivalence de catégories $C_{\geq 0}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}(\mathsf{Ab})$ se restreint en une équivalence de catégories $C_{\geq k}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq k}(\mathsf{Ab})$ et celle-ci induit une équivalence de catégories $D_{\geq k}(\mathsf{Ab}) \to \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq k}(\mathsf{Ab}))$.

4.11. Corollaire. *On a une équivalence de catégories canonique* $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab}) \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$. *Celle-ci induit une équivalence de catégories* $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab}) \to \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2})$.

Démonstration. Cela résulte de la remarque ci-dessus et de la proposition 4.5. ∎

4.12. Remarque. D'après la remarque 4.3 et le corollaire précédent, les deux catégories $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{sc}})$ et $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ sont canoniquement equivalentes.

4.13. Soient $A$ un groupe abélien et $n$ un entier positif. On notera $A[n]$ le complexe de groupes abéliens concentré en degré homologique $n$ de valeur $A$. Si $n \geq 2$, on notera $\mathcal{K}(A,n)$ le $\infty$-groupoïde strict image de $A[n]$ par l'équivalence de catégories du corollaire ci-dessus. On peut décrire explicitement $\mathcal{K}(A,n)$ de la manière suivante :

- $\mathcal{K}(A,n)$ a un unique objet $e$ ;
- l'ensemble des $i$-flèches de $\mathcal{K}(A,n)$ est le singleton $\{e\}$ pour $i < n$ (on notera 0 ce singleton), et est $A$ pour $i \geq n$ ;
- les applications $s_i$ et $t_i$ sont égales et valent l'identité $1_0$ pour $i < n$, la projection $A \to 0$ pour $i = n$, et l'identité $1_A$ pour $i \geq n+1$ ;
- l'application $k_i$ vaut $1_0$ pour $i < n-1$, l'application $0 \to A$ correspondant à l'élément neutre de $A$ pour $i = n-1$, et $1_A$ pour $i \geq n$ ;
- pour $i > j \geq 0$, l'application $*^i_j$ vaut $1_0$ pour $i < n$, l'addition $A \times A \to A$ pour $i \geq n$ et $j < n$, et vaut l'identité $1_A$ sinon (on a

$$\mathcal{K}(A,n)_i \times_{\mathcal{K}(A,n)_j} \mathcal{K}(A,n)_i = \begin{cases} 0 \times_0 0 \simeq 0 & \text{si } i < n, \\ A \times_0 A \simeq A \times A & \text{si } i \geq n \text{ et } j < n, \\ A \times_A A \simeq A & \text{si } j \geq n). \end{cases}$$

Il est immédiat que $\mathcal{K}(A,n)$ est simplement connexe et que pour tout $k \geq 2$, on a

$$\pi_k(\mathcal{K}(A,n),e) = \begin{cases} A & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut définir de manière analogue des $\infty$-groupoïdes stricts $\mathcal{K}(E,0)$ si $E$ est un ensemble, et $\mathcal{K}(G,1)$ si $G$ est un groupe. Le $\infty$-groupoïde $\mathcal{K}(E,0)$ a pour composantes connexes les éléments de $E$, et pour tout objet $x$ de $\mathcal{K}(E,0)$ et tout $k \geq 1$, le groupe $\pi_k(\mathcal{K}(E,0),x)$ est trivial. Quant à $\mathcal{K}(G,1)$, il possède un unique objet $e$ (en particulier, il est 0-connexe), et pour tout $k \geq 1$, on a

$$\pi_k(\mathcal{K}(G,1),e) = \begin{cases} G & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appellera les $\infty$-groupoïdes définis dans ce paragraphe les *$\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane.*

4.14. Proposition. *Soit $C$ un complexe dans $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$. Alors, dans $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$, $C$ est isomorphe (non canoniquement) à $\prod_{n\geq 2} H_n(C)[n]$.*

Démonstration. Nous allons utiliser la structure de catégorie triangulée de $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ munie de l'auto-équivalence de catégories qui à un complexe $C$ associe le complexe $C[1]$ défini par $C[1]_i = C_{i-1}$.

Soit $C$ un complexe dans $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$. Notons $d_i : C_i \to C_{i-1}$ sa différentielle. Pour tout entier $k$, on notera

$$\begin{array}{rcccccccc} \tau_{\geq k}(C) = & \cdots \to C_{k+2} \to C_{k+1} \to & \operatorname{Ker} d_k & \to & 0 & \to & 0 & \to \cdots \\ \widetilde{\tau}_{\geq k}(C) = & \cdots \to C_{k+2} \to C_{k+1} \to & X_k & \to & \operatorname{Im} d_k & \to & 0 & \to \cdots \\ \tau_{\leq k}(C) = & \cdots \to \quad 0 \quad \to \quad 0 \quad \to & \operatorname{Coker} d_{k+1} & \to & C_{k-1} & \to & C_{k-2} & \to \cdots . \end{array}$$

Fixons $n \geq 2$. On a une suite exacte

$$0 \to \widetilde{\tau}_{\geq n+1}(C) \to C \to \tau_{\leq n}(C) \to 0$$

dans $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$. Par ailleurs, le morphisme canonique $\tau_{\geq n+1}(C) \to \widetilde{\tau}_{\geq n+1}(C)$ est un quasi-isomorphisme. On dispose donc dans $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ d'un triangle distingué

$$\tau_{\geq n+1}(C) \to C \to \tau_{\leq n}(C) \to \tau_{\geq n+1}(C)[1].$$

Or tout morphisme, d'un complexe concentré en degré inférieur ou égal à $n$, vers un complexe concentré en degré supérieur ou égal à $n+2$, est nul dans $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ car les $\operatorname{Ext}^{(n+2)-n}_{\mathsf{Ab}} = \operatorname{Ext}^2_{\mathsf{Ab}}$ sont triviaux. Ainsi, le morphisme de connexion de $\tau_{\leq n}(C)$ vers $\tau_{\geq n+1}(C)[1] = \tau_{\geq n+2}(C[1])$ est nul. Par conséquent, le triangle ci-dessus est scindé et on dispose donc d'une section $\tau_{\leq n}(C) \to C$. En composant l'inclusion canonique de $H_n(C)[n]$ dans $\tau_{\leq n}(C)$ et cette section, on obtient un morphisme

$$H_n(C)[n] \to C$$

de $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ qui induit un isomorphisme sur le $H_n$.

En passant à la somme directe, on obtient un morphisme

$$\bigoplus_{n\geq 2} H_n(C)[n] \to C$$

de $D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$. Ce morphisme induit des isomorphismes sur tous les $H_n$ et est donc un isomorphisme. Par ailleurs, on a $\bigoplus_{n\geq 2} H_n(C)[n] = \prod_{n\geq 2} H_n(C)[n]$, d'où le résultat. ∎

4.15. REMARQUES.

1. On a utilisé implicitement dans la preuve ci-dessus le fait que le foncteur de localisation $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab}) \to D_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ commute aux produits et aux sommes.
2. On démontre de manière similaire le résultat analogue dans $D_{\geq k}(\mathsf{Ab})$ pour $k$ quelconque.

4.16. REMARQUE. Un complexe $C$ dans $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ est isomorphe à $\prod_{n\geq 2} H_n(C)[n]$ dans $C_{\geq 2}(\mathsf{Ab})$ si et seulement si sa différentielle est nulle. Dans l'équivalence de catégories entre $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$ et $C_{\geq 2}(\mathcal{A})$, ces complexes correspondent aux $\infty$-groupoïdes stricts qui vérifient $s_n = t_n$ pour $n \geq 1$. Ainsi, un $\infty$-groupoïde dans $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2}$ est isomorphe à un produit de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane si et seulement si ses sources et buts coïncident. Le résultat est également vrai dans $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}$.

4.17. THEORÈME.

*1. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict 1-réduit d'unique objet $e$. On a dans* $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2})$ *un isomorphisme (non canonique)*

$$G \simeq \prod_{n\geq 2} \mathcal{K}(\pi_n(G,e),n).$$

*2. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict simplement connexe. On a dans* $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd})$ *un isomorphisme (non canonique)*

$$G \simeq \prod_{n\geq 2} \mathcal{K}(\pi_n(G,x),n),$$

*où $x$ est un objet quelconque de $G$.*

DÉMONSTRATION. Le premier point est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de l'équivalence des catégories entre $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2})$ et $\mathrm{Ho}(C_{\geq 2}(\mathsf{Ab}))$ (corollaire 4.11).

Le second point résulte du fait que tout $\infty$-groupoïde strict simplement connexe est faiblement équivalent à un $\infty$-groupoïde strict 1-réduit (proposition 4.2) et du fait que le foncteur d'inclusion $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\geq 2} \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}$ commute aux produits. ∎

4.18. Remarque. *A priori*, pour rendre la preuve du second point ci-dessus correcte, il faudrait considérer le produit de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane apparaissant dans l'énoncé comme un produit dans $\infty$-$\mathcal{G}$pd (plutôt que dans Ho($\infty$-$\mathcal{G}$pd)). Cette distinction n'a en fait pas lieu d'être car le foncteur de localisation $\infty$-$\mathcal{G}$pd $\to$ Ho($\infty$-$\mathcal{G}$pd) commute aux produits. Cela résulte immédiatement du fait que tous les $\infty$-groupoïdes stricts sont fibrants pour la structure de catégorie de modèles de Brown-Golasiński.

## 5. Types d'homotopie et $\infty$-groupoïdes stricts

5.1. On appellera *foncteur de réalisation de Simpson* (la notion est inspirée de [22]) la donnée d'un foncteur $Q : \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathcal{T}op$ muni d'une application

$$b : G_0 \to Q(G)$$

naturelle en $G$, induisant une bijection

$$\pi_0(G) \to \pi_0(Q(G)),$$

et d'isomorphismes

$$\pi_n(G, x) \to \pi_n(Q(G), b(x)), \quad \text{pour } n \geq 1,$$

naturels en $(G, x)$.

Dans la suite, on se donne un foncteur de réalisation de Simpson $Q$. On notera $R : \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathsf{Hot}$ le composé $PQ$ où $P$ est le foncteur de localisation $\mathcal{T}op \to \mathsf{Hot}$.

5.2. Soient $A$ un groupe abélien et $n \geq 2$. Considérons le $\infty$-groupoïde d'Eilenberg-Mac Lane $\mathcal{K}(A, n)$ et notons $e$ son unique objet. Par définition, $Q(\mathcal{K}(A, n))$ est connexe et on a

$$\pi_m(Q(\mathcal{K}(A, n)), b(e)) = \begin{cases} A & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $Q(\mathcal{K}(A, n))$ est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(A, n)$.

De même, si $E$ est un ensemble et $G$ un groupe, les espaces $Q(\mathcal{K}(A, 0))$ et $Q(\mathcal{K}(G, 1))$ sont des espaces d'Eilenberg-Mac Lane de types respectifs $K(E, 0)$ et $K(G, 1)$.

5.3. Proposition. *Le foncteur $Q$ commute aux produits de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane à équivalence faible près. Plus précisément, pour tout ensemble $A_0$, tout groupe $A_1$ et tous groupes abéliens $A_n$ pour $n \geq 2$, le morphisme canonique*

$$Q\Big(\prod_{n \geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)\Big) \to \prod_{n \geq 0} Q(\mathcal{K}(A_n, n))$$

*est une équivalence faible topologique.*

DÉMONSTRATION. Fixons un entier positif $n$. On notera

$$p_n : \prod_{n\geq 0} \mathcal{K}(A_n, n) \to \mathcal{K}(A_n, n) \quad \text{et} \quad q_n : \prod_{n\geq 0} Q(\mathcal{K}(A_n, n)) \to Q(\mathcal{K}(A_n, n))$$

les projections canoniques. On dispose du triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Q\Big(\prod_{n\geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)\Big) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Q(p_n)"'] & & \prod_{n\geq 0} Q(\mathcal{K}(A_n, n)) \arrow[dl, "q_n"] \\ & Q(\mathcal{K}(A_n, n)) & \end{tikzcd}$$

.

Pour $n = 0$, le morphisme $p_0$ induit une bijection sur le $\pi_0$. Il en est donc de même de $Q(p_0)$. Par ailleurs, $q_0$ induit également une bijection sur le $\pi_0$. Il en est donc de même de $f$.

Soit $n \geq 1$. Le morphisme $p_n$ induit un isomorphisme sur le $\pi_n$ pour tout point de base. Le morphisme $Q(p_n)$ induit donc un isomorphisme sur le $\pi_n$ pour tout point de base de la forme $b(x)$, où $x$ est un objet de $\prod_{n\geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)$. Puisque $b$ induit une bijection sur le $\pi_0$, l'application $Q(p_n)$ induit un isomorphisme sur le $\pi_n$ pour tout point de base. Par ailleurs, l'application $q_n$ induit également un isomorphisme sur le $\pi_n$ pour tout point de base. On en déduit que c'est également le cas de $f$, d'où le résultat. ■

5.4. REMARQUE. Le foncteur de localisation $\mathcal{T}op \to \mathsf{Hot}$ commute aux produits. Cela résulte, par exemple, du fait que tout espace topologique est fibrant pour la structure de catégorie de modèles usuelle sur $\mathcal{T}op$. La proposition précédente peut donc se reformuler en disant que le foncteur $R : \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathsf{Hot}$ commute aux produits de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane.

5.5. THEORÈME. *Les types d'homotopie simplement connexes dans l'image essentielle du foncteur $R$ sont exactement les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

DÉMONSTRATION. Un type d'homotopie simplement connexe provient d'un $\infty$-groupoïde strict simplement connexe. Par le théorème 4.17, un tel $\infty$-groupoïde est relié par un zigzag d'équivalences faibles à un produit de $\infty$-groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane. On en déduit immédiatement le résultat par la proposition précédente. ■

5.6. PROPOSITION. *Soit $X$ un CW-complexe connexe de dimension finie $n \geq 1$. Si $X$ a un groupe d'homotopie $\pi_m(X)$ non trivial pour $m > n$, alors le type d'homotopie de $X$ n'est pas un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. En particulier, les sphères de dimension $n$ pour $n \geq 2$ n'ont pas le type d'homotopie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

DÉMONSTATION. Si $X$ avait le type d'homotopie d'un tel produit, on aurait

$$H_m(X) \simeq H_m(X'),$$

où
$$X' = \prod_{1 \leq k \leq m+1} K(\pi_k(X), k).$$
Écrivons
$$X' = K(\pi_m(X), m) \times Y, \quad \text{où} \quad Y = \prod_{\substack{1 \leq k \leq m+1 \\ k \neq m}} K(\pi_k(X), k).$$
En appliquant la formule de Künneth à cette décomposition de $X'$, on obtient une injection de $H_m(K(\pi_m(X), m)) \otimes H_0(Y) \cong \pi_m(X)$ dans $H_m(X') \simeq H_m(X)$. Mais puisque $m > n$, $H_m(X)$ est trivial et il en est donc de même de $\pi_m(X)$. Contradiction.

Ce résultat s'applique aux sphères de dimension $n \geq 2$ car
$$\pi_3(\mathrm{S}^2) = \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \pi_{n+1}(\mathrm{S}^n) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad \text{pour } n \geq 3.$$ ■

5.7. Corollaire. *Le foncteur $R$ n'est pas essentiellement surjectif.*

5.8. Proposition. *L'image essentielle du foncteur $R$ est contenue dans la classe des espaces dont chaque composante connexe a pour revêtement universel un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. Soit $G$ un $\infty$-groupoïde strict. Quitte à décomposer $G$ en une somme sur ses composantes connexes, on peut supposer que $G$ est 0-connexe. Choisissons un objet de $G$ et appelons $G'$ le sous-$\infty$-groupoïde 1-réduit de $G$ déterminé par cet objet. Notons $X = Q(G)$ et $X' = Q(G')$. L'inclusion $i : G' \to G$ induit des isomorphismes sur les $\pi_n$ pour $n \geq 2$ et il en est donc de même de $Q(i) : X \to X'$. On notera $X_{\mathrm{cw}}$ (resp. $X'_{\mathrm{cw}}$) un remplacement cellulaire de $X$ (resp. de $X'$), c'est-à-dire un CW-complexe muni d'une fibration triviale $r : X_{\mathrm{cw}} \to X$ (resp. $r' : X'_{\mathrm{cw}} \to X'$). Soit $\pi : \widetilde{X} \to X_{\mathrm{cw}}$ le revêtement universel de $X_{\mathrm{cw}}$. La simple connexité de $X'$ et donc de $X'_{\mathrm{cw}}$ entraîne l'existence d'une application continue $X'_{\mathrm{cw}} \to \widetilde{X}$ rendant le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\
 & & X_{\mathrm{cw}} \arrow[d, "r"] \\
X'_{\mathrm{cw}} \arrow[r, "r'"'] \arrow[rruu] & X' \arrow[r, "Q(i)"'] & X
\end{tikzcd}$$

commutatif. Puisque $X'_{\mathrm{cw}}$ et $\widetilde{X}$ sont simplement connexes, et que $Q(i)r'$ et $r\pi$ induisent des isomorphismes sur les $\pi_n$ pour $n \geq 2$, l'application $X'_{\mathrm{cw}} \to \widetilde{X}$ est une équivalence faible. D'où le résultat par le théorème 5.5. ■

## 6. Types d'homotopie et 3-groupoïdes quasi-stricts

Pour tenter de contourner le caractère non essentiellement surjectif d'un tel foncteur de réalisation de Simpson, Kapranov et Voedvosky ont affaibli la notion de $n$-groupoïde en demandant seulement l'existence d'inverses « faibles » (voir [16]). Simpson a démontré dans [22] que cela ne suffit pas. Dans ce paragraphe, nous exposons un autre argument. Nous utiliserons la notion de $n$-groupoïde présentée par Street dans [24]. Celle-ci est équivalente par le corollaire 4.4 de [15] à celle de Kapranov et Voedvosky. Nous nous plaçons ici dans le cas $n = \infty$ qui est développé dans [18].

Soient $C$ une $\infty$-catégorie stricte et $x, y$ deux $n$-flèches de $C$ pour $n \geq 0$. On définit par coïnduction mutuelle les deux notions suivantes :

- les $n$-flèches $x$ et $y$ sont *faiblement homotopes* s'il existe une $(n+1)$-flèche *faiblement inversible* $u : x \to y$ ;
- une $(n+1)$-flèche $u : x \to y$ est *faiblement inversible* s'il existe une $(n+1)$-flèche $v : y \to x$ telle que les $(n+1)$-flèches $v *_n^{n+1} u : x \to x$ et $u *_n^{n+1} v : y \to y$ soient *faiblement homotopes* à des identités.

On dira qu'une $\infty$-catégorie stricte est un *$\infty$-groupoïde quasi-strict* si toutes ses $n$-flèches pour $n \geq 1$ sont faiblement inversibles.

Soient $G$ une $\infty$-catégorie stricte et $n$ un entier positif. On montre (proposition 6 de [18]) que la relation de faible homotopie sur $C_n$ est une relation d'équivalence. Si de plus $G$ est un $\infty$-groupoïde quasi-strict, alors par définition, deux $n$-flèches $u, v$ de $G_n$ sont faiblement homotopes si et seulement si elles sont homotopes. On en déduit que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $G_n$. On peut donc définir l'ensemble $\pi_0(G)$ et les groupes $\pi_n(G, x)$ pour $x$ un objet de $G$, et donc la notion d'*équivalence faible de $\infty$-groupoïdes quasi-stricts*, de la même manière que dans le cas strict.

Soit $G$ un 3-groupoïde quasi-strict 1-réduit. Par définition, $G$ est une 3-catégorie stricte 1-réduite telle que les 2-flèches aient un $*_1^2$-inverse à une 3-flèche près, et que les 3-flèches aient un $*_2^3$-inverse. En désuspendant $G$ deux fois (c'est-à-dire en considérant les 2-flèches de $G$ comme des objets et ses 3-flèches comme des 1-flèches), on obtient une catégorie monoïdale symétrique $C$, avec une symétrie et des contraintes triviales, qui est un groupoïde, et telle que le monoïde $\pi_0(C)$ est un groupe (abélien). La catégorie $C$ est un champ de Picard (sur le point) au sens de l'exposé XVIII de [13]. Ainsi, en vertu du lemme 1.4.13 de *op. cit.*, il existe une catégorie monoïdale symétrique $D$, avec une symétrie et des contraintes triviales, qui est un groupoïde et telle que le monoïde $D_0$ est un groupe (abélien), ainsi qu'un foncteur monoïdale symétrique (fort) de $D$ vers $C$ qui est une équivalence faible. En désuspendant deux fois, on obtient un 3-groupoïde strict $H$ et un *pseudo*-foncteur $H \to G$ (c'est-à-dire un 3-foncteur qui ne respecte les compositions et identités qu'à isomorphisme près, ou plus précisément, un trihomomorphisme au sens de [11]) qui est une équivalence faible.

Ainsi, tout 3-groupoïde quasi-strict simplement connexe est faiblement équivalent à un 3-groupoïde strict *via* un *pseudo*-foncteur. Les 3-groupoïdes quasi-stricts simplement connexes ne modélisent donc pas plus de types d'homotopie que les 3-groupoïdes stricts simplement connexes. En particulier, ils ne modélisent pas le 3-type associé à la sphère de dimension 2 (comme le montre la démonstration de la proposition 5.6).

Il a par contre été démontré indépendamment par Leroy ([19]) et Joyal et Tierney (dans un texte non publié datant de 1984, depuis égaré) que les 3-groupoïdes faibles (au sens de [11]) modélisent bien les 3-types d'homotopie (voir également [5] et [17]).

## 7. Deux questions

Ce texte ne répond pas à la question suggérée par son titre :

7.1. Question. *Quels sont les types d'homotopie modélisés par les $\infty$-groupoïdes stricts ?*

Dans une version précédente de ce texte, nous avions formulé cette question de manière plus précise en fixant un foncteur de réalisation de Simpson. La question devenait alors : quelle est l'image essentielle du foncteur $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathsf{Hot}$ induit ? Il n'est cependant pas clair que la réponse à cette question ne dépende pas du choix du foncteur de réalisation de Simpson. Le foncteur $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathsf{Hot}$ qui nous intéresse vraiment ici est celui induit par l'inclusion des $\infty$-groupoïdes stricts dans les $\infty$-groupoïdes faibles, la catégorie homotopique de ceux-ci étant, d'après la conjecture de Grothendieck, la catégorie homotopique $\mathsf{Hot}$ (si on interprète « $\infty$-groupoïdes faibles » comme « $\infty$-groupoïdes de Grothendieck », ce foncteur d'inclusion est construit dans [3]). La proposition 5.8 donne une condition nécessaire pour être dans l'image essentielle de ce foncteur.

Une deuxième question naturelle est la généralisation de la question précédente aux $\infty$-groupoïdes quasi-stricts. En particulier, les $\infty$-groupoïdes quasi-stricts modélisent-ils plus de types d'homotopie que les $\infty$-groupoïdes stricts ? Plus précisément, en notant $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{qs}}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-}\mathcal{C}\mathrm{at}$ formée des $\infty$-groupoïdes quasi-stricts, nous proposons la question suivante :

7.2. Question. *Le foncteur* $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}) \to \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{qs}})$, *induit par le foncteur d'inclusion* $\infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd} \to \infty\text{-}\mathcal{G}\mathrm{pd}_{\mathrm{qs}}$, *est-il une équivalence de catégories ?*

## Références

[1] D. Ara – « Sur les $\infty$-groupoïdes de Grothendieck et une variante $\infty$-catégorique », Thèse, Université Paris 7, 2010.

[2] — , « On the homotopy theory of Grothendieck $\infty$-groupoids », *J. Pure Appl. Algebra* **217** (2013), no. 7, p. 1237–1278.

[3] — , « Strict $\infty$-groupoids are Grothendieck $\infty$-groupoids », *J. Pure Appl. Algebra* **217** (2013), no. 12, p. 2298–2312.

[4] D. Ara & F. Métayer – « The Brown-Golasiński model structure on strict $\infty$-groupoids revisited », *Homology Homotopy Appl.* **13** (2011), no. 1, p. 121–142.

[5] C. Berger – « Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-type of space », in *Higher homotopy structures in topology and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 227, Amer. Math. Soc., 1999, p. 49–66.

[6] D. Bourn – « Another denormalization theorem for abelian chain complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **66** (1990), no. 3, p. 229–249.

[7] R. Brown & M. Golasiński – « A model structure for the homotopy theory of crossed complexes », *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* **30** (1989), no. 1, p. 61–82.

[8] R. Brown & P. J. Higgins – « The equivalence of $\infty$-groupoids and crossed complexes », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **22** (1981), no. 4, p. 371–386.

[9] — , « The classifying space of a crossed complex », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **110** (1991), no. 1, p. 95–120.

[10] P. Gabriel & M. Zisman – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.

[11] R. Gordon, A. J. Power & R. Street – *Coherence for tricategories*, vol. 117, Mem. Amer. Math. Soc., no. 558, Amer. Math. Soc., 1995.

[12] A. Grothendieck – « Pursuing stacks », Manuscrit, 1983, à paraître dans la collection Documents Mathématiques.

[13] A. Grothendieck, M. Artin & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4), Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973.

[14] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations. II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 283, Springer-Verlag, 1972.

[15] S. Kansangian, G. Metere & E. Vitale – « Weak inverses for strict $n$-categories », Prépublication, 2009.

[16] M. M. Kapranov & V. A. Voevodsky – « $\infty$-groupoids and homotopy types », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **32** (1991), no. 1, p. 29–46.

[17] S. Lack – « A Quillen model structure for Gray-categories », *J. K-Theory* **8** (2011), no. 2, p. 183–221.

[18] Y. Lafont, F. Métayer & K. Worytkiewicz – « A folk model structure on omega-cat », *Adv. Math.* **224** (2010), no. 3, p. 1183–1231.

[19] O. Leroy – « Sur une notion de 3-catégorie adaptée à l'homotopie », prépublication de l'université Montpellier II, 1994.

[20] G. Maltsiniotis – *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, no. 301, Soc. Math. France, 2005.

[21] J. Milnor – « The geometric realization of a semi-simplicial complex », *Ann. of Math. (2)* **65** (1957), p. 357–362.

[22] C. Simpson – « Homotopy types of strict 3-groupoids », arXiv :math/9810059v1 [math.CT], 1998.

[23] — , *Homotopy theory of higher categories*, New mathematical monographs, vol. 19, Cambridge University Press, 2011.

[24] R. Street – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.

*Institut de Mathématiques de Jussieu,*
*Université Paris Diderot – Paris 7,*
*Case 7012, Bâtiment Chevaleret,*
*75205 Paris Cedex 13, France*
Email: `ara@math.jussieu.fr`

This article may be accessed at `http://www.tac.mta.ca/tac/` or by anonymous ftp at `ftp://ftp.tac.mta.ca/pub/tac/html/volumes/28/19/28-19.{dvi,ps,pdf}`

THEORY AND APPLICATIONS OF CATEGORIES (ISSN 1201-561X) will disseminate articles that significantly advance the study of categorical algebra or methods, or that make significant new contributions to mathematical science using categorical methods. The scope of the journal includes: all areas of pure category theory, including higher dimensional categories; applications of category theory to algebra, geometry and topology and other areas of mathematics; applications of category theory to computer science, physics and other mathematical sciences; contributions to scientific knowledge that make use of categorical methods.
Articles appearing in the journal have been carefully and critically refereed under the responsibility of members of the Editorial Board. Only papers judged to be both significant and excellent are accepted for publication.
Full text of the journal is freely available in .dvi, Postscript and PDF from the journal's server at `http://www.tac.mta.ca/tac/` and by ftp. It is archived electronically and in printed paper format.

Subscription information Individual subscribers receive abstracts of articles by e-mail as they are published. To subscribe, send e-mail to `tac@mta.ca` including a full name and postal address. For institutional subscription, send enquiries to the Managing Editor, Robert Rosebrugh, `rrosebrugh@mta.ca`.

Information for authors The typesetting language of the journal is TeX, and LaTeX2e strongly encouraged. Articles should be submitted by e-mail directly to a Transmitting Editor. Please obtain detailed information on submission format and style files at `http://www.tac.mta.ca/tac/`.