*ISSN 1364-0380 (on line) 1465-3060 (printed)*


*Geometry & Topology*
Volume 6 (2002) 563–607
Published: 1 December 2002

# Caractères sur l'algèbre de diagrammes trivalents $\Lambda$

Bertrand Patureau-Mirand

*L.M.A.M. Université de Bretagne-Sud, Centre de Recherche*
*Campus de Tohannic, BP 573, F-56017 Vannes, France*

Email: `bertrand.patureau@univ-ubs.fr`

URL: `http://www.univ-ubs.fr/lmam/patureau/`

**Abstract**

The theory of Vassiliev invariants deals with many modules of diagrams on which the algebra $\Lambda$ defined by Pierre Vogel in [21] acts. By specifying a quadratic simple Lie superalgebra, one obtains a character on $\Lambda$. We show the coherence of these characters by building a map of graded algebras beetwen $\Lambda$ and a quotient of a ring of polynomials in three variables; all the characters induced by simple Lie superalgebras factor through this map. In particular, we show that the characters for the Lie superalgebra $\mathfrak{f}(4)$ with dimension 40 and for $\mathfrak{sl}_3$ are the same.

**Résumé**

De nombreux modules de diagrammes sont utilisés dans la théorie des invariants de Vassiliev. Pierre Vogel a définit dans [21] une algèbre $\Lambda$ qui agit sur ces espaces. Les superalgèbres de Lie simples quadratiques fournissent des caractères sur $\Lambda$. On montre leur cohérence en construisant un morphisme d'algèbre graduée, entre $\Lambda$ et un quotient d'un anneau de polynôme en trois variables, qui factorise tous ces caractères. En particulier, on montre que le caractère associé á la superalgèbre de Lie $\mathfrak{f}(4)$ de dimension 40 coïncide avec celui associé à $\mathfrak{sl}_3$.

**AMS Classification numbers** Primary: 57M27

Secondary: 57M25 17B10

**Keywords:** Finite type invariants, weight system, representation theory

Proposed: Vaughan Jones — Received: 4 July 2001
Seconded: Robion Kirby, Joan Birman — Accepted: 28 October 2002

# Introduction

Cet article est tiré de mon travail en thèse. Il s'agit de la démonstration du théorème 2.1 que j'ai annoncé dans [17].

L'intégrale de Kontsevich associe a un entrelacs son invariant de Vassiliev–Kontsevich universel qui prend ses valeurs dans un espace vectoriel engendré par les diagrammes de cordes. Les espaces de diagrammes trivalents (généralisant les diagrammes de cordes) ne sont connus que par une présentation. Même les dimensions de ces espaces restent aujourd'hui inconnues.

D. Bar-Natan publie en 1995 un article dans lequel il utilise des algèbres de Lie quadratiques (munies de formes bilinéaires invariantes non dégénérées) pour détecter des éléments des modules de diagrammes. Il construit des fonctions de poids, qui sont des applications sur ces modules de diagrammes. Composées avec l'invariant universel, elles donnent des invariants de type fini à valeurs dans les tenseurs invariants d'une algèbre de Lie.

La même année, P. Vogel introduit des structures algébriques supplémentaires sur ces modules de diagrammes et commence une étude systématique de ces objets et des fonctions de poids qui y sont définies. En particulier, il définit une algèbre $\Lambda$ qui agit sur plusieurs de ces modules. Les fonctions de poids provenant de superalgèbres de Lie simples induisent des caractères sur cette algèbre, à l'aide desquels il a été possible de montrer que les invariants de type fini sont plus vastes que ceux correspondant aux invariants quantiques classiques. La compréhension de cette algèbre est centrale pour la connaissance globale des invariants de type fini.

Toute variété de dimension trois peut être obtenue en faisant de la chirurgie le long d'un entrelacs en bande. Cette description est utilisée en 1995 par T. Le, H. et J. Murakami et T. Ohtsuki pour construire un invariant universel de type fini pour les variétés de dimension trois. Le logarithme de cet invariant prend ces valeurs dans un espace isomorphe au complété de l'algèbre $\Lambda$. L'année suivante, T. Le et J. Murakami donnent, en utilisant les travaux de Drinfield, une version algébrique de l'invariant universel de type fini.

Ce texte est organisé de la manière suivante:

Dans la première partie, j'introduit les modules de diagrammes et je rappelle leur lien avec l'intégrale de Kontsevich.

Dans la deuxième partie, j'introduit les fonctions de poids associées aux super-algèbres de Lie et j'énonce le théorème 2.1 sur la cohérence des caractères. Sa démonstration repose sur la construction, dans la troisième partie, d'un morphisme d'algèbre graduée entre $\Lambda$ et un quotient d'un anneau de polynôme à trois variables qui factorise tous les caractères induits par les superalgèbres de Lie simples.

Les cas des superalgèbres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ est traité séparément dans la quatrième partie.

**Remerciements** Je remercie P. Vogel qui a suivi ce travail durant ma thèse de doctorat et le référé à qui est dû cet index des notations.

## Index des notations

| | | |
|---|---|---|
| $\Gamma$ ............. | | désigne une variété de dimension 1 à bord |
| $X$ ............. | | désigne un ensemble fini |
| $[n]$ ............. | | ensemble des entiers de 1 à $n$ |
| $\mathfrak{S}(X)$, $\mathfrak{S}_n$ ..... | | groupe des permutations de $X$ (resp. de $[n]$) |
| $\mathcal{A}(\Gamma, X)$........ | (1.1) | espace des $(\Gamma, X)$–diagrammes |
| $F(X)$, $F_n$ ...... | (1.1) | espace des $(\emptyset, X)$–diagrammes connexes $(F_n = F([n]))$ |
| $\Lambda$ ............. | (1.3) | algèbre des diagrammes "à 3 jambes" |
| $\Lambda_0$, $t$, $x_n$ ....... | (1.3) | $\Lambda_0$ est la sous algèbre de $\Lambda$ engendrée par les éléments $t$, $x_n$ |
| $\chi_\square$ ............ | | les caractères (morphismes d'algèbres gradués) sur $\Lambda$ sont notés par la lettre $\chi$ |
| $\mathcal{D}$ ............. | (2.1) | catégorie des $(\emptyset, X)$–diagrammes |
| $\mathcal{D}_\Gamma$ ............ | (2.1) | catégorie des $((S^1)^{\amalg n}, X)$–diagrammes |
| $\mathcal{D}_b$ ............ | (2.1) | catégorie dans laquelle les morphismes sont les diagrammes connexes relativement au but |
| $\mathcal{D} \xrightarrow{\Phi_L} \mathrm{Mod}_L$ ... | (2.1) | foncteur monoïdal linéaire associé à $L$ |
| $S = \mathbb{Q}[t, u, v]$ ... | (2.2) | anneau gradué contenant les polynômes $P_{\mathfrak{sl}}, P_{\mathfrak{osp}}, P_{\mathfrak{D}_{21}}, P_{\mathfrak{sl}_2}, P_{\mathfrak{ex}}, Q_{\mathfrak{ex}}$ |
| $\mathcal{D}_{\mathfrak{osp}}, \mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}, \mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$, $\Phi_{\mathfrak{osp}}, \Phi_{\mathfrak{sl}}, \Phi_{\mathfrak{gl}}$ ... | (3.2.1) | catégories quotientes de $\mathcal{D}$ et leur foncteur quotient |
| $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}_0}$, $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ ...... | (3.4.3) | variante de $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ correspondant a une superdimension nulle |
| $\mathcal{M}$, $\Phi_{\mathcal{M}}$........ | (3.2.1) | catégorie des $X$–surfaces marquées et le foncteur d'épaicissement $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ |
| $\mathcal{S}$ ............. | (3.2.1) | algèbre du monoïde des surfaces compactes $\mathcal{S} \simeq \mathbb{Q}[\delta, \alpha, \beta]_{/(\alpha\beta - \alpha^3)}$ |
| $M(X)$, $M[n]$, $M_c(X)$......... | (3.2.1) | espace des $X$– (resp. $[n]$–) surfaces marquées (resp. connexes) |
| $R$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ ...... | (3.3) | $R = \mathbb{Q}[a, b, c]_{/(a+b+c)}$ contient les éléments $\sigma_2 = ab + bc + ca$ et $\sigma_3 = abc$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\mathfrak{D}_{2\,1}$ .......... | (3.3) | $R$–superalgèbre de Lie générique pour les superalgèbres $\mathfrak{D}_{2\,1,\alpha}$ |
| $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ .......... | (3.3) | $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}} = \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_R k$ où $k$ est le corps des fractions de $R$ |
| $N = \mathbb{N} \amalg N_3 \amalg N_6$ | (3.5.2) | ensembles de multi-entiers munis d'un bon ordre |
| $W_\delta$ ............ | (3.5.2) | diagrammes, formés de généralisations des roues, paramétrés par $N$ |
| $f_K$ ............ | (3.5.2) | application obtenue par recollement du diagramme $K$ |
| $R_\delta$, $\bar{R}_\delta$ ......... | (3.5.2) | filtration de $F_0$ indexée par $N$ et gradué associé |
| $\widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$, $\overline{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$) .... | (4) | espace des diagrammes bicolores (resp. modulo la relation ($\overline{IHX}$)) |
| $\widehat{\mathcal{D}}$, $\overline{\mathcal{D}}$.......... | (4) | catégorie des diagrammes bicolores (resp. modulo la relation ($\overline{IHX}$)) |

# 1 Les diagrammes trivalents

## 1.1 Modules de diagrammes

Dans tout ce qui suit, $\Gamma$ sera une variété compacte de dimension un à bord et $X$ dénote un ensemble fini. Un $(\Gamma, X)$–diagramme est un graphe fini $K$, dont tous les sommets sont trivalents ou monovalents, muni des données suivantes:

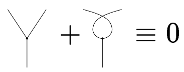
(1) Un isomorphisme d'un sous-graphe de $K$ vers $\Gamma \amalg X$ envoyant l'ensemble des sommets monovalents de $K$ sur $\partial\Gamma \cup X$.

(2) Pour chaque sommet trivalent $x$ de $K$, un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arêtes orientées arrivant en $x$.

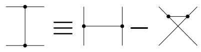
On peut représenter un $(\Gamma, X)$–diagramme par un graphe trivalent immergé dans le plan de manière à ce que l'ordre cyclique en chaque sommet soit donné par l'orientation du plan. On représentera d'un trait plus épais les arêtes appartenant à $\Gamma$.

Soit $E$ le quotient du $\mathbb{Q}$–espace vectoriel librement engendré par les diagrammes trivalents par les relations suivantes:

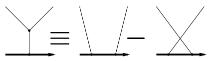
(1) Si deux diagrammes ne diffèrent que par l'ordre cyclique de l'un de leurs sommets, leur somme est nulle (relation dite (AS) pour antisymétrie):



(2) La relation (IHX) fait intervenir trois diagrammes qui ne diffèrent qu'au voisinage d'une arête:



(3) La relation (STU) qui est une variation de la relation (IHX) au voisinage de $\Gamma$:



On désigne par $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ le sous-espace de $E$ engendré par les $(\Gamma, X)$–diagrammes et par $F(X)$ le sous-espace de $E$ engendré par les $(\emptyset, X)$–diagrammes connexes ayant au moins un sommet trivalent.

Enfin, on note $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $F_n$ pour $F([n])$.

On définit le degré d'un diagramme $K \in E$ par $a - s$ où $a$ et $s$ sont les nombres d'arêtes et de sommets trivalents de $K$. Ainsi, ces modules sont munis d'une graduation. On note $d$ le diagramme de $\mathcal{A}(\emptyset, \emptyset)$ formé d'un seul cercle et on conviendra que son degré est nul.

Toute bijection entre des ensembles finis $X$ et $Y$ induit une bijection entre $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ et $\mathcal{A}(\Gamma, Y)$. En particulier le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $F_n$.

On dira qu'un diagramme $K$ a $n$ boucles si la dimension de son premier groupe d'homologie est $n$ (i.e. $\dim(H_1(K)) = n$). Si $n$ est un entier strictement positif, le degré d'un diagramme de $F_n$ est égal à son nombre de boucles plus $n-1$.

On a ici repris les notations de [21] à l'exception des coefficients qui sont ici rationnels, de la définition du degré et des définitions de $F_n$ qui n'entraînent des modifications que pour $F_0$ et $F_2$ qui sont ici pris nuls en degrés respectifs zéro et un.

## 1.2 L'intégrale de Kontsevich

Il est connu que le module gradué $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S^1, \emptyset)$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Hopf graduée, commutative et cocommutative.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc l'algèbre symétrique du sous-module gradué $\mathcal{P}$ formé par ses éléments primitifs et ce module est relié aux modules $F_n$ par l'isomorphisme:

$$\mathcal{P} \simeq \bigoplus_{n=2}^{+\infty} H^0(F_n, \mathfrak{S}_n)$$

Si on note $\Theta$ le $(S^1, \emptyset)$–diagramme représenté par le cercle et un de ses diamètres, alors l'intégrale de Kontsevich associe à chaque nœud orienté son invariant de Vassiliev universel à valeurs dans l'algèbre $\hat{\mathcal{A}}_r$ qui est la complétée pour la graduation du quotient $\mathcal{A}_{/(\Theta)}$.

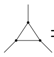
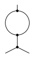
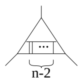
### 1.3 L'algèbre $\Lambda$

Dans cette section est introduite l'algèbre graduée de diagramme $\Lambda$ qui agit de manière naturelle sur les modules $F(X)$.

$\Lambda$ est définie comme le sous-espace vectoriel formé des éléments de $F_3$ totalement antisymétriques sous l'action du groupe symétrique.

$\Lambda$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre commutative et agit sur chaque module $F(X)$. Si $u$ appartient à $\Lambda$ et $K \in F(X)$ est un diagramme, un diagramme représentant $u.K$ est obtenu en insérant $u$ au niveau d'un sommet trivalent de $K$. Afin de rendre cette action cohérente avec les graduations des modules, on convient de définir le degré d'un élément de $\Lambda$ comme son degré dans $F_3$ moins deux (de sorte que l'unité de $\Lambda$ est de degré nul).

On a la description suivante de $F_n$ pour $n$ petit (cf [21]): $F_0$ est un $\Lambda$–module libre de rang un engendré par l'unique diagramme (aux relations AS près) de degré un; $F_1$ est nul; $F_2$ est un $\Lambda$–module libre de rang un engendré par l'unique diagramme (aux relations AS près) de degré deux. De plus on ne connaît pas d'exemple d'élément de $F_3$ qui ne soit pas dans $\Lambda$. D'autre part, $\Lambda$ est engendrée en degré 1 par l'élément $t$ ci dessous et on peut construire la famille $x_n$ d'éléments de $\Lambda$ qui engendrent avec $t$ une sous-algèbre de $\Lambda$ notée $\Lambda_0$ .

$t =$  $= \frac{1}{2}$  $\qquad x_n =$ 


Il n'y a pas de contre-exemple à la conjecture suivante: $\Lambda = \Lambda_0$. C'est la motivation principale de cet article.

## 2 Fonction de poids associée à une superalgèbre de Lie quadratique

### 2.1 Le foncteur $\Phi_L$

Dans cette partie, nous introduisons les fonctions de poids généralisées associées aux superalgèbres de Lie quadratique. Ces applications sont aujourd'hui les seules manières connues de détecter la non nullité des éléments des modules de diagrammes.

Soit $L$ une superalgèbre de Lie sur un corps $k$ de caractéristique nulle munie d'un élément de Casimir non dégénéré $\Omega \in L \otimes L$ de degré pair. Le Casimir fournit un isomorphisme de $L$–module entre $L$ et son dual et la forme bilinéaire sur $L$ supersymétrique invariante associée sera notée $< .,. >$. On construit une catégorie $\mathcal{D}$ de diagrammes et un foncteur, noté $\Phi_{L,\Omega}$, de $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}_L$ des représentations de $L$.

Soit $\mathcal{D}$ la catégorie $\mathbb{Q}$–linéaire monoïdale définie par:

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{D}) = \{[n], n \in \mathbb{N}\}$$

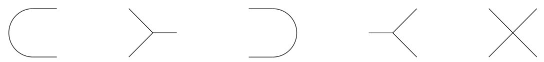
$$\mathcal{D}([p],[q]) = \mathcal{A}(\emptyset, [p] \amalg [q])$$

La composition d'un diagramme de $[p]$ vers $[q]$ avec un diagramme de $[q]$ vers $[r]$ est donnée par la réunion au dessus de $[q]$ des deux diagrammes (on les recolle en identifiant les sommets monovalents de même index des deux ensembles $[q]$). On étend cette définition par linéarité à des combinaisons linéaires de diagrammes.

Le produit tensoriel $[p] \otimes [q]$ vaut $[p+q]$ et celui de deux diagrammes est donné par l'image de leur réunion disjointe par l'isomorphisme de $[p] \amalg [q] \simeq [p+q]$ obtenu en augmentant de $p$ chaque élément de $[q]$.

**Proposition 2.1** (cf [21])

*Il existe un unique foncteur $\mathbb{Q}$–linéaire monoïdal $\Phi_{L,\Omega}$ de la catégorie $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}_L$ envoyant $[n]$ sur $L^{\otimes n}$ et les diagrammes suivants:*



*vers respectivement:*

1. *Le Casimir $\Omega \in L^{\otimes 2} \simeq \mathrm{Mod}_L(\mathbb{Q}, L^{\otimes 2})$*
2. *Le crochet de Lie de $L^{\otimes 2}$ vers $L$*
3. *Le produit scalaire associé au Casimir de $L^{\otimes 2}$ vers $\mathbb{Q}$*
4. *Le dual du crochet de Lie de $L$ vers $L^{\otimes 2}$*
5. *L'opérateur de symétrie:* $\begin{array}{ccc} L^{\otimes 2} & \longrightarrow & L^{\otimes 2} \\ x \otimes y & \mapsto & (-1)^{\mathrm{degr\acute{e}}(x)\mathrm{degr\acute{e}}(y)} y \otimes x \end{array}$

*D'autre part, si $L$ est simple, il existe un caractère gradué: $\chi_L\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ vérifiant:*

$$\forall u \in \Lambda,\ \forall K \in F([p] \amalg [q]) \subset \mathcal{D}([p],[q]),\ \Phi_{L,\Omega}(uK) = \chi_L(u)_{|x=1} \Phi_{L,\Omega}(K)$$

**Remarque** On peut définir la notion de "pseudo-algèbre de Lie" comme une catégorie $\mathcal{L}$ $\mathbb{Q}$–linéaire monoïdale munie d'un foncteur $\Phi_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{L}$. Ceci signifie que $\mathcal{L}$ possède un objet particulier noté $L$, un opérateur de symétrie (endomorphisme de $L^{\otimes 2}$) induisant une représentation de groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans les endomorphismes de $L^{\otimes n}$, un opérateur de Casimir symétrique ayant pour adjoint un morphisme $< .,. >\colon L^{\otimes 2} \longrightarrow 1_{\otimes}$ (dans le sens où $L \simeq L \otimes 1_{\otimes} \xrightarrow{Id_L \otimes \Omega} L^{\otimes 3} \xrightarrow{<.,.>\otimes Id_L} 1_{\otimes} \otimes L \simeq L \equiv Id_L$) et un opérateur "crochet de Lie" $[.,.]\colon L^{\otimes 2} \longrightarrow L$ antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

La proposition dit alors que la catégorie des représentations d'une superalgèbre de Lie quadratique a naturellement une structure de pseudo-algèbre de Lie.

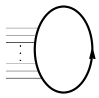
Si $f$ est une bijection de $[p] \amalg [q]$ vers $[r] \amalg [s]$, alors $f$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_L(L^{\otimes p}, L^{\otimes q})$ vers $\mathrm{Hom}_L(L^{\otimes r}, L^{\otimes s})$ (par l'autodualité de $L$) mais aussi un isomorphisme de $\mathcal{A}(\emptyset, [p] \amalg [q])$ vers $\mathcal{A}(\emptyset, [r] \amalg [s])$ et il est facile de voir que $f_* \circ \Phi_L = \Phi_L \circ f_*$. En particulier, si $p + q = n$, on identifie souvent $F_n$ à un sous-module de $\mathcal{A}(\emptyset, [p] \amalg [q])$.

On peut définir des variantes du foncteur $\Phi_L$:

- On définit $\mathcal{D}_\Gamma$ comme la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{D}$ mais dont les morphismes sont donnés par

$$\mathcal{D}_\Gamma([p],[q]) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}((S^1)^{\amalg n}, [p] \amalg [q])$$

  Si d'autre part $E$ est un $L$–module, on peut encore montrer qu'il existe un unique foncteur $\Phi_{L,E}\colon \mathcal{D}_\Gamma \longrightarrow \mathrm{Mod}_L$ prolongeant $\Phi_L$ et envoyant



  sur $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto \mathrm{str}_E(x_1 x_2 \ldots x_n)$. La notation $\mathrm{str}_E$ désigne la supertrace sur le supermodule $E$ et, par la suite, on notera $\mathrm{sdim}(E)$ la superdimension d'un module $E$ (qui est égale à la dimension de la partie paire de $E$ moins la dimension de sa partie impaire).
- Si $L$ est une superalgèbre de lie sur une $\mathbb{Q}$–algèbre $R$ munie d'un élément de Casimir $\Omega \in L \otimes_R L$ et si l'on considère $\mathcal{D}_b$ la sous-catégorie de $\mathcal{D}$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont engendrés par les $(\emptyset, [p] \amalg [q])$–diagrammes dont toutes les composantes connexes rencontrent $[q]$, alors on peut définir de même un foncteur $R$–linéaire: $\Phi_L\colon \mathcal{D}_b \longrightarrow \mathrm{Mod}_L$ qui coïncide avec la restriction à $\mathcal{D}_b$ du foncteur $\Phi_L$ de la proposition si $R$ et $L$ satisfont aux hypothèses.

Enfin on se servira du lemme:

**Lemme 2.1** *Soit $\psi\colon R \longrightarrow R'$ un morphisme entre deux $\mathbb{Q}$–algèbres commutatives, et $f\colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ un morphisme entre la $R$–superalgèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et la $R'$–superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$; par $\psi$, $\mathfrak{g}$ est naturellement munie d'une structure de $R$–module et on suppose que $f$ est un morphisme de $R$–algèbre de Lie. Si $\mathfrak{h}$ possède un élément de Casimir invariant $\Omega \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ qui est envoyé par $f$ sur $f_*(\Omega) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ élément de Casimir $\mathfrak{g}$–invariant de $\mathfrak{g}$, alors l'application $f_*$ induite par $f$ et $\psi$ entre la $R$–algèbre tensorielle de $\mathfrak{h}$ et la $R'$–algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ vérifie pour tout $K \in \mathcal{D}_b([p],[q])$,*

$$f_* \circ \Phi_{\mathfrak{h},\Omega}(K) = \Phi_{\mathfrak{g},f_*\Omega}(K) \circ f_*$$

Ce lemme est une conséquence du fait que $\mathcal{D}_b$ est engendrée comme catégorie $\mathbb{Z}$–linéaire monoïdale par les morphismes "crochet", "Casimir" et "symétrie" qui vérifient tous le lemme par hypothèse.

## 2.2 Propriétés communes à tous les foncteurs $\Phi_L$

On connaît la liste complète des superalgèbres de Lie simples complexes quadratiques (cf [10] et [21]). Elle est formée des superalgèbres $\mathfrak{sl}(V)$ où $V$ est un superespace de superdimension non nulle, des superalgèbres $\mathfrak{psl}(V)$ si $V$ est de superdimension nulle, des superalgèbres $\mathfrak{osp}(V)$ lorsque $V$ est muni d'une forme bilinéaire supersymétrique non dégénérée, les superalgèbres $\mathfrak{D}_{2\,1,\delta}$ où $\delta$ est un paramètre complexe différent de $0$ et de $1$, les cinq algèbres exceptionnelles, les deux superalgèbres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ et enfin les superalgèbres hamiltoniennes. Nous exclurons ces dernières qui induisent sur $\Lambda$ le caractère trivial (cf [21], dernière remarque de la partie 6).

L'action du Casimir $\Omega$ de $L$ sur $L^{\otimes n}$ s'exprime comme l'image par $\Phi_L$ d'un diagramme de $\mathcal{A}(\emptyset,[n]\amalg[n])$. Sous l'action du Casimir, $L^{\otimes n}$ se scinde en espaces caractéristiques. En particulier, il est facile de voir que $\Omega$ agit par $2t$ sur $L$ (où l'on note encore $t$ l'élément $\chi_L(t)_{|x=1}$).

Sur $L^{\otimes 2}$, $\Omega$ agit comme $4t - 2\Psi$ où:

$$\Psi = \Phi_L(\ \ )$$

On peut toujours décomposer $L^{\otimes 2}$ de la manière suivante:

$$L^{\otimes 2} = \Lambda^2 L \oplus S^2 L$$

De plus si $t \neq 0$, $\Lambda^2 L$ se décompose en la somme directe $L \oplus X_2$, $\Psi$ agit par $t$ sur $L$ et par $0$ sur $X_2$. Si $L$ est l'une des superalgèbre de Lie de la famille $\mathfrak{D}_{2\,1,\delta}$ alors $t = 0$ et $\Lambda^2 L$ est une extension généralement non scindée de $X_2$ (noyau du crochet de Lie) par $L$.

Enfin, dans tous les cas, $S^2 L$ s'écrit $\mathbb{Q} \oplus E$ (le module trivial étant engendré par le Casimir) et le module $E$ se décompose en trois espaces propres, les valeurs propres associées $\alpha, \beta, \gamma$ ont pour somme $t$. Certains des modules cités ci-dessus peuvent éventuellement être nuls mais il existe toujours des éléments $u(L) = -\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{2}$ et $v(L) = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}$ tels que sur $E$ on ait la relation

$$\Psi^3 = t\Psi^2 + 2u\Psi + 2v. \tag{1}$$

Le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ sera dit admissible pour $(L, \Omega)$ si l'équation (1) est vérifiée. Si un triplet est admissible pour $L$, tout triplet obtenu par permutation des trois valeurs $(\alpha, \beta, \gamma)$ est bien sûr aussi admissible. De même, tout triplet non nul proportionnel à ce triplet sera admissible pour un autre choix du Casimir.

Si $L$ n'est pas isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$, et à permutation des trois valeurs près, l'ensemble des triplets admissibles pour $L$ sont sur une unique droite de l'espace affine $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$. Il leur correspond donc un unique point de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma])$. Pour $\mathfrak{sl}_2$, toujours à permutation près des trois valeurs, l'ensemble des triplets admissibles forme une droite du plan projectif complexe $\mathbb{P}(\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma])$.

Des superalgèbres distinctes peuvent avoir les mêmes triplets admissibles; c'est le cas pour $\mathfrak{sl}_3$ et $\mathfrak{f}(4)$, et de même, les triplets admissibles pour $\mathfrak{g}(3)$ le sont aussi pour $\mathfrak{sl}_2$.

On peut remarquer que l'ensemble de tous les triplets admissibles se trouve sur cinq réunions de droites de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma])$:

- L'algèbre $\mathfrak{sl}_2$ est un cas particulier: $E$ est alors simple et $\Psi$ y vaut $-t$. Tous les triplets de la forme $(-t, \beta, 2t - \beta)$ sont admissibles pour $\mathfrak{sl}_2$. On a toujours, à permutation des racines de $\Psi$ près, $t + \alpha = 0$ et le polynôme $P_{\mathfrak{sl}_2} = \frac{1}{2}(t + \alpha)(t + \beta)(t + \gamma) = v - ut + t^3$ est toujours nul.
- Si $L$ est l'algèbre $\mathfrak{sl}(V)$ où $V$ est un supermodule de superdimension $\delta$, alors les triplets de la forme $(2, -2, \delta)$ sont admissibles pour pour $L$. A permutation des racines de $\Psi$ près, on a donc toujours $\alpha + \beta = 0$, donc le polynôme défini par $P_{\mathfrak{sl}} = v + ut$ est nul.
- Si $L$ est l'algèbre $\mathfrak{osp}(V)$ où $V$ est un supermodule muni d'une forme bilinéaire supersymétrique non dégénérée de superdimension $\delta$, alors les

triplets de la forme $(4,-2,\delta-4)$ sont admissibles pour $L$. A permutation des racines de $\Psi$ près, on a $\alpha+2\beta=0$, donc le polynôme défini par $P_{\mathfrak{osp}}=27v^2+18vut+2vt^3-8u^3+8u^2t^2$ est nul.

- Si $L$ est une des superalgèbres de Lie $\mathfrak{D}_{2\,1,\delta}$ où $\delta$ est un nombre complexe quelconque, alors le triplet $(1,\delta,-1-\delta)$ est admissible pour $L$. La somme $t$ des racines de $\Psi$ est nulle et on pose $P_{\mathfrak{D}_{2\,1}}=t$.
- Si $L$ est une algèbre de Lie exceptionnelle, $\Psi$ a deux valeurs propres de somme $\frac{t}{3}$. Les triplets admissibles pour $L$ sont donc de la forme $(\frac{2t}{3},\alpha(L),\frac{t}{3}-\alpha(L))$ et le polynôme $P_{\mathfrak{ex}}=27v+18ut+2t^3$ est nul.

Dans la suite, on note $S=\mathbb{Q}[t,u,v]$ l'anneau des polynômes à trois indéterminées de degré respectif $1$, $2$ et $3$. Pour chaque superalgèbre de Lie quadratique munie d'un triplet admissible $L$, on pose $I_L=Ker(f_L)$ où $f_L$ est le morphisme d'algèbre graduée de $S$ dans $\mathbb{Q}[x]$ qui envoie les indéterminées $t$, $u$ et $v$ sur leurs valeurs respectives $t(L)x$, $u(L)x^2$ et $v(L)x^3$ dans $\mathbb{Q}[x]$. Nous allons montrer le théorème:

**Théorème 2.1** *Soit $I=\bigcap_L I_L$ alors il existe un unique caractère gradué $\chi\colon \Lambda\longrightarrow S/I$ tel que pour toute superalgèbre de Lie $L$ de la liste ci-dessus, on ait:*

$$\chi_L=f_L\circ\chi$$

**Remarque** L'idéal $I$ du théorème est la somme des deux idéaux principaux engendrés par les polynômes $P$ et $Q$ suivants:

$$P=P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{D}_{2\,1}}P_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{ex}}$$

$$Q=P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{D}_{2\,1}}P_{\mathfrak{sl}_2}Q_{\mathfrak{ex}}$$

où $Q_{\mathfrak{ex}}$ est le polynôme de degré dix défini section 3.5.1. D'autre part les calculs de [11] montrent l'existence d'un morphisme d'algèbre surjectif:

$$S_0=\mathbb{Q}[t]\oplus P_{\mathfrak{sl}_2}.S\longrightarrow\Lambda_0$$

dont la composée avec $\chi$ est le morphisme quotient.

Les calculs par ordinateur de [11] montrent en outre que l'application $S_0\longrightarrow\Lambda$ est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à dix.

**Remarques sur $\Lambda$**

La nullité d'une combinaison linéaire de diagrammes est très difficile à détecter car la taille des présentations des modules de diagrammes croît très vite avec le degré. Ainsi, lorsque P. Vogel a construit les éléments $x_n$ qui forment la sous-algèbre $\Lambda_0$ de $\Lambda$, il a montré que ces éléments pris pour $n$ impair suffisent à engendrer $\Lambda_0$ et il n'y avait pas à priori de raison de supposer l'existence d'autres relations entre les $x_n$. J.A. Kneissler a ensuite montré l'existence de relations supplémentaires permettant de construire le morphisme d'algèbre $S_0 \longrightarrow \Lambda_0$. Cela donnait à penser que $\Lambda$ aurait pu être isomorphe à l'anneau $S_0$. Ceci aussi s'est révélé inexact:

Les calculs récents de P.Vogel montrent que polynôme $P$ ci-dessus, vu comme élément de $S_0$ s'envoie sur 0 dans $\Lambda_0$. La question de savoir si le polynôme $Q$ est nul dans $\Lambda_0$ reste ouverte. Cette question est reliée à la conjecture de P. Deligne (cf [4], [2] et [5]) sur l'existence d'une catégorie monoïdale, linéaire à coefficients polynomiaux, universelle pour la famille des (super)algèbres de Lie exceptionnelles.

# 3 Démonstration de l'existence de $\chi$

## 3.1 Les caractères fondamentaux

Dans [21], huit caractères gradués fondamentaux sont construits et tout caractère provenant d'une des superalgèbres de Lie simple mentionnée se déduit de l'un d'eux; ces huit caractères sont:

- $\chi_{\mathfrak{sl}}\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\delta,\beta]$ (degré($\delta$)= 1, degré($\beta$)= 2).
- $\chi_{\mathfrak{osp}}\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\delta,\alpha]$ (degré($\delta$)= 1, degré($\alpha$)= 1).
- $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\sigma_2,\sigma_3]$ (degré($\sigma_2$)= 2, degré($\sigma_3$)= 3).
- les cinq caractères $\chi_L$ à valeurs dans $\mathbb{Q}[t]$ pour les algèbres de Lie exceptionnelles $L \in \{\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8\}$.

On construit des caractères à valeurs dans des quotients de $S$ à l'aide de ces huit caractères.

## 3.2 Le caractère $\chi_1$ pour les familles $\mathfrak{sl}$ et $\mathfrak{osp}$

Dans cette section, on construit un caractère $\chi_1$ qui réalise le théorème pour tous les triplets annulés par les polynômes $P_{\mathfrak{sl}}$ et $P_{\mathfrak{osp}}$.

### 3.2.1 Le foncteur $\Phi_{\mathcal{M}}$; $\chi_{\mathfrak{sl}(\infty)} = \chi_{\mathfrak{osp}(\infty)}$

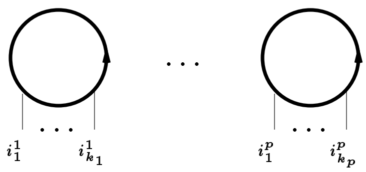
Les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}$ permettent de définir des caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(E)}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(E)}$ sur $\Lambda$ pour une valeur formelle de la superdimension de $E$. Dans les deux cas, en faisant tendre cette superdimension vers $+\infty$, on obtient deux caractères limites correspondant au même triplet $(1,0,0)$. Cette première construction permet de montrer la coïncidence de ces deux caractères limites.

En reprenant les constructions d'épaicissement de [1], il est facile de construire une catégorie $\mathcal{M}$ monoïdale, $\mathbb{Q}$–linéaire et un foncteur

$\Phi_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ qui factorise tous les foncteurs $\Phi_{\mathfrak{gl}(E)}$ et $\Phi_{\mathfrak{osp}(E)}$ (La construction repose sur les représentations standards de $\mathfrak{gl}$ et $\mathfrak{osp}$):

**Définitions et notations**

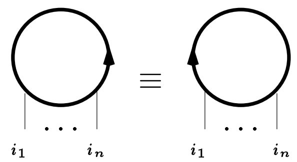
On désigne les éléments de $\mathfrak{S}_n$ comme produit de cycles disjoints. Par exemple, $(1,2)(3)$ désigne la transposition de $\mathfrak{S}_3$ qui échange 1 et 2. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'élément $(i_1^1,\dots,i_{k_1}^1)\dots(i_1^p,\dots,i_{k_p}^p)$, on désigne par $<\sigma>$ le diagramme suivant de $\mathcal{A}((S^1)^{\amalg p},[n])$:



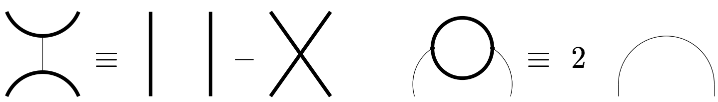

On note $\Delta$ le $(S^1,\emptyset)$–diagramme formé du seul cercle et on définit $\Sigma_n$ (respectivement $\Sigma'_n$) comme le sous $\mathbb{Q}[\Delta]$–module libre de $\mathcal{D}_\Gamma([0],[n])$ de base $\{<\sigma>,\, \sigma\in\mathfrak{S}_n\}$ (respectivement $\{<\sigma>,\, \sigma\in\mathfrak{S}_n,\ \sigma$ a un point fixe$\}$).

Ensuite, on définit les catégories quotientes $\mathcal{D}_{\mathfrak{osp}}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}$ de $\mathcal{D}_\Gamma$ (et les foncteurs quotients $\Phi_{\mathfrak{osp}}$, $\Phi_{\mathfrak{gl}}$ et $\Phi_{\mathfrak{sl}}$) obtenues en annulant les morphismes suivants:

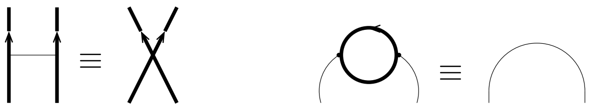
- Pour $\mathcal{D}_{\mathfrak{osp}}$:



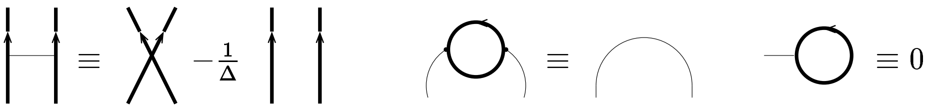

(On oublie l'orientation des courbes des diagrammes.)



- Pour $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$:



- Pour $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}$:



Cette dernière catégorie est en fait un quotient de $\mathcal{D}_\Gamma \otimes \mathbb{Q}[\Delta, \Delta^{-1}]$

**Proposition 3.1** *Soit $E$ un superespace vectoriel de dimension finie. On adopte le choix suivant pour la forme bilinéaire de $\mathfrak{osp}(E)$ (respectivement $\mathfrak{gl}(E)$ et $\mathfrak{sl}(E)$): $< x, y >= \frac{1}{2} str_E(xy)$ (respectivement $< x, y >= str_E(xy)$).*

- *Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{osp}(E),E}$ se factorise par $\Phi_{\mathfrak{osp}}$.*
- *Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}(E),E}$ se factorise par $\Phi_{\mathfrak{gl}}$.*
- *Si la superdimension de $E$ est non nulle, le foncteur $\Phi_{\mathfrak{sl}(E),E}$ se factorise par $\Phi_{\mathfrak{sl}}$.*
- *On a les isomorphismes naturels:*
  $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}([p],[q]) \simeq \Sigma_{p+q}$ *et* $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}([p],[q]) \simeq (\Sigma_{p+q/\Sigma'_{p+q}}) \otimes \mathbb{Q}[\Delta, \Delta^{-1}]$.
- $\forall K \in F_n$, $\exists ! x \in \Sigma_n$ *tel que* $\Phi_{\mathfrak{gl}}(K) = \Phi_{\mathfrak{gl}}(x)$ *et* $\Phi_{\mathfrak{sl}}(K) = \Phi_{\mathfrak{sl}}(x)$.
- *Les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}$ sont déterminés par:*
  *Si $K$ appartient à $F_n$, si $u$ est un élément de $\Lambda$, si les polynômes $P$ et $Q$ vérifient $\chi_{\mathfrak{sl}}(u) = P(\delta, \beta)$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}(u) = Q(\delta, \alpha)$ alors*

$$\Phi_{\mathfrak{gl}}(u.K) = P(\Delta, 1)\Phi_{\mathfrak{gl}}(K) \quad et \quad \Phi_{\mathfrak{osp}}(u.K) = Q(\Delta, 1)\Phi_{\mathfrak{osp}}(K)$$

Pour la démonstration de cette proposition, nous renvoyons aux arguments de [21] sections 6.3 à 6.7.

Le concept de surface marquée et l'application d'épaicissement des diagrammes introduits par Bar-Natan ([1]), sont ici utilisés pour construire $\mathcal{M}$:

**Définition de $\mathcal{M}$**

On introduit d'abord la notion de $X$–surface marquée qui sera la donnée d'une classe d'isomorphisme de surface compacte à bord munie d'une bijection entre l'ensemble fini $X$ et des tangentes non nulles au bord, prises en des points distincts. Deux telles surfaces sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme entre elles qui respecte les bijections de $X$ vers les tangentes de chacune.

On note $M(X)$ (respectivement $M[n]$) le $\mathbb{Q}$–espace vectoriel engendré par les $X$–surfaces marquées (respectivement les $[n]$–surfaces marquées) quotienté par les relations suivantes: Si $V$ est une $X$–surface marquée et si $V'$ est obtenue en remplaçant l'une des tangentes de $V$ par son opposée, alors:

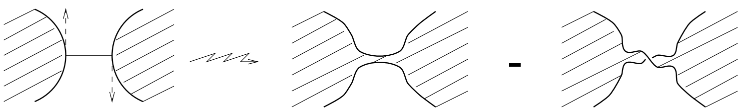
$$V' \equiv -V$$

Comme pour $F(X)$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $M[X]$ et en reproduisant la construction de $\mathcal{D}$, on définit $\mathcal{M}$ par:

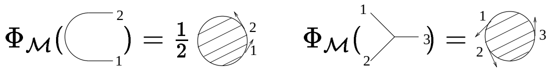
$$\mathrm{Obj}(\mathcal{M}) = \{[n],\, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{M}([p],[q]) = M([p] \amalg [q]) \simeq M[p+q]$$

Le produit tensoriel sur $\mathcal{M}$ est donné par la réunion disjointe, la composition $V_1 \circ V_2$ est construite de la manière suivante: On joint chaque tangente du but de $V_1$ à la tangente correspondante de la source de $V_2$ puis on épaissit en appliquant la règle suivante:



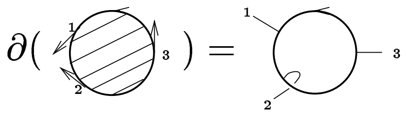
Enfin $\Phi_{\mathcal{M}}$ prend les valeurs suivantes:



Il est facile de voir que dans $M[2]$ et $M[3]$, ces deux surfaces présentent les mêmes symétries que les diagrammes correspondants et un simple calcul montre que l'image par $\Phi_{\mathcal{M}}$ d'une relation (IHX) est bien nulle.

On définit alors les foncteurs $\partial_{\mathfrak{gl}}$ et $\partial_{\mathfrak{osp}}$ entre les catégories $\mathcal{M}$ et $\mathcal{D}_\Gamma$:

Si $V$ est une $[n]$–surface marquée ayant $p$ composantes de bord et si $\epsilon$ est une orientation de $\partial V$, on désigne par $\partial(V,\epsilon)$ le diagramme formé des $p$ cercles orientés constituant le bord de $\partial V$ sur lequel on a fixé $n$ "jambes" numérotées aux lieux des $n$ tangentes:




On pose alors:

$$\partial_{\mathfrak{gl}}(V) = \sum_{x \text{ orientation de } V} \partial(V, \epsilon(x))$$

$$\partial_{\mathfrak{osp}}(V) = 2^{-p} \sum_{\epsilon \text{ orientation de } \partial V} \partial(V, \epsilon)$$

(On a noté $\epsilon(x)$ l'orientation de $\partial V$ induite par $x$ et $p$ le nombre de composante de bord de $V$.)

**Proposition 3.2** *Soit $K \in \mathcal{D}([p],[q])$ et $V = \Phi_{\mathcal{M}}(K)$.*

*$\partial_{\mathfrak{gl}}(V)$ et $\partial_{\mathfrak{osp}}(V)$ sont en fait des éléments de $\Sigma_{p+q}$ et on a:*

$$\Phi_{\mathfrak{gl}} \circ \partial_{\mathfrak{gl}}(V) = \Phi_{\mathfrak{gl}}(K) \qquad \Phi_{\mathfrak{osp}} \circ \partial_{\mathfrak{osp}}(V) = \Phi_{\mathfrak{osp}}(K)$$

La démonstration de cette propriété est la même que celle faite dans [1] pour justifier la construction des applications d'épaicissement des diagrammes.

Le $\mathbb{Q}$–espace vectoriel $M_c[0]$ ("c" pour engendré par les surfaces connexes) est naturellement muni d'une structure d'algèbre en prenant pour le produit de deux surfaces leur somme connexe. Ainsi $M_c[0]$ est l'anneau

$\mathcal{S} \simeq \mathbb{Q}[\delta, \alpha, \beta]_{/(\alpha\beta - \alpha^3)}$ où $\alpha$, $\beta$ et $\delta$ sont respectivement les classes de difféomorphismes du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$, du tore $S^1 \times S^1$ et du disque $D^2$.

De plus, toujours par la somme connexe, les modules $M_c[n]$ sont munis d'une structure de $\mathcal{S}$–module gradué de type fini. Il est possible de décrire une famille génératrice de $M_c[n]$ de la manière suivante: Notons $\Sigma$ la sphère orientée de $\mathbb{R}^3$ et $D$ le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble

$\mathcal{E}_n^p = \{V \simeq \Sigma \setminus D^{\amalg p}$ marquée par $[n]$ tangentes respectant l'orientation, chaque composante connexe de $\partial V$ étant munie d'au moins une marque $\}$

est naturellement en bijection avec

$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma$ partitionne $[n]$ en $p$ orbite$\}$.

On notera $[\sigma]$ la classe dans $M_c[n]$ de la surface de $\mathcal{E}_n = \bigcup_p \mathcal{E}_n^p$ correspondant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Il est facile de voir que $M_c[n]$ est engendré par les surfaces marquées de $\mathcal{E}_n$. De plus, à l'aide d'un difféomorphisme de $\Sigma \setminus D^{\amalg p}$ renversant l'orientation, on montre l'indentité: $[\sigma] = (-1)^n[\sigma^{-1}]$.

Si $L$ est l'algèbre $\mathfrak{sl}(E)$, on désigne par $g_L$ le morphisme d'algèbre de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{Q}[x]$ envoyant $(\alpha, \beta, \delta)$ sur respectivement $(0, x^2, \mathrm{sdim}(E)x)$.

Si $L$ est l'algèbre $\mathfrak{osp}(E)$, on désigne par $g_L$ le morphisme d'algèbre de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{Q}[x]$ envoyant $(\alpha, \beta, \delta)$ sur respectivement $(x, x^2, \mathrm{sdim}(E)x)$.

**Proposition 3.3** *Il existe un caractère gradué $\chi_{\mathcal{M}} \colon \Lambda \longrightarrow \mathcal{S}$ tel que, quels que soient $K \in F_n$ et $u \in \Lambda$, on ait la propriété*

$$\Phi_{\mathcal{M}}(u.K) = \chi_{\mathcal{M}}(u).\Phi_{\mathcal{M}}(K).$$

*De plus $\chi_{\mathcal{M}}$ mod $(\alpha) = \chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathcal{M}}$ mod $(\beta - \alpha^2) = \chi_{\mathfrak{osp}}$.*

*En particulier pour $L = \mathfrak{sl}(E)$ ou $L = \mathfrak{osp}(E)$, on a:*

$$\chi_L = g_L \circ \chi_{\mathcal{M}}$$

**Démonstration** Pour commencer, $\Phi_{\mathcal{M}}(\Lambda)$ est inclus dans la partie totalement antisymétrique de $M_c[3]$ qui est le module libre de rang un engendré par le disque $[(1,2,3)]$ ($(1,2,3)$ désigne le 3–cycle de $\mathfrak{S}_3$ qui envoie 1 sur 2). Si $u$ est un élément de $\Lambda$, on peut donc définir $\chi_{\mathcal{M}}(u)$ comme l'élément de $\mathcal{S}$ vérifiant $\Phi_{\mathcal{M}}(u) = \chi_{\mathcal{M}}(u).[(1,2,3)]$. Comme tout diagramme $K$ de $F_n$ vu comme élément de $\mathcal{D}([0],[n])$ peut s'écrire comme la composée de l'élément unité de $\Lambda$ ($u_0$ vu comme élément de $\mathcal{D}([0],[3])$) et d'un diagramme $\hat{K}$ de $\mathcal{D}([3],[n])$, on a:

$\Phi_{\mathcal{M}}(u.K) = \Phi_{\mathcal{M}}(u \circ \hat{K}) = \chi_{\mathcal{M}}(u)\Phi_{\mathcal{M}}(u_0) \circ \Phi_{\mathcal{M}}(\hat{K}) = \chi_{\mathcal{M}}(u)\Phi_{\mathcal{M}}(u_0 \circ \hat{K}) = \chi_{\mathcal{M}}(u)\Phi_{\mathcal{M}}(K)$. Les relations entre $\chi_{\mathcal{M}}$, $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}$ sont des conséquences directes de la proposition 3.2. □

### 3.2.2 Construction du caractère $\chi_1$ pour les familles $\mathfrak{sl}$ et $\mathfrak{osp}$

Le premier pas vers la construction de $\chi$ consiste à modifier le caractère $\chi_{\mathcal{M}}$ en un caractère $\chi_1$ à valeurs dans un quotient de $S$.

**Proposition 3.4** *Il existe des caractères gradués*

$$\chi_1\colon\ \Lambda \longrightarrow S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \qquad g\colon\ S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \longrightarrow \mathcal{S}$$

*tels que* $g\circ\chi_1 = \chi_{\mathcal{M}}$ *et pour toute superalgèbre de Lie* $L$ *de type* $\mathfrak{sl}$ *ou* $\mathfrak{osp}$ *on ait:*

$$\chi_L = g_L \circ \chi_{\mathcal{M}} = f_L \circ \chi_1$$

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de cette proposition.

Pour construire $g$, on peut calculer l'image par $\Phi_{\mathcal{M}}$ de la relation (1) ou utiliser la formule établie dans [21] pour chacun des caractères $\chi_L$ cités:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_L(x_n) = \frac{4tv + 2t^2u - 2t^4 - 3v - tu + 7t^3 - 7t^2 + 2t}{(1-t-2u-2v)(1-t)(1-2t)} \tag{2}$$

Dans les deux cas, on est amené à définir $f\colon\ S \longrightarrow \mathcal{S}$ par:

$$f(t) = \delta - 2\alpha$$

$$f(u) = 2\beta + 6\alpha^2 - \alpha\delta$$

$$f(v) = 16\alpha^3 - 2\delta\beta - 2\delta\alpha^2$$

On trouve alors que le noyau de $f$ est l'idéal principal $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$ ce qui permet de factoriser $f$ en un morphisme d'algèbre $g\colon\ S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \hookrightarrow \mathcal{S}$. Pour pouvoir factoriser $\chi_{\mathcal{M}}$ par $g$, il faut montrer que $\chi_{\mathcal{M}}(\Lambda)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(g)$.

Pour cela on considère les superalgèbres de Lie suivantes qui admettent plusieurs représentations standards:

- $L_1 = \mathfrak{so}(5) \simeq L_1' = \mathfrak{sp}(4)$
- $L_2 = \mathfrak{sl}(4) \simeq L_2' = \mathfrak{so}(6)$
- $L_3 = \mathfrak{sl}(2,1) \simeq L_3' = \mathfrak{osp}(2,2)$

En suivant pour le Casimir de chacune de ces algèbres les conventions de la section précédente, chacun des isomorphismes envoie le Casimir $\Omega_i$ de $L_i$ sur $\lambda_i\Omega_i'$ où $\Omega_i'$ désigne le Casimir de $L_i'$. En particulier, ces algèbres étant isomorphes, on a: $\forall u \in \Lambda$, $\chi_{L_i}(u)_{|x=1} = \chi_{L_i'}(u)_{|x=\lambda_i}$. Ces paires de caractères pouvant être calculées par l'intermédiaire de $\chi_{\mathcal{M}}$, cela fournit les informations suivantes:

On définit six caractères sur $\mathcal{S}$ par leurs valeurs sur le triplet $(\delta,\alpha,\beta)$:

- $\Psi_1\colon\ (\delta,\alpha,\beta) \mapsto (10,2,4)$
- $\Psi_1'\colon\ (\delta,\alpha,\beta) \mapsto (4,-1,1)$

- $\Psi_2\colon (\delta,\alpha,\beta) \mapsto (4,0,1)$
- $\Psi'_2\colon (\delta,\alpha,\beta) \mapsto (6,1,1)$
- $\Psi_3\colon (\delta,\alpha,\beta) \mapsto (2,0,4)$
- $\Psi'_3\colon (\delta,\alpha,\beta) \mapsto (0,-1,1)$

La composée de $\chi_{\mathcal{M}}$ avec chacun de ces morphismes donne une renormalisation du caractère de l'une des six algèbres ci-dessus et on a

$$\chi_{\mathcal{M}}(\Lambda) \subset \bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\,(\Psi'_i - \Psi_i)$$

De plus, ces informations sur l'image de $\chi_L$ sont suffisantes pour démontrer la proposition car:

**Lemme 3.1**

$$Im\,g = \bigcap_{i=1}^{3} Ker\,(\Psi'_i - \Psi_i)$$

**Démonstration** Pour voir que $\mathrm{Im}\,g \subset \bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\,(\Psi'_i - \Psi_i)$, il suffit de vérifier que $\Psi'_i(x)$ et $\Psi_i(x)$ coïncident pour $i \in \{1,2,3\}$ et $x \in \{t,u,v\}$. L'application $g$ étant graduée et injective, pour montrer l'égalité entre les espaces ci-dessus, il suffit de montrer l'égalité de leurs dimensions en chaque degré. On fait le calcul pour $\mathrm{Im}\,g$ en utilisant les séries génératrices:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S)_n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})})_n)t^n = \frac{1-t^9}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((\mathcal{S})_n)t^n = \frac{1-t^3}{(1-t)(1-t)(1-t^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{codim}((\mathrm{Im}\,g)_n)t^n =$$

$$\frac{1-t^9}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} - \frac{1-t^3}{(1-t)(1-t)(1-t^2)} = \frac{3}{1-t} - 3 - 2t - t^2 - t^3$$

Donc l'image de g est de codimension 3 en chaque degré $n \geq 4$.

D'autre part un calcul facile donne en degré $n \geq 3$:

$$\det\left(\left((\Psi_i' - \Psi_i)(\delta^{n+1-j}\alpha^{j-1})\right)_{i,j=1\ldots 3}\right) = 2^{n+1}6^{n-2}(5 \times 4^{n-2} - 2 \times 10^{n-2})$$

Ce déterminant ne s'annule que pour $n = 3$, ce qui assure qu'en chaque degré $n \geq 4$, les formes linéaires induites par $(\Psi_i' - \Psi_i)$ sont indépendantes et donc que l'intersection de leur noyau est de codimension trois. Il reste à vérifier le lemme en bas degrés, ce qui peut se faire directement, terminant ainsi la démonstration. □

**Remarque** Il semble difficile de traduire de manière géométrique la restriction de l'image vde $\chi_{\mathcal{M}}$ bien que ce caractère ait une construction par épaicissement des diagrammes.

### 3.3 Le caractère $\chi_2$ pour les familles $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$ et $\mathfrak{D}_{2\,1}$

En notant $R = \mathbb{Q}[a,b,c]_{/(a+b+c)}$ et $k$ son corps de fractions, il existe une $R$–superalgèbre de Lie $\mathfrak{D}_{2\,1}$ munie d'un élément de Casimir $\Omega \in \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes \mathfrak{D}_{2\,1}$ telle que

- En étendant les coefficients à $k$, $\Omega$ est un élément de Casimir non dégénéré de $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}} \otimes_k \overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ (où $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}} = \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_R k$).
- Vue comme sous-algèbre de $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}$, $\mathfrak{D}_{2\,1}$ se décompose en somme directe orthogonale: $\mathfrak{D}_{2\,1} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus X$ où $L_i$ est une sous algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q}) \otimes R$, $X$ est la partie impaire de $\mathfrak{D}_{2\,1}$ et l'action de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ sur $X$ induite par le crochet est donnée par le produit tensoriel des représentations standards de $L_1$, $L_2$ et $L_3$.
  La décomposition étant orthogonale, on a: $\Omega = -a\omega_1 - b\omega_2 - c\omega_3 + \pi$ avec $\omega_i \in L_i \otimes L_i$ et $\pi \in X \otimes X$.
- Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ agit sur $R$ (par permutation de $\{a,b,c\}$) et sur $\mathfrak{D}_{2\,1}$ (par permutation des trois copies de $\mathfrak{sl}_2$) de manière compatible avec la structure de $R$–module. Cette action laisse le Casimir invariant et commute au crochet de Lie.
- Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}\colon \mathcal{D}_b \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ induit un caractère gradué $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ (où $\mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ est le sous anneau de $R$ engendré par $\sigma_2 = ab + bc + ca$ de degré 2 et $\sigma_3 = abc$ de degré 3).
- Soit $\alpha$ un nombre complexe et $\phi\colon R \longrightarrow \mathbb{C}$ est le morphisme d'anneau défini par:
  $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = 1$ et $\phi(c) = -1 - \alpha$. Alors $\mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_\phi \mathbb{C} \simeq \mathfrak{D}_{2\,1,\alpha}$ (noté parfois $\mathfrak{osp}_\alpha(4,2)$) et $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1,\alpha}} = \phi \circ \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$.

Tous ces résultats sont immédiatement conséquences de ceux établis dans [21] sections 6.10 à 6.15 (où l'anneau de coefficients considéré est $\mathbb{Z}[a,b,c]_{/(a+b+c)}$ au lieu de $R$). De plus, il y est démontré que l'opérateur $\Psi$ a pour valeurs propres $\{2a,2b,2c\}$. Ainsi le changement de variables $\sigma_2 \mapsto -\frac{u}{2}$ et $\sigma_3 \mapsto \frac{v}{4}$ permet de considérer $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$ comme un caractère à valeurs dans $S_{/(t)}$.

**Proposition 3.5** *Il existe un caractère gradué $\chi_2\colon \Lambda \longrightarrow S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})}$ factorisant les caractères $\chi_1$ et $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$*

*(c'est à dire: $\chi_2 \bmod (P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}) = \chi_1$ et $\chi_2 \bmod (t) = \chi_{\mathfrak{D}_{21}}$).*

**Démonstration** L'anneau $S$ étant factoriel, l'intersection des idéaux $(t)$ et $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$ est l'idéal $(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$. Donc le diagramme commutatif suivant est un carré cartésien:

$$\begin{array}{ccc} S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(t)} & \longrightarrow & S_{/(t)+(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \end{array}$$

Ainsi, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \xrightarrow{\chi_1} & S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} & & \\ \chi_{\mathfrak{D}_{21}} \downarrow & & \downarrow & & \\ S_{/(t)} & \longrightarrow & S_{/(t)+(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} & \hookrightarrow & S_{/(t)+(v)} \times S_{/(t)+(27v^2-8u^3)} \end{array}$$

(On a rajouté la dernière injection pour aboutir dans un produit d'anneaux intègres).

- La coïncidence des deux caractères $\Lambda \longrightarrow S_{/(t)+(27v^2-8u^3)}$ est une conséquence directe de l'isomorphisme entre les superalgèbres de Lie $L = \mathfrak{D}_{21,\alpha} \simeq \mathfrak{osp}(4,2)$ pour $\alpha \in \{1,-2,-\frac{1}{2}\}$ (on a alors par exemple $(a,b,c) = (1,-2,1)$ donc $t(L) = 0$, $u(L) = 6$ et $v(L) = -8$). Le premier caractère correspond à factoriser $\chi_L$ par $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$, l'autre revient à factoriser $\chi_L$ par $\chi_1$ ou $\chi_{\mathcal{M}}$.
- Le quotient de $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$ par l'idéal $(v)$ correspond au caractère induit par l'algèbre de Lie $L = \mathfrak{D}_{21,\alpha}$ dans le cas dégénéré où $\alpha$ vaut $0$ ou $-1$. Dans ce cas, $L$ contient un idéal $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{psl}(2,2)$ et le Casimir $\Omega$ appartient à $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$. Ainsi une application directe du lemme 2.1 pour $(\phi, \mathfrak{h} \hookrightarrow L)$, montre que $\chi_L$ coïncide avec $\chi_{\mathfrak{psl}(2,2)}$ qui se factorise par $\chi_1$. Ce caractère est en fait le caractère augmentation (nul sauf en degré 0) de $\Lambda$. $\square$

## 3.4 Le caractère $\chi_3$ pour les familles $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$, $\mathfrak{D}_{21}$ et $\mathfrak{sl}_2$

### 3.4.1 Théorème d'existence

Le cas de l'algèbre $\mathfrak{sl}_2$ est un cas particulier: On peut choisir pour $(t,u,v)$ n'importe quelle valeur pourvu que le polynôme $P_{\mathfrak{sl}_2}=v-ut+t^3$ soit nul; de plus ce choix n'affecte bien sûr pas la valeur de $\chi_{\mathfrak{sl}_2}\in\mathbb{Q}[x]$. On peut donc considérer $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ comme un caractère non surjectif à valeurs dans $S_{/P_{\mathfrak{sl}_2}}$ en le composant avec l'inclusion de $\mathbb{Q}[x]$ dans $S_{/P_{\mathfrak{sl}_2}}$ qui envoie $\chi_{\mathfrak{sl}_2}(t)$ sur $t$.

**Proposition 3.6** *Il existe un caractère gradué $\chi_3\colon\ \Lambda\longrightarrow S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})}$ factorisant les caractères $\chi_2$ et $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$*

*(c'est à dire: $\chi_3$ mod $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}t)=\chi_2$ et $\chi_3$ mod $(P_{\mathfrak{sl}_2})=\chi_{\mathfrak{sl}_2}$).*

Bien que le cas $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ ait déjà été traité précédemment (par exemple comme sous-cas de $\mathfrak{sl}_n$), son étude dans ce cadre permet d'affiner le caractère $\chi_2$.

**Démonstration** De même que précédemment, $S$ étant factoriel, l'intersection des idéaux $(P_{\mathfrak{sl}_2})$ et $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}t)$ est l'idéal $(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})$. Donc le diagramme commutatif suivant est un carré cartésien:

$$\begin{array}{ccc} S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})} & \longrightarrow & S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \end{array}$$

Donc il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\chi_2} & S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \chi_{\mathfrak{sl}_2}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}[t]\subset S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})} & \longrightarrow & S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})}\hookrightarrow S_{/I_1}\times S_{/I_2}\times S_{/I_3}\times S_{/I_4}\times S_{/I_5} \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1&=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(2u-t^2)=(2v+t^3)+(2u-t^2)\\ I_2&=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(u-5t^2)=(v-4t^3)+(u-5t^2)\\ I_3&=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(8u-5t^2)=(8v+3t^3)+(8u-5t^2)\\ I_4&=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(u-t^2)=(v)+(u-t^2)\\ I_5&=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(t^2)=(v-ut)+(t^2) \end{aligned}$$

L'anneau $S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})}$ s'injecte dans le produit d'anneaux ci-dessus dont tous les facteurs, sauf le dernier, sont intègres et en fait isomorphes à $\mathbb{Q}[t]$ ce qui permet de considérer la flèche horizontale du bas sur chacun de ces facteurs:

$\mathbb{Q}[t] \subset S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})} \longrightarrow S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \longrightarrow S_{/I_k} \simeq \mathbb{Q}[t])$

comme étant l'identité sur $\mathbb{Q}[t]$.

- On a $I_1 = I_{\mathfrak{sl}_n}$ pour $n = 2$ et la commutativité du diagramme correspond sur ce facteur au fait que $\chi_{\mathfrak{sl}}$ factorise $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$.
- De même $I_2 = I_{\mathfrak{so}_3}$, $I_3 = I_{\mathfrak{sp}_2}$ et $I_4 = I_{\mathfrak{so}_4}$; Les isomorphismes bien connus entre les algèbres de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ permettent facilement de voir que le diagramme commute sur chacun des facteurs correspondant.

La seule difficulté est de montrer la commutativité du diagramme sur le dernier facteur: l'image du caractère $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ est en fait contenue dans $\mathbb{Q}[t]$ et sa composée avec $S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})} \longrightarrow S_{/I_5}$ est donc nulle en degré supérieur ou égal à deux (car $I_5$ contient l'idéal $(t^2)$). Il s'agit donc de montrer que $\chi_2 \bmod I_5$ est aussi nul en degré supérieur où égal à deux.

On a déjà vu que $\chi_2 \bmod I_{\mathfrak{psl}(2,2)} (= (v) + (t))$ était nul en degré strictement positif. Mais $I_5 \subset ((v) + (t))$ et l'application quotient $S_{/I_5} \longrightarrow S_{/(v)+(t)}$ est un isomorphisme en degré pair donc $\chi_2 \bmod I_5$ est nul en degré pair.

Si $x \in \Lambda$ est de degré $n = 2p+1$, on écrit $\chi_2(x) = \lambda(x)u^p t + \lambda'(x)u^{p-1}v + r(x)$ avec $\lambda(x), \lambda'(x) \in \mathbb{Q}$ et $r(x) \in ((v - tu) + (t^2))$.

On a alors: $\chi_2(x) \equiv (\lambda(x) + \lambda'(x))u^p t \bmod ((v-tu)+(t^2))$. Il s'agit de montrer que $\lambda + \lambda' = 0$. Revenant aux caractères fondamentaux $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ et $\chi_{\mathfrak{sl}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}[\delta, \beta]$ cela revient à montrer que:

si $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}(x) \equiv \mu\sigma_3\sigma_2^{p-1} \bmod (\sigma_3^2)$

alors $\chi_{\mathfrak{sl}}(x) \equiv -\mu\delta\beta^p \bmod (\delta^2)$.

Ce point est plus délicat et sa démonstration fait l'objet des sections suivantes.

### 3.4.2 Propriétés du caractère $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$

Le but de cette section est de démontrer que la réduction modulo $a^2$ de $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$ peut être calculée par l'intermédiaire du foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$. On reprend ici les notations introduites dans la partie 3.3. De plus, on note $F_n^+$ le sous-module de $F_n$ engendré par les diagrammes ayant au moins une boucle. Afin d'harmoniser les notations, on utilisera souvent $a_1$ pour $a$, $a_2$ pour $b$ et $a_3$ pour $c$. On a alors

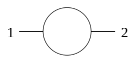
**Lemme 3.2** *Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ a les propriétés suivantes:*

- $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}\colon F_2 \longrightarrow {\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 2}$ *est nulle*
- $\forall n \geq 3$, $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}\colon F_n^+ \longrightarrow {\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes n}$ *est en fait à valeurs dans* $\bigoplus E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_n$ *où* $E_i$ *parcourt* $\{a_1L_1, a_2L_2, a_3L_3, X\}$*. En particulier, par restriction, la dualisation dans* $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ *induit:*

$$F_n^+ \longrightarrow Mod_{\mathfrak{D}_{2\,1}}({\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes n}, R)$$

*(morphismes de $\mathfrak{D}_{2\,1}$–modules).*

**Démonstration** Pour la première affirmation, il suffit de considérer que $F_2$ est un $\Lambda$–module libre de rang 1 engendré par le diagramme



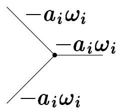

Dont l'image par $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ est nulle.

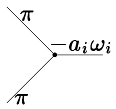
Pour démontrer la seconde affirmation, on choisit un diagramme $K$ connexe de $F_n^+$ et on décompose le calcul de $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)$ de la manière suivante: on colorie chaque arête de $K$ par $\Omega$ puis on utilise l'application de réduction $\varphi = \bigotimes_x \varphi_x$ où $\varphi_x$ est "la réduction autour du sommet trivalent $x$" par l'application trilinéaire antisymétrique invariante $< [\cdot,\cdot], \cdot >$ (ceci revient à décomposer $K$ comme composé du produit tensoriel d'autant d'éléments de Casimir que $K$ comporte d'arêtes avec un diagramme induit par une permutation puis avec un diagramme produit tensoriel de $n$ fois l'identité et d'autant de fois le diagramme $< [.,.], . >$ que $K$ comporte de sommets). On peut remarquer que l'application $\varphi$ est bien définie dès que les arêtes de $K$ sont coloriées par une application de l'ensemble de ses arêtes vers $S^2L$ et on a aussitôt la formule consistant à "développer" le diagramme $K$ colorié par $\Omega$:

$$\Phi_L(K) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \varphi(c(K))$$

où $\mathcal{C} = \{c : \{\text{arêtes de } K\} \longrightarrow \{-a_1\omega_1; -a_2\omega_2; -a_3\omega_3; \pi\}\}$ et $c(K)$ désigne $K$ colorié par $c$.

Or pour l'algèbre $\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}$, l'application $< [\cdot,\cdot], \cdot >$ est nulle sur $L_i \otimes L_j \otimes X$ si $i \neq j$ et sur $X \otimes X \otimes X$. Donc $\varphi(c(K))$ est nul dès que l'un des sommets de $c(K)$ n'est pas d'une des deux formes suivantes:

type (1) 

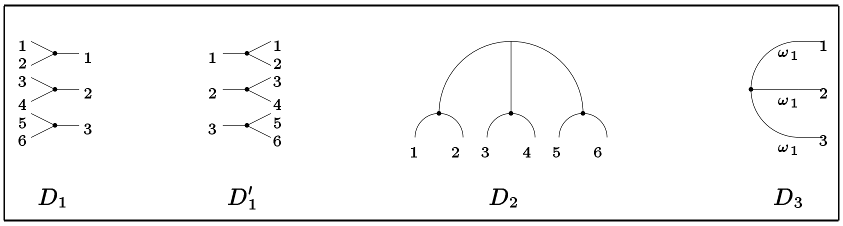
type (2) 

Un diagramme colorié dont tous les sommets sont de type (1) ou (2) sera dit admissible.

De plus, $< [\cdot,\cdot],\cdot >$ envoie $L_i \otimes L_i \otimes L_i$ sur $a_i^{-1}R$ et $L_i \otimes X \otimes X$ sur $R$; il suffit donc de voir (par exemple pour $i = 1$) que si $c(K)$ est admissible, si $m$ désigne le nombre d'arêtes intérieures de $c(K)$ de couleur $-a_1\omega_1$, $s_3$ le nombre de sommets de $c(K)$ de type (1) pour $i = 1$ et $s_1$ le nombre de sommets univalents de $K$ dont l'arête issue (arête dite extérieure) est de couleur $-a_1\omega_1$, alors $m \geq s_3 + s_1$.

- Si $c(K)$ est un diagramme $K$ à $d$ boucles pour lequel toutes les arêtes sont de couleur $-a_1\omega_1$, les formules reliant le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un diagramme à son degré donnent: $m = 2s_1 + 3d - 3$ et $s_3 = s_1 + 2d - 2$ donc $m - s_3 - s_1 = d - 1 \geq 0$ car $d > 0$.
- Sinon, le sous-graphe de $c(K)$ formé des arêtes coloriées par $-a_1\omega_1$ est formé de plusieurs graphes connexes dont les sommets univalents proviennent soit des sommets univalents de $K$, soit de sommets de type (2) de $c(K)$. De plus, $K$ étant connexe, chaque composante connexe $K_j$ de ce sous-graphe possède un nombre $s_{2,j} > 0$ de sommets univalents provenant de sommets de type (2) de $c(K)$. On note de même $d_j$ le nombre de boucles de $K_j$, $n_j$ son nombre de sommets univalents, $m_j$ son nombre d'arêtes et $s_{3,j}$ son nombre de sommets trivalents. On a $s_1 = \sum_j (n_j - s_{2,j})$, $s_3 = \sum_j s_{3,j}$ et $m = \sum_j m_j$. Ceci donne l'inégalité cherchée en sommant sur $j$ les formules $m_j = 2n_j + 3d_j - 3$ et $s_{3,j} = n_j + 2d_j - 2$. On obtient: $m - s_3 - s_1 = \sum_j (d_j + s_{2,j} - 1) \geq 0$ car $s_{2,j} > 0$.

Ceci conclut la démonstration du lemme. □




Considérons maintenant $K$ un diagramme représentant un élément de $F_6^+$ de degré impair. Soit $G$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ laissant fixe $\{\{1;2\};\{3;4\};\{5;6\}\}$. On définit le morphisme de groupe $\epsilon$ sur $G$ en remarquant que tout élément $\sigma \in G$ agit par $\epsilon(\sigma) \in \{-1;+1\}$ sur le diagramme $D_2$ ci-dessus de $F_6$.

On notera les éléments de $G$ comme produits de cycles disjoints; par exemple on a $\epsilon((1,4,2,3)) = 1$. Soit

$$\tilde{K} = \frac{1}{48} \sum_{\sigma \in G} \epsilon(\sigma)\sigma(K).$$

Le morphisme $D_1 \in \mathcal{D}([6],[3])$ envoie $\tilde{K}$ sur $\tilde{K}_3 \in F_3 \otimes_{\mathfrak{S}_3} \mathbb{Q}^- \simeq \Lambda$. De plus, le degré de $\tilde{K}_3$ dans $\Lambda$ est égal à celui de $K$ moins deux.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3) \equiv \alpha\sigma_3\sigma_2^p \bmod (\sigma_3^2) \equiv \alpha a_1 (a_2 a_3)^{p+1}$ modulo $a_1^2$.

On construit un tenseur dont l'image par $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)$ (vu comme élément de $\mathrm{Hom}(L^{\otimes 6},\mathbb{Q})$) est congrue à $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)$ modulo $(a_1^2)$:

Soit $x_0 = -a_1\varphi(D_3) \in L_1^{\otimes 3}$ de sorte que considérant $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)$ comme un élément de $\mathrm{Mod}(L^{\otimes 3},\mathbb{Q})$, on ait:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)(x_0) &= \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)\Phi_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}}\left(\quad\right)(x_0) = \frac{12}{a_1}\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)\\ &\equiv 12\alpha(a_2a_3)^{p+1} + a_1 r \text{ avec } r \in R\end{aligned}$$

D'autre part, le calcul montre que $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(D_1')(x_0)$ s'écrit $x_1 + a_1x_2$ avec $x_1 \in X^{\otimes 6}$ et $x_2 \in {\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}$, le tenseur $x_1$ ayant de plus la propriété d'être $(G,\epsilon)$–invariant (i.e. $\forall \sigma \in G$, $\sigma(x_1) = \epsilon(\sigma)x_1$). Ainsi

$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)(x_0) = \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}) \circ \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(D_1')(x_0) = \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_1) + a_1\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_2)$$

mais $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_2)$ est un élément de $R$ d'après le lemme précédent et puisque $x_1$ est $(G,\epsilon)$–invariant, on a l'égalité $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_1) = \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)(x_1)$; donc

$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)(x_1) \equiv 12\alpha(a_2a_3)^{p+1} \text{ modulo } (a_1).$$

On construit maintenant une forme linéaire $\eta''$ sur $\mathfrak{gl}_{2,2}^{\otimes 6}$ telle que l'application $K \mapsto \alpha$ se factorise en $\eta'' \circ \Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$.

Soit $I$ le noyau du morphisme d'anneau $f\colon R \longrightarrow \mathbb{Q}$ défini par $f(a_1) = 0$ et $f(a_2) = 1$. La réduction des coefficients grâce à $f$ induit $p\colon \mathfrak{D}_{2\,1} \longrightarrow {\mathfrak{D}_{2\,1}}' = \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_f \mathbb{Q}$. Le morphisme d'algèbre $p$ est surjectif et possède une section d'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$–gradué: $s\colon {\mathfrak{D}_{2\,1}}' \hookrightarrow \mathfrak{D}_{2\,1}$ induite par le monomorphisme $\mathbb{Q} \hookrightarrow R$ (on a $p \circ s = Id_{{\mathfrak{D}_{2\,1}}'}$). On notera $X'$ l'image par $s$ de la partie impaire de ${\mathfrak{D}_{2\,1}}'$ de sorte que $X$ se décompose en $X' \oplus (IX')$. Il se trouve que $< X', X' >$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ et $x_1$ appartient à $X'^{\otimes 6}$. Par conséquent, les formes $\mathbb{Q}$–linéaires $y \mapsto f(< x_1, y >_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}})$ et $y \mapsto < x_1, s \circ p(y) >_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}}$ sont égales. Mais considérant $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)$ comme un élément de ${\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}$, on a:

$$\begin{array}{ll} & < x_1, \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K) >_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}} \equiv 12\alpha(a_2a_3)^{p+1} \text{ modulo } (a_1) \\ \text{donc} & f(< x_1, \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K) >_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}}) = (-1)^{p+1}12\alpha \\ \text{et donc} & < x_1, (s \circ p)_*(\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)) >_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}}) = (-1)^{p+1}12\alpha. \end{array}$$

Ainsi l'application $\eta\colon F_6 \longrightarrow \mathbb{Q}$, qui associe au diagramme $K'$ l'élément $\frac{(-1)^{p+1}}{12} f(< x_1, \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K') >_{\overline{\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}})$, se factorise en $\eta = \eta' \circ \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}', p_*\Omega}$ où $\eta'$ est une forme linéaire sur ${\mathfrak{D}_{2\,1}'}^{\otimes 6}$ nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{D}_{2\,1}')_{\bar{1}})^{\otimes 6}$.

Considérons alors les morphismes de superalgèbres de Lie suivants:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{psl}_{2,2} & \simeq \mathfrak{h} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{D}_{2\,1}' \\ & \downarrow j & \\ \mathfrak{gl}_{2,2} \overset{q}{\twoheadrightarrow} & \mathfrak{pgl}_{2,2} & \end{array}$$

$\mathfrak{h}$ est l'idéal de $\mathfrak{D}_{2\,1}'$ déjà rencontré à la section 3.3. Il est facile de constater que si l'on muni $\mathfrak{gl}_{2,2}$ du Casimir induit par la représentation standard, alors son image par $q_*$ dans $\mathfrak{pgl}_{2,2}^{\otimes 2}$ appartient en fait à $j_*(\mathfrak{psl}_{2,2}^{\otimes 2})$.

On peut maintenant appliquer le lemme 3.2 à chacun de ces morphismes en prenant pour $\phi$ l'identité de $\mathbb{Q}$:

$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}', p_*\Omega}(K) = i_* \circ \Phi_{\mathfrak{psl}_{2,2}}(K)$$

$$q_*(\Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}(K)) = \Phi_{\mathfrak{pgl}_{2,2}}(K) = j_*(\Phi_{\mathfrak{psl}_{2,2}}(K))$$

Or les morphismes $i$, $j$ et $q$ sont bijectifs en degré impair. Comme $\eta'$ ne dépend que de la composante sur $((\mathfrak{psl}_{2,2})_{\bar{1}})^{\otimes 6}$ de $\Phi_{\mathfrak{psl}_{2,2}}(K)$, il existe une forme linéaire $\eta''\colon \mathfrak{gl}_{2,2}^{\otimes 6} \longrightarrow \mathbb{Q}$ nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{gl}_{2,2})_{\bar{1}})^{\otimes 6}$ vérifiant $\eta = \eta'' \circ \Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$.

### 3.4.3 Propriétés du foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}}$

Dans toute cette section, $E$ désigne un supermodule (c'est à dire un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel muni d'une $\mathbb{Z}_2$–graduation) et on continue d'identifier $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}([p],[q])$ avec $\Sigma_{p+q}$.

On notera $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}_0}$ la catégorie quotientée de $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ par $\Delta \equiv 0$ et $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}\colon \mathcal{D}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{gl}_0}$.

On peut maintenant faire quelques remarques sur l'image de $\Phi_{\mathfrak{gl}}$:

- $\partial_{\mathfrak{gl}}$ est déterminé sur $M[n]$ par la formule
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \partial_{\mathfrak{gl}}([\sigma]) = < \sigma > + (-1)^n < \sigma^{-1} > .$$
En conséquence, $\Phi_{\mathfrak{gl}}(F_n) = \Phi_{\mathfrak{gl}} \circ \partial_{\mathfrak{gl}} \circ \Phi_{\mathcal{M}}(F_n)$ est invariant par l'endomorphisme de $\Sigma_n$ défini sur sa base par
$< \sigma > \mapsto \frac{1}{2}(< \sigma > + (-1)^n < \sigma^{-1} >)$.

- Ensuite $\Phi_{\mathcal{M}}$ respecte le degré et $\beta$ est de degré pair donc l'image par $\Phi_{\mathcal{M}}$ d'un élément de degré impair de $F_n$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}[\beta]$ d'éléments $[\sigma] \in \bigcup_p \mathcal{E}_n^{2p+1}$ (pour des permutations partitionnant $[n]$ en un nombre impair d'orbites) plus un élément de $\alpha M_c[n] + \delta M_c[n]$. Ainsi, $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_n)$ est inclus dans le sous-$\mathbb{Q}$–espace vectoriel de $\Sigma_n$ engendré par les diagrammes ayant un nombre impair de composantes connexes.

- Enfin, on peut préciser l'image de $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_n)$ en utilisant le fait que, si $\mathrm{sdim}(E) = 0$, pour les morphismes canoniques $q\colon \mathfrak{gl}(E) \twoheadrightarrow \mathfrak{pgl}(E)$ et $j\colon \mathfrak{psl}(E) \hookrightarrow \mathfrak{pgl}(E)$, on a: $q_*\Phi_{\mathfrak{gl}(E)}(F_n) = j_*\Phi_{\mathfrak{psl}(E)}(F_n) \subset q_*(\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n})$. Soit $I$ l'élément identité de $\mathfrak{gl}(E)$. Notons que $\mathrm{Ker}\,(q_*)$ est l'idéal engendré par $I$ dans l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{gl}(E)$. De plus $\mathfrak{sl}(E)$ est l'orthogonal de $I$ dans $\mathfrak{gl}(E)$ et ainsi l'orthogonal du noyau de $q_*$ est l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{sl}(E)$. L'image de $\Phi_{\mathfrak{gl}(E)}(F_n)$ est dans la somme de $\mathrm{Ker}\,(q_*)$ et de $\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}$; l'orthogonal de cette somme est l'intersection de $\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}$ et de $\mathrm{Ker}\,(q_*)$, c'est l'espace engendré par $\{x \otimes I \otimes y \in \mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}\}$. Considérant $F_n \subset \mathcal{D}([n],[0])$ et en utilisant la dualité dans $\mathfrak{gl}(E)$, on a ainsi,

$$\forall K \in F_n,\ \forall x \otimes I \otimes y \in \mathfrak{sl}(E)^{\otimes n},\ \Phi_{\mathfrak{gl}(E)}(K)(x \otimes I \otimes y) = 0$$

Si $i \leq n$, on note $< \sigma \setminus i >$ l'élément $\Delta < \mu >$ si $\sigma(i) = i$ sinon l'élément $< \mu >$ de $\Sigma_{n-1}$ où $\mu$ est l'élément de $\mathfrak{S}_{n-1}$ qui, conjugué avec la bijection croissante de $[n-1]$ vers $[n] \setminus \{i\}$, vaut $\mu'$ défini par $\mu'(j) = \sigma(j)$ si $\sigma(j) \neq i$, $\mu'(j) = \sigma(i)$ sinon. Revenant à la définition de $\Phi_{gl(E),E}$, il est clair que si $x \in \mathfrak{gl}(E)^{\otimes i-1}$ et $y \in \mathfrak{gl}(E)^{\otimes n-i}$ alors

$$\Phi_{gl(E),E}(< \sigma >)(x \otimes I \otimes y) = \Phi_{gl(E),E}(< \sigma \setminus i >)(x \otimes y)$$

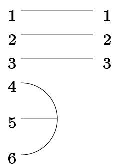
Enfin $\Phi_{gl(E),E}$ induit un morphisme de $\Sigma_n$ dans $(\mathfrak{gl}(E)^{\otimes n})^*$ donc par restriction un morphisme de $\Sigma_n$ dans $(\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n})^*$. L'intersection des noyaux de ces morphismes (lorsque $E$ varie) est $\Sigma_n'$. En effet, si $\dim(E) \geq n$, l'unique permutation de $\Sigma_1$ est envoyée sur $(x \mapsto \mathrm{str}_E(x))$ qui est nul sur $\mathfrak{sl}(E)$ et donc toute permutation ayant un point fixe est envoyée sur zéro. Réciproquement, on peut associer à la permutation $\sigma$ de $\mathfrak{S}_n$ un tenseur $x_\sigma \in \mathfrak{gl}(E)^{\otimes n}$ tel que $\Phi_{gl(E),E}(< \sigma >)(x_\mu) = 1$ si $\mu = \sigma$, 0 sinon. Pour construire de tels tenseurs, on identifie $\mathfrak{gl}(E)$ à $\mathfrak{gl}(\dim(E_{\bar 0}), \dim(E_{\bar 1}))(\mathbb{Q})$ et notant $e_{i,j}$ les matrices élémentaires, on définit d'abord $x_{(1,2,\dots k_1)(k_1+1,k_1+2,\dots k_2)\dots(k_p+1,\dots n)} = (e_{1,2} \otimes e_{2,3} \otimes \dots \otimes e_{k_1,1}) \otimes (e_{k_1+1,k_1+2} \otimes \dots \otimes e_{k_2,k_1+1}) \otimes \dots \otimes (e_{k_p+1,k_p+2} \otimes \dots \otimes e_{n,k_p+1})$

puis $x_{\mu\sigma\mu^{-1}} = \mu(x_\sigma)$; si $\sigma$ n'a pas de point fixe, $x_\sigma$ appartient à $\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}$. Ainsi notant $\Sigma'_n$ le sous-module de $\Sigma_n$ engendré par les permutations ayant un point fixe, le morphisme suivant est nul:

$$f_i\colon F_n \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{gl}_0}} \Sigma_{n/(\Delta\Sigma_n)} \xrightarrow{<\sigma>\mapsto<\sigma\backslash i>} \Sigma_{n-1/(\Delta\Sigma_{n-1})} \longrightarrow \Sigma_{n-1/\Sigma'_{n-1}+(\Delta\Sigma_{n-1})}$$

- On peut faire une dernière remarque sur $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_6)$: elle provient du fait que $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ est nul sur $F_3$ en degré supérieur ou égal à $3$. $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_6)$ est donc inclus dans le noyau de l'application composition avec le diagramme suivant:

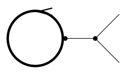
$D_4$




### 3.4.4 Démonstration de l'existence du caractère $\chi_3$

Notons $\mu$ la forme linéaire définie sur $F_6$ en degré impair par $\chi_{\mathfrak{sl}}(D_1 \circ \tilde{K}) = -\mu\delta\beta^p$ modulo $(\delta^2)$ (avec les notations déjà utilisées dans (3.4.2)). Nous allons montrer que $\mu = \eta$.

D'abord on a: $\Phi_{\mathfrak{gl}}(D_1 \circ \tilde{K}) \equiv \mu(K)\Delta\,(<(1,2,3)> - <(1,3,2)>)$ modulo $\Delta^2\Sigma_3$. On définit une forme linéaire $g$ sur $\Sigma_3$ par $g(\Sigma'_3 + \Delta^2\Sigma_3) = 0$, $g(<\sigma>) = 0$ si $\sigma$ n'est pas un 3–cycle, $g(<(1,2,3)>) = -g(<(1,3,2)>) = \frac{1}{2}$. Soit $\mu_0\colon \Sigma_6 \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'application qui associe à chaque élément de $\Sigma_6$ l'image par $g$ de sa composée avec $D_1$. Alors $\mu(K) = \mu_0(\Phi_{\mathfrak{gl}}(K))$ mais un calcul explicite de l'application composition avec $D_1$ montre que l'image de cette application est en fait dans $\Sigma'_3 + \Delta\Sigma_3$, ainsi $\mu_0$ est nul sur $\Delta\Sigma_6$. De plus, dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$, l'élément suivant est nul:



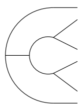
Donc $\mu_0(\Sigma'_6) = 0$.

De même $\eta''$ induit une forme linéaire $\eta_0$ sur $\Sigma_6$ telle que $\eta_0(<\sigma>) = \eta''(\Phi\mathfrak{gl}_{2,2}(<\sigma>))$ pour $\sigma \in \Sigma_6$. En particulier $\eta''$ est nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{gl}_{2,2})_{\bar{1}})^{\otimes 6}$ et cet orthogonal contient l'idéal $\mathrm{Ker}(q)$ évoqué dans la question précédente. il en résulte que $\eta_0$ est nulle sur $\Sigma'_6$.

Des calculs effectués avec Maple donnent les résultats suivants:

- Le sous-espace de $\Sigma_{6/\Sigma'_6}$ des éléments $(G,\epsilon)$–invariants, invariants par l'endomorphisme de $\Sigma_6$ défini sur sa base par $<\sigma>\mapsto<\sigma>+(-1)^n<\sigma^{-1}>$, formé de combinaisons linéaires diagrammes ayant un nombre impair de composantes connexes, est de dimension quatre, engendré par les éléments suivants:
  $y_1 = f\left((1,2,3,4,5,6)\right)$
  $y_2 = f\left((1,2,3,5,4,6)\right)$
  $y_3 = f\left((1,3,2,5,4,6)\right)$
  $y_4 = f\left((1,3)(2,5)(4,6)\right)$
  Avec $f(y_i) = \sum_{g\in G}\epsilon(g)(<gy_ig^{-1}>+<gy_i^{-1}g^{-1}>)$
  L'image par $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ des éléments de degré impair de $F_6$ est donc de dimension inférieure ou égale à quatre.
- L'application $f_6$ (construite dans la section précédente à l'aide de l'application $<\sigma>\mapsto<\sigma\backslash 6>$) envoie $y_1$ et $y_4$ sur $0$, mais $f_6(y_2)=f_6(y_3)\neq 0$.
- L'application induite par recollement de l'élément $D_4$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ envoie $y_1$, $y_2$, $y_3$ et $y_4$ sur respectivement $-24\Delta^2$, $16\Delta^2-16$, $-8\Delta^2-16$ et $-48$ fois l'élément $(<(1,2,3)>-<(1,3,2)>)$ de $\Sigma_3$. En conséquence, et à l'aide des deux dernières remarques de la section précédente, on peut conclure que l'image par $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ des éléments de degré impair de $F_6$ est de dimension inférieure où égale à deux, engendrée par $y_1$ et $y_2-y_3$.

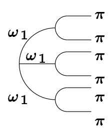
De plus, $\Phi_{\mathfrak{gl}}(D_2)=\frac{1}{6}y_1$ et $D_1\circ D_2=8t^3\in\Lambda$ donc $\mu_0(y_1)=6\mu(D_2)=0$. On va montrer que $\eta_0(y_1)$ est nul ce qui permettra de conclure que $\eta_0=\mu_0$ sur l'image de $F_6$ en degré impair donc que $\eta=\mu$. En effet, sur cette image, $\eta_0$ et $\mu_0$ ont même noyau donc sont proportionnelles, donc $\eta$ et $\mu$ sont proportionnelles, or $\eta$ et $\mu$ coïncident et sont non nulles sur le diagramme suivant:



dont la composée avec $D_1$ donne l'élément $x_3\in\Lambda$; elles sont donc bien égales.

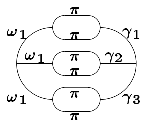
Pour montrer que $\eta_0(y_1)=0$, on calcule directement $\eta(D_2)$:

Le tenseur $x_1$ intervenant dans le calcul de $\eta$ est obtenu comme la réduction par l'application $\phi$ du diagramme colorié suivant:

$x_1 = -a_1\phi$ (  )

Donc $\eta(D_2)$ est obtenu comme la réduction modulo $(a)R+(b-1)R$ de:

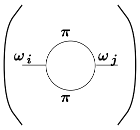
$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)(x_1) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} -a_1\phi \left( \right.$$




$$\left. \right)$$

La sommation étant faite pour $\gamma_1$, $\gamma_2$ et $\gamma_3$ parcourant $\{-a_1\omega_1, -a_2\omega_2, -a_3\omega_3\}$ (Si l'un des $\gamma_i$ valait $\pi$, le diagramme colorié obtenu ne serait pas admissible). Or si $i \neq j$ alors

$$\phi \left( \right.$$




$$\left. \right) = 0$$

donc tous les termes de la somme sont nuls sauf celui pour lequel $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -a_1\omega_1$ mais ce terme est dans $a_1^2 R$; ainsi $\eta(D_2) = 0$ donc $\eta = \mu$.

Pour terminer, nous avons montré l'égalité du premier coefficient des caractères $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(x)$ et $\chi_{\mathfrak{sl}}(x)$ lorsque $x$ est dans $(D_2)_*(F_6)$. Pour avoir l'égalité de ces coefficients sur $\Lambda$ tout entier, il suffit de remarquer que si un diagramme de $\Lambda$ n'est pas dans $(D_2)_*(F_6)$, alors il représente un élément de $\Lambda$ divisible par $t$ donc pour lequel les deux coefficients sont nuls. Cette dernière remarque termine la démonstration du lemme.

## 3.5 Les caractères exceptionnels et la relation du carré

### 3.5.1 Théorème d'existence

Si $L$ est l'une des cinq algèbres de Lie exceptionnelles de la liste

$(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8)$ alors $I_L = (P_{\mathfrak{ex}}) + (u - \alpha_L t^2)$, la liste des valeurs de $\alpha_L$ est $(\frac{7}{72}, \frac{-4}{81}, \frac{-22}{225}, \frac{-7}{81}, \frac{-5}{72})$; ces valeurs sont distinctes deux à deux. On identifie le but de chacun de ces caractères $\chi_L$ avec $S_{/I_L} \simeq \mathbb{Q}[t]$. Posons $Q_{\mathfrak{ex}} = \prod_L (u - \alpha_L t^2)$ polynôme de degré dix de $S$.

**Lemme 3.3** *Il existe un caractère* $\chi_{\mathfrak{ex}}\colon \Lambda \longrightarrow S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(Q_{\mathfrak{ex}})}$ *factorisant les cinq caractères exceptionnels.*

**Démonstration** Pour factoriser $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ et $\chi_{\mathfrak{f}_4}$ on remarque que $I_{\mathfrak{g}_2} \cap I_{\mathfrak{f}_4}$ est l'idéal somme $(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}}) + ((u-\alpha_1 t^2)(u-\alpha_2 t^2))$ (car $S_{/P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}}} \simeq \mathbb{Q}[t,u]$ est factoriel) donc le diagramme commutatif suivant est un carré cartésien:

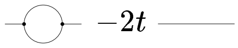
$$\begin{array}{ccc} S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+((u-\alpha_1 t^2)(u-\alpha_2 t^2))} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+(u-\alpha_1 t^2)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+(u-\alpha_2 t^2)} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+(u-\alpha_1 t^2)+(u-\alpha_2 t^2)} \simeq \mathbb{Q}[t]_{/(t^2)} \end{array}$$

Ainsi, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

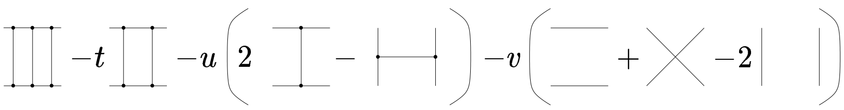
$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\chi_{\mathfrak{g}_2}} & S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+(u-\alpha_1 t^2)} \\ \chi_{\mathfrak{f}_4} \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+(u-\alpha_2 t^2)} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}})+(u-\alpha_1 t^2)+(u-\alpha_1 t^2)} \simeq \mathbb{Q}[t]_{/(t^2)} \end{array}$$

Mais l'anneau en bas à droite est nilpotent et nul en degré supérieur à deux. Or $\Lambda$ ne diffère pas de $\Lambda_0$ en degré inférieur ou égal à dix (cf [11]) et les deux caractères coïncident sur $\Lambda_0$ comme l'indique la formule (2) donnée section (3.2.2). Ainsi il existe un premier caractère intermédiaire factorisant $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ et $\chi_{\mathfrak{f}_4}$. On réitère le même procédé (d'abord en remplaçant $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ par le caractère que l'on vient de construire et $\chi_{\mathfrak{f}_4}$ par $\chi_{\mathfrak{e}_6}$ etc...) et le même argument permet de construire étape par étape le caractère $\chi_{\mathfrak{e}\mathfrak{x}}$. □

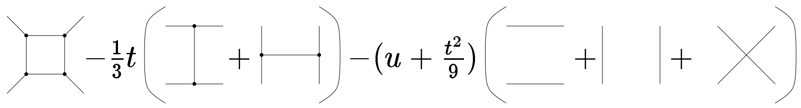
On désigne par $K_1$, $K_2$ et $K_3$ les combinaisons linéaires de diagrammes suivantes:




(1)




(2)




(3)

Soit $\Lambda_1$ l'idéal de $\Lambda \otimes S$ engendré par les combinaisons linéaires de $([3], \emptyset)$–diagrammes connexes se factorisant par $K_1$ ou $K_2$ et soit $\Lambda_2$ l'idéal de $\Lambda \otimes S$ engendré par les combinaisons linéaires de $([3], \emptyset)$–diagrammes connexes se factorisant par $K_3 \otimes K_3$. On montrera le

**Lemme 3.4** *L'application $S \longrightarrow (\Lambda \otimes S)_{/(\Lambda_1+\Lambda_2)}$ donnée par l'unité de $\Lambda$ est surjective en degré inférieur ou égal à $20$. En conséquence, il existe un caractère $\chi_4$ sur $\Lambda$ en degré inférieur ou égal à $20$ à valeurs dans un quotient de $S$ qui factorise tous les caractères annulant $K_1$, $K_2$ et $K_3 \otimes K_3$.*

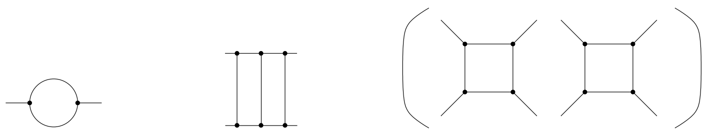
**Remarque** Des calculs élémentaires dans l'algèbre d'endomorphisme $\mathcal{D}([2],[2]) \otimes S$ permettent de prouver que l'application $S \longrightarrow (\Lambda_0 \otimes S)_{/(\Lambda_1)}$ est surjective. Un antécédent de $x_n$ peut être calculé par la formule (2) donnée section 3.2.2.

On va aussi montrer que les caractères $\chi_3$ modulo $(P_{\mathfrak{er}}) + (R)$ et $\chi_{\mathfrak{er}}$ mod $(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})$ à valeurs dans l'anneau $S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})+(P_{\mathfrak{er}})+(R)}$ concentré en degré inférieur ou égal à $20$, se factorisent par $\chi_4$, et donc coïncident, ce qui démontrera l'existence d'un caractère $\chi$ factorisant $\chi_{\mathfrak{er}}$ et $\chi_3$.

En fait, $\chi_{\mathfrak{er}}$ annule $K_3$. Ceci provient du fait que pour chaque algèbre exceptionnelle, le carré du Casimir engendre le sous-espace des éléments $L$–invariants de $S^4L$ (Cf [21]).

### 3.5.2 Unicité de $\chi_4$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de $\chi_4$, il est plus aisé de manipuler les diagrammes de $F_0$ qui forment un $\Lambda$–module libre isomorphe à $\Lambda$. Il s'agit de montrer qu'en degré inférieur ou égal à $21$, $F_0$ est isomorphe à l'espace $R_0$ engendré par les diagrammes contenant l'un des trois diagrammes suivants:



$W_2$ $\qquad W_{2,2}$ $\qquad W_4 \amalg W_4$ $\qquad$ (4)

On introduit les notations:

$$N_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 / a \leq b \leq c\}$$

muni de l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^3$,

$$N_6 = \{(\alpha,\beta) \in N_3 \times N_3 / \alpha \leq \beta\}$$

muni de l'ordre induit par l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^6$. Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = (\alpha,\beta) \in N_6$ et $\delta = (a,b,c) \in N_3$. On définit l'ensemble

$$N = \mathbb{N} \amalg N_3 \amalg N_6$$

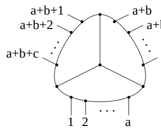
que l'on finit d'ordonner en posant:

$\delta < \gamma$ si $\delta < \alpha$ et $\gamma < \delta$ si $\alpha \leq \delta$; si $n < a$ alors $n < \delta$, sinon $\delta < n$;

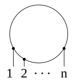
$n$ et $\gamma$ sont ordonnés comme $n$ et $\alpha$;

l'ensemble $N$ est ainsi muni d'un bon ordre.

On notera $|\delta| = a+b+c$ et $|\gamma| = |\alpha| + |\beta|$. Enfin, $W_\delta$ et $W_n$ représenteront les diagrammes suivants de $F_{|\delta|}$ et $F_n$:



$W_\delta$



$W_n$

et $W_\gamma$ le diagramme $W_\alpha \otimes W_\beta \in \mathcal{D}([0],[|\gamma|])$. On appelle "roue" un diagramme isomorphe à $W_n$ à la numérotation des sommets près.

On désigne par $f_K\colon \mathcal{D}([n],[m]) \longrightarrow \mathcal{D}([0],[m])$ la composition à gauche par $K \in \mathcal{D}([0],[n])$ (l'image de $f_K$ représente les diagrammes "contenant" $K$) et on pose:

$R^0_\delta = f_{W_\delta}($sous-espace de $\mathcal{D}([|\delta|],[0])$ engendré par les diagrammes connexes)

$R^0_\gamma = f_{W_\gamma}($sous-espace de $\mathcal{D}([|\alpha|]\amalg[|\beta|],[0])$ engendré par les diagrammes dont chaque composante connexe a au moins un sommet trivalent et rencontre $[|\alpha|]$ et $[|\beta|]$).

Ceci permet de définir pour $d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\alpha \in N\setminus\{0\}$

$$R^0_d = f_{W_d}(F_d) \qquad R^<_\alpha = R_0 + \sum_{\beta<\alpha} R^0_\beta$$

$$R_\alpha = R^<_\alpha + R^0_\alpha \qquad \text{et} \qquad \bar{R}_\alpha = R_\alpha / R^<_\alpha$$

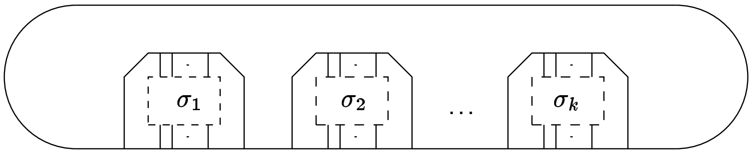
Si $\alpha < \beta$ dans $N$, on a $R_0 \subset R^<_\alpha \subset R_\alpha \subset R^<_\beta \subset R_\beta$.

**Lemme 3.5** *$F_n$ est engendré en degré $n$ par les roues et en degré supérieur ou égal à $n+1$ par les diagrammes $K = W \circ K'$ où $K'$ est un arbre (élément de $F_k$ de degré $k-1$) vu comme élément de $\mathcal{D}([0],[k])$ et $W$ est une roue (à $n+k$ jambes).*

**Démonstration** La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur (elle repose sur une simple manipulation des relations (IHX)).

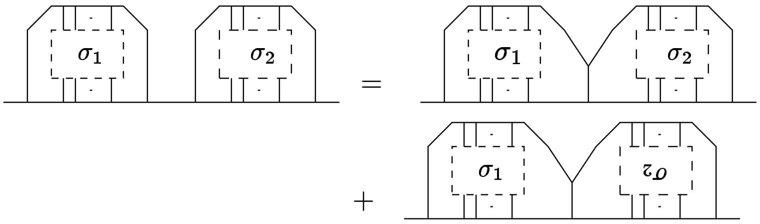
**Indications** Il est utile de remarquer que l'on peut raisonner sur le "squelette" des diagrammes (c'est à dire oublier les jambes des diagrammes qui peuvent être déplacées par des relations (IHX)). L'étape intermédiaire est de démontrer que

$F_n$ est engendré en degré supérieur ou égal à $n+1$ par des diagrammes ayant un squelette de la forme suivante:



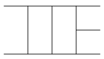
où chacune des boites est donnée par une permutation $\sigma_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$.

Ensuite, il est possible de conclure grace à la manipulation de "fusion des arbres" suivante:



□

On utilise aussi le fait que $W_{2n+1} \in \mathrm{Im}\,(f_{W_{2n}})$ (en particulier pour $n=2$) et de la même manière, l'image de $f_{W_{2,2}}$ contient le diagramme suivant:



Si $d \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{D}(d,[n])$ le quotient de $\mathcal{D}([d],[n])$ tuant l'action du groupe $\mathfrak{S}_d$. Si $\alpha \in N_3$, on note $\mathfrak{S}_\alpha$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{|\alpha|}$ isomorphe à $\mathfrak{S}_{a_1}\times\mathfrak{S}_{a_2}\times\mathfrak{S}_{a_3}$ induit par l'isomorphisme $[a_1]\amalg[a_2]\amalg[a_3] \hookrightarrow [a_1+a_2+a_3]$ et $\mathcal{D}(\alpha,[n])$ le module quotient de $\mathcal{D}([|\alpha|],[n])$ par les relations: si $\sigma \in \mathfrak{S}_\alpha$ et $K \in \mathcal{D}([|\alpha|],[n])$ alors $\sigma.K \equiv K$. On a une application surjective naturelle de $\mathcal{D}([|\alpha|],n)$ vers $\mathcal{D}(\alpha,n)$: celle ci revient à remplacer la numérotation des sommets univalents de la source par un coloriage à l'aide de trois couleurs que l'on notera $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

De même si $\gamma=(\alpha,\beta)\in N_6$, on note $\mathcal{D}(\gamma,[n])$ le quotient de $\mathcal{D}([|\gamma|],[n])$ tuant l'action du groupe $\mathfrak{S}_\gamma \simeq \mathfrak{S}_\alpha\times\mathfrak{S}_\beta \subset \mathfrak{S}_{|\gamma|}$. L'application quotient revient à remplacer la numérotation des sommets univalents de la source d'un diagramme par un coloriage à l'aide de six couleurs que l'on notera $x_1,x_2,x_3$ et $y_1,y_2,y_3$.

**Lemme 3.6** *Si $\gamma \in N$ l'application*

$$\bar{f}_\gamma\colon\ \mathcal{D}([|\gamma|],[n]) \longrightarrow \bar{R}_\gamma$$

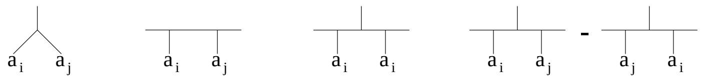
*(obtenue par composition de $f_{W_\gamma}$ avec l'application quotient $R_\gamma \longrightarrow \bar{R}_\gamma$) se factorise par une application $g_\gamma\colon\ \mathcal{D}(\gamma,[n]) \longrightarrow \bar{R}_\gamma$.*

Pour démontrer ce lemme, il suffit de voir que pour tout $K \in \mathcal{D}([|\gamma|],[n])$, pour toute transposition $\sigma = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_\gamma$, on a $\bar{f}_\gamma(\sigma.K) = \bar{f}_\gamma(K)$. Mais $W_\gamma \circ (\sigma.K) - W_\gamma \circ K = (\sigma.W_\gamma - W_\gamma) \circ K$ et par la relation (IHX), $(\sigma.W_\gamma - W_\gamma) \circ K \in R_\gamma^<$.

**Lemme 3.7** *Soit $\gamma \in N$ et $K \in \mathcal{D}(\gamma, [0])$ alors $g_\gamma(K)$ est nul ou dim$(H_1(K)) > 22$. Ainsi, $F_0 \subset R_0$ en degré $d$ tel que $1 < d < 22$.*

**Démonstration** Pour montrer ce dernier lemme, on procède par étapes:

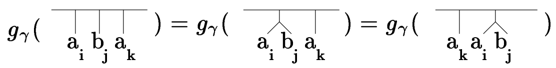
- Si $\gamma < ((1,3,3),(3,3,3))$ il n'y a rien à démontrer car $\mathrm{Im}\,(g_\gamma) \subset R_0$.
- En utilisant les arguments du lemme 3.6, il est facile de montrer qu'un diagramme contenant une roue à $d$ jambes appartient à $R_d$. En effet, si le complémentaire de la roue n'est pas connexe, quitte à permuter ses jambes, on peut se ramener à un diagramme obtenu en recollant deux éléments de $F_2$ et donc divisible par $t$ (i.e. appartenant à $R_0$).
- Si $d \geq 4$, par le lemme 3.6 et en appliquant le lemme 3.5 au complémentaire de $W_d$ dans un diagramme de $R_d$, on obtient facilement $\bar{R}_d = 0$.
- Si les lettres $a$ et $b$ désignent les deux lettres $\{x, y\}$, si $\{i, j, k\} \subset \{1,2,3\}$ et si $K$ contient l'un des cinq diagrammes suivants:



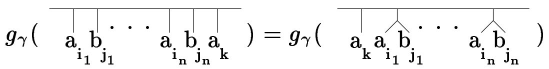
(5)

  alors $g_\gamma(K) = 0$. En effet, on peut toujours faire apparaître une roue à moins de cinq jambes en recollant un tel diagramme à $W_\gamma$.
- On peut maintenant montrer que si $\alpha \in N_3$ alors $\bar{R}_\alpha$ est nul. Pour cela, appliquons le lemme (3.5) a un diagramme connexe $K \in \mathcal{D}(\alpha, [0])$. Si $K$ est un arbre, il contient le premier diagramme de (5) sinon, il se décompose en une roue dont certaines jambes sont coloriées par les $x_i$ et d'autres qui sont reliées aux feuilles de l'arbre. Aux moins trois d'entre elles sont de couleur $x_2$. S'il ne contient pas le deuxième diagramme de (5), les jambes coloriées par les $x_i$ sont séparées par des feuilles de l'arbre. Nous dirons que deux jambes coloriées sont en relation si elles ne sont séparées que par une feuille de l'arbre. On complète cette relation en une relation d'équivalence. Le dernier élément de (5) prouve que l'on peut permuter les couleurs des jambes qui sont en relation sans modifier l'image par $g_\alpha$ de $K$. Mais alors le troisième diagramme de (5) étant annulé par $g_\alpha$, si $g_\alpha(K) \neq 0$, aucune des classes d'équivalences ne peut contenir deux

jambes coloriées par la même couleur et il y a donc au moins trois classes d'équivalences. Ceci signifie qu'en au moins trois endroits dans $K$, deux feuilles de l'arbre sont reliées par une arête de la roue. La réunion de ces trois arêtes et de l'arbre forme un diagramme à trois boucles qui, par le lemme (3.5), permet de faire apparaître un diagramme $W_\beta$ où $\beta \in N_3$. Ainsi $f_{W_\alpha}(K)$ appartient à $R_{(\alpha,\beta)} \subset R_\alpha^<$.

- 

  de plus ces éléments sont nuls si $i{=}k$.

-  (6)

  de plus ces éléments sont nuls si $n \geq 3$.

- Maintenant si $\gamma \in N_6$ et si $K \in \mathcal{D}(\gamma,[0])$ est un diagramme dont l'une des composantes connexes est un arbre, alors $K$ est combinaison linéaire de diagrammes contenant l'un des deux premiers éléments de (5).
- Si une composante connexe $K_0$ de $K$ est une roue, alors $K_0$ contient un diagramme de type (6) et soit $K_0 \in R_4$, soit le nombre $n$ est supérieur ou égal à quatre donc $g_\gamma(K) = 0$.
- Si $K$ est connexe, on lui applique le lemme (3.5). Reprenant la relation d'équivalence pour les jambes de la roue coloriées par les $x_i$, on retrouve qu'en trois endroits distincts, la roue possède deux jambes consécutives qui ne sont pas coloriées par $x_i$ et au moins une des deux est donc une feuille de l'arbre. L'arbre a donc au moins trois feuilles et $K$ a donc au moins trois boucles.
- Ainsi si $g_\gamma(K) \neq 0$, soit $K$ est connexe et a au moins trois boucles, soit il possède plusieurs composantes connexes ayant chacune au moins deux boucles. Dans les deux cas, le nombre de sommets trivalents de $K$ est supérieur ou égal à $|\gamma| + 4$. Comme $\gamma \geq ((1,3,3),(3,3,3))$, on a $|\gamma| \geq 16$ et le nombre de sommets trivalents de $f_{W_\gamma}(K)$ est supérieur ou égal à 44. $\square$

On peut maintenant montrer le lemme 3.4. En effet, considérons un diagramme $K = K' \circ K'' \in F_0$ où $K'$ est l'un des trois éléments de (4). Le lecteur pourra vérifier que si $K''$ n'est pas connexe, alors, si $K'$ est isomorphe à $W_2$, $K$ est nul, si $K'$ est isomorphe à $W_{2,2}$, $t$ divise $K$ et si $K'$ est la réunion disjointe de deux carrés, alors $K$ se décompose en une combinaison linéaire de diagrammes du même type pour lesquels $K''$ est connexe ou $K'$ est l'un des deux premiers éléments de (4). On peut ainsi toujours se ramener au cas où $K''$ est connexe. Alors, $K$ se décompose dans $(\Lambda\otimes S)_{/(\Lambda_1+\Lambda_2)}$ en une combinaison linéaire de diagrammes de degré strictement inférieur et en réitérant le processus pour un diagramme de $(\Lambda\otimes S)_{/(\Lambda_1+\Lambda_2)}$ de degré inférieur ou égal à 21 (correspondant à un élément de $\Lambda$ de degré inférieur ou égal à 20), on peut l'exprimer comme combinaison linéaire d'éléments de $S$.

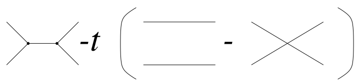
### 3.5.3 $\chi_3$ et les relations exceptionnelles

Le but de cette section est de montrer que $\chi_3$ modulo l'idéal engendré par $P_{\mathfrak{ex}}$ annule $\Lambda_2$. Les variables $t$, $u$ et $v$ sont déterminées par le fait que chaque superalgèbre de Lie simple annule les éléments $K_1$ et $K_2$ définis dans la section 3.5.1. Ainsi les caractères $\chi_3$ et $\chi_{\mathfrak{ex}}$ annulent $\Lambda_1$.

Le but de $\chi_3$ modulo $(P_{\mathfrak{ex}})$ est l'anneau

$$\begin{aligned} &S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})} = S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+((9u-2t^2)(u-t^2)(9u-5t^2)t^3u^2)} \\ \hookrightarrow\quad & S_{/I_{\mathfrak{sl}_3}}\times S_{/I_{\mathfrak{osp}(1,2)}}\times S_{/(P_{\mathfrak{sl}2})+(9u-5t^2)}\times S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u^2)}\times S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(t^3)}\end{aligned}$$

Tout comme les algèbres de Lie exceptionnelles, pour $L=\mathfrak{sl}_3$ et $L=\mathfrak{osp}(1,2)$, le carré du Casimir engendre le sous-espace $L$–invariant de $S^4L$. Ainsi les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}_3}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(1,2)}$ annulent $\Lambda_2$. De plus, $\Phi_{\mathfrak{sl}_2}$ annule l'élément

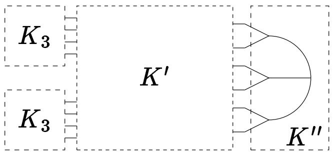



(7)

et ceci suffit à déterminer le caractère $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$. Ainsi on peut vérifier directement que $(9u-5t^2)$ divise $\Phi_{\mathfrak{sl}_2}(K_3)$.

De même $(\delta-8)$ divise $\Phi_{\mathfrak{osp}}(K_3)$ et par homogénéité de $\chi_{\mathfrak{osp}}$, on a: $\chi_{\mathfrak{osp}}(\Lambda_2)\subset(\delta-8\alpha)^2\mathbb{Q}[\alpha,\delta]$. Ceci montre que $\chi_3$ modulo $(P_{\mathfrak{ex}})+(u^2)$ est nul sur $\Lambda_2$.

Pour montrer que $\chi_3$ modulo $(P_{\mathfrak{ex}})+(t^3)$ annule $\Lambda_2$, il suffit de montrer que les images de $\Lambda_2$ par respectivement $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$ sont dans les idéaux respectifs $(t^3)$ et $(v^3)$. Pour cela, supposons qu'un élément $K$ de $F_0\otimes S$ soit de la forme suivante:



où $K' \circ K''$ est connexe. On note $u$ l'élément de $\Lambda$ correspondant à $K$. Il se trouve que $\Delta$ divise $\Phi_{\mathfrak{sl}}(K_3)$ et $a_1$ divise $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K_3)$ (ceci provient du fait que $\Phi_{\mathfrak{psl}(2,2)}(K_3) = 0$).

Comme $K' \circ K''$ est connexe, $K'$ appartient à $\mathcal{D}_b([8],[6])$ et donc $a_1^2$ divise $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$ or il existe une forme linéaire sur $X^{\otimes 6}$ à valeurs dans $R$ (cf section 3.4.2) qui prend sur $a_1^{-2}\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$ la valeur $\frac{1}{a_1^3}\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(u)$. Ainsi $v^3$ divise $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(u)$.

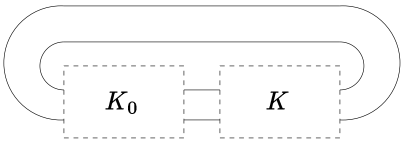
De même, en notant $\mathcal{D}'_{\mathfrak{gl}}([p],[q])$ le sous-$\mathbb{Q}[\Delta]$–espace de $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}([p],[q])$ engendré par les éléments de $\Sigma'_{p+q}$ on peut aisément vérifier que la composition à droite par un élément de $\mathcal{D}_b$ laisse stable $\mathcal{D}'_{\mathfrak{gl}}$ (il suffit de le vérifier pour des diagrammes de la forme $[.,.] \otimes Id$). Ainsi, comme $\Phi_{\mathfrak{gl}}(K_3 \otimes K_3) \in \Delta^2\Sigma_8 + \Sigma'_8$, on a $\Phi_{\mathfrak{gl}}((K_3 \otimes K_3) \circ K') \in \Delta^2\Sigma_6 + \Sigma'_6$ et donc $\Delta^2$ divise $\Phi_{\mathfrak{sl}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$. Or il existe une forme linéaire sur $\Sigma_6$, nulle sur $\Sigma'_6$, à valeur dans $\mathbb{Q}$ (cf la forme $\mu_0$ de la section 3.4.4) qui prend sur $\Delta^{-2}\Phi_{\mathfrak{sl}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$ la valeur $(\frac{1}{t^3}\chi_{\mathfrak{sl}}(u))$ modulo $(t)$. Ainsi, $t^3$ divise $\chi_{\mathfrak{sl}}(u)$.

Donc $\chi_3(u)$ est bien dans l'idéal somme $(P_{\mathfrak{ex}}) + (t^3)$. Le fait que les diagrammes du type de $K$ engendrent $\Lambda_2$ modulo $\Lambda_1$ résulte de la remarque faite à la fin de la section précédente. Ainsi, $\chi_3$ modulo $(P_{\mathfrak{ex}})$ annule aussi $\Lambda_2$ et par suite se factorise par $\chi_4$ en degré inférieur ou égal à $20$. Ceci termine la démonstration de l'existence de $\chi$.

# 4 Les cas de $\mathfrak{g}(3)$, $\mathfrak{f}(4)$ et les branchements

Le but de cette section est de démontrer que le caractère $\chi$ factorise aussi les caractères $\chi_{\mathfrak{g}(3)}$ et $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$.

En fait, on montre que $\chi_{\mathfrak{g}(3)}$ se factorise par $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ et que $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$ et $\chi_{\mathfrak{sl}_3}$ coïncident. Pour calculer $\chi_{\mathfrak{g}(3)}$, il suffit de remarquer que le sous-module $X_2$ de $\Lambda^2\mathfrak{g}(3)$ formé par le noyau du Casimir est simple et de superdimension nulle (pour $\mathfrak{sl}_2$ ce même module est nul). Notons $K_0$ l'élément (7) annulé par $\Phi_{\mathfrak{sl}_2}$ (cf section 3.5.3). Les éléments de $F_0$ de la forme



où $K$ est un diagramme connexe de $\mathcal{D}([2],[2])$, sont envoyés par $\Phi_{\mathfrak{g}(3)}$ sur $t\,\mathrm{str}_{X_2}(\Phi_{\mathfrak{g}(3)}(K)) = 0$ et par suite $\chi_{\mathfrak{g}(3)} = \chi_{\mathfrak{sl}_2}$ sont tous deux déterminés de manière unique par le fait qu'ils annulent ces éléments.

Supposons maintenant qu'une superalgèbre de Lie $L$ munie d'un élément de Casimir non dégénéré $\Omega \in L \otimes L$ contienne une sous-algèbre de Lie $l$ sur laquelle la forme bilinéaire supersymétrique de $L$ ne soit pas dégénérée. On a alors un foncteur $F\colon Mod_L \longrightarrow Mod_l$ qui consiste à regarder la structure de $l$–module d'un $L$–module.

Si de plus le $l$–module $E$, orthogonal de $l$ dans $L$, vérifie $[E,E]_L \subset l$, on dira que $(l,E)$ est une bonne décomposition de $L$. On peut remarquer que le Casimir de $L$ se décompose en $\Omega = \omega + \pi$ avec $\omega \in l \otimes l$ et $\pi \in E \otimes E$.

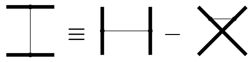
Pour transcrire cette situation en termes de diagrammes, on pose les définitions suivantes:

Un $(X_1,X_2)$–diagramme bicolore est la donnée d'un $(\Gamma,X_1)$–diagramme où $\Gamma$ est non orientée et la donnée d'un isomorphisme: $\partial\Gamma \simeq X_2$. Nous dirons qu'une arête d'un diagramme bicolore est de la première couleur si elle n'appartient pas à la courbe $\Gamma$, et nous dirons qu'elle est de la deuxième couleur dans le cas contraire. On représentera toujours d'un trait gras les arêtes de la deuxième couleur. On note $\widehat{\mathcal{A}}(X_1,X_2)$ le $\mathbb{Q}$–espace vectoriel de base les $(X_1,X_2)$–diagrammes bicolores quotienté par les relations $(AS)$, $(IHX)$, $(STU)$. On note aussi

$$\widehat{\mathcal{A}}(X) = \bigoplus_{X_1 \amalg X_2 = X} \widehat{\mathcal{A}}(X_1,X_2).$$

On remarque que si $\Gamma$ est une courbe sans bord non orientée, $\mathcal{A}(\Gamma,X) \subset \widehat{\mathcal{A}}(X,\emptyset)$.

Enfin on désigne par $\overline{\mathcal{A}}(X_1,X_2))$ le quotient de $\widehat{\mathcal{A}}(X_1,X_2)$ par les relations notées $(\overline{IHX})$:



et $\overline{\mathcal{A}}(X) = \bigoplus_{X_1 \amalg X_2 = X} \overline{\mathcal{A}}(X_1,X_2)$.

On définit les catégories $\widehat{\mathcal{D}}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ de manière analogue à $\mathcal{D}$ comme les catégories ayant les mêmes objets que $\mathcal{D}$ et dont les morphismes sont

$\widehat{\mathcal{D}}([p],[q]) = \widehat{\mathcal{A}}([p] \amalg [q])$ et $\overline{\mathcal{D}}([p],[q]) = \overline{\mathcal{A}}([p] \amalg [q])$. La composition dans $\widehat{\mathcal{D}}$ ou $\overline{\mathcal{D}}$ de deux diagrammes est encore obtenue par leur recollement si les arêtes issues des sommets de la source du premier diagramme sont de la même couleur que celles issues du but du deuxième diagramme et on décrète que la composition est nulle dans le cas contraire. On note $\overline{D}\colon \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow \overline{\mathcal{D}}$ le foncteur quotient.

Soit $l$ une superalgèbre de Lie quadratique et $E$ un $l-module$ muni d'une forme bilinéaire supersymétrique $l$–invariante. On note $\pi$ l'élément de $S^2E$ associé et $\omega$ le Casimir de $l$.

**Proposition 4.1** *Il existe un unique foncteur monoïdal $\mathbb{Q}$–linéaire*

$$\widehat{\Phi}_{l,E}\colon \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow Mod_l$$

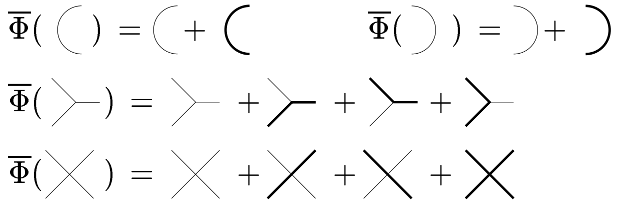
*envoyant* $[1]$ *sur* $l \oplus E$, *prenant les mêmes valeurs que* $\Phi_{l,E}$ *sur* $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ *lorsque* $\Gamma$ *est une courbe sans bord non orientée, et vérifiant*

$$\widehat{\Phi}_{l,E}(\,—\,) = \mathrm{Id}_E \qquad \widehat{\Phi}_{l,E}(\,\big(\,\,) = \pi$$

*Si de plus* $(l, E)$ *est une bonne décomposition de* $L$, *alors* $\widehat{\Phi}_{l,E}$ *passe au quotient par* $\overline{D}$, *définissant un foncteur* $\overline{\Phi}_{l,E}\colon \overline{\mathcal{D}} \longrightarrow Mod_l$ *qui vérifie*

$$\widehat{\Phi}_{l,E} = \overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{D}$$

*Il existe un foncteur monoïdal $\mathbb{Q}$–linéaire $\overline{\Phi}\colon \mathcal{D} \longrightarrow \overline{\mathcal{D}}$ défini de manière unique par ses valeurs sur les morphismes suivants:*



*Enfin, le foncteur* $\overline{\Phi}$ *vérifie:*

$$F \circ \Phi_L = \overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{\Phi}$$

**Démonstration** Nous justifierons seulement les existences de $\overline{\Phi}$ et de $\overline{\Phi}_{l,E}$. Notons provisoirement $f$ l'application qui associe à un $(X_1, X_2)$–diagramme bicolore le $(X_1 \amalg X_2)$–diagramme sous-jacent (on oublie l'information sur les "couleurs"). Ainsi il n'est pas difficile de voir que pour un diagramme $K \in \mathcal{A}(\emptyset, X)$ on a: $\overline{\Phi}(K) = \sum_{f(\overline{K})=K} \overline{K}$. Le point clé de la validité de cette définition est qu'en notant $I$, $H$ et $X$ les diagrammes intervenant dans la relation $(IHX)$, on peut réorganiser la somme $\sum_{f(\overline{K})=I}\overline{K} - \sum_{f(\overline{K})=H}\overline{K} + \sum_{f(\overline{K})=X}\overline{K}$ de manière à faire apparaître la relation $(IHX)$ plus des relations $(STU)$ plus la relation $(\overline{IHX})$. En ce sens, les relations $(\overline{IHX})$ sont nécessaires et suffisantes à l'existence de $\overline{\Phi}$.

En utilisant $\Omega = \omega + \pi$ et en "développant" le calcul de $\Phi_L(K)$ comme il a été fait dans la démonstration du lemme 3.2 pour l'algèbre $\mathfrak{D}_{21}$, la formule $F \circ \Phi_L = \overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{\Phi}$ apparaît comme un simple jeu d'écriture et justifie du même coup l'existence de $\overline{\Phi}_{l,E}$: en effet en "développant" $\Phi_L(I-H+X) = 0$ on obtient bien que $\widehat{\Phi}_{l,E}$ vérifie la relation $(\overline{IHX})$. □

**Corollaire** *Si $E = \bigoplus_i E_i$ où chaque $E_i$ est un $l$–module de superdimension nulle et tel que $\mathrm{End}_l(E_i) \simeq \mathbb{Q}$ alors les restrictions de $\Phi_L$ et $\Phi_l$ à $F_0$ sont des formes linéaires égales.*

**Démonstration** En effet, l'image par $\overline{\Phi}$ d'un élément de $F_0$ est égale au même élément vu dans $\overline{\mathcal{D}}([0],[0])$ plus une combinaison linéaire de $(\Gamma,\emptyset)$–diagrammes où $\Gamma \neq \emptyset$. Mais ces derniers s'interprètent comme la supertrace sur $E$ d'un tenseur $l$–invariant et sont annulés par $\overline{\Phi}_{l,E}$ sous les hypothèses du corollaire. On a donc dans ces conditions $\overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{\Phi} = \Phi_l$ sur $F_0$. □

**Proposition 4.2** *La superalgèbre de lie $\mathfrak{f}(4)$ satisfait aux conditions ci-dessus pour $l = \mathfrak{sl}(4,1)$ et $E$ est alors un $\mathfrak{sl}(4,1)$–module simple de superdimension nulle. En conséquence, les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(4,1)}$ et $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$ sont égaux.*

**Démonstration** La partie paire de $\mathfrak{f}(4)$ est isomorphe à l'algèbre semi-simple $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{so}_7$. Sa partie impaire est isomorphe au produit tensoriel de la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$ par la représentation $\mathrm{spin}_7$. Considérons une décomposition de Cartan: $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F$ avec $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$ et $[E,F] = H$. On note $V_2$ la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$, $V_4$ la représentation standard de $\mathfrak{sl}_4$, $V_4'$ sa représentation duale, $W = \Lambda^2 V_4 \simeq \Lambda^2 V_4'$. On choisit $e$ vecteur de plus haut poids de $V_2$ et $f = F.e$.

$W$ est un $\mathfrak{sl}_4$–module simple de dimension 6 autodual. Le choix d'une base de $W$ donne un mophisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_4 \longrightarrow \mathfrak{so}_6$ qui est en fait un isomorphisme.

Fixons une injection $\mathfrak{sl}_4 \simeq \mathfrak{so}_6 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$ et considérons la décomposition de $\mathfrak{f}(4)$ comme $\mathbb{C}H \times \mathfrak{sl}_4$–module:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(4) &\simeq \quad \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_7 \quad \oplus V_2 \otimes \mathrm{spin}_7 \\ &\simeq \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus \mathfrak{sl}_4 \oplus W \quad \oplus e \otimes V \oplus e \otimes V' \oplus f \otimes V \oplus f \otimes V' \end{aligned}$$

Le crochet de Lie de $\mathfrak{f}(4)$ est un morphisme de $\mathbb{C}H \times \mathfrak{sl}_4$–module et on remplit facilement la table du crochet suivante en utilisant la propriété établie par V. G. Kac (cf [10]) que pour toute superalgèbre de Lie classique basique $\mathfrak{g}$, si $\Delta$ est l'ensemble de ses racines, et si $\mathfrak{g}_\alpha$ désigne l'espace propre associé à la racine $\alpha$, et $\beta \in \Delta$ est différente de $-\alpha$ alors:

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0 \iff \alpha + \beta \in \Delta \tag{8}$$

| $[.,.]$ | $\mathbb{C}H$ | $\mathfrak{sl}_4$ | $\mathbb{C}E$ | $\mathbb{C}F$ | $W$ | $e \otimes V$ | $f \otimes V'$ | $e \otimes V'$ | $f \otimes V$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{C}H$ | 0 | 0 | $\mathbb{C}E$ | $\mathbb{C}F$ | 0 | $e \otimes V$ | $f \otimes V'$ | $e \otimes V'$ | $f \otimes V$ |
| $\mathfrak{sl}_4$ | | $\mathfrak{sl}_4$ | 0 | 0 | $W$ | $e \otimes V$ | $f \otimes V'$ | $e \otimes V'$ | $f \otimes V$ |
| $\mathbb{C}E$ | | | 0 | $\mathbb{C}H$ | 0 | 0 | $e \otimes V'$ | 0 | $e \otimes V$ |
| $\mathbb{C}F$ | | | | 0 | 0 | $f \otimes V$ | 0 | $f \otimes V'$ | 0 |
| $W$ | | | | | $\mathfrak{sl}_4$ | $e \otimes V'$ | $f \otimes V$ | $e \otimes V$ | $f \otimes V'$ |
| $e \otimes V$ | | | | | | 0 | $(\mathbb{C}H) \oplus \mathfrak{sl}_4$ | $\mathbb{C}E$ | $W$ |
| $f \otimes V'$ | | | | | | | 0 | $W$ | $\mathbb{C}F$ |
| $e \otimes V'$ | | | | | | | | 0 | $(\mathbb{C}H) \oplus \mathfrak{sl}_4$ |
| $f \otimes V$ | | | | | | | | | 0 |

Le remplissage de cette table découle directement de la propriété de surjectivité du crochet signalée ci-dessus à l'exception des termes $(\mathbb{C}H)$ notés entre parenthèses pour lesquels on a par exemple:

$$[[e \otimes V, f \otimes V'], E] = [e \otimes V, [f \otimes V', E]] = [e \otimes V, e \otimes V'] = \mathbb{C}E$$

Ce qui prouve que $\mathbb{C}H \subset [e \otimes V, f \otimes V']$.

Posons maintenant

$$l = \mathbb{C}H \oplus \mathfrak{sl}_4 \oplus (e \otimes V) \oplus (f \otimes V')$$

$$X = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus W \oplus (e \otimes V') \oplus (f \otimes V)$$

On lit facilement sur la table que:

- $l$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{f}(4)$.
- L'idéal engendré par n'importe lequel de ses éléments non nul est $l$ tout entier. Ainsi $l$ est simple et la classification de [10] permet d'identifier $l \simeq \mathfrak{sl}(4,1)$.
- $X$ est un $l$–module simple car il est monogène, engendré par n'importe lequel de ses éléments.
- Dans $\mathfrak{f}(4)$, $[X, X]$ est inclus dans $l$.

Compte tenu que pour une superalgèbre de Lie quadratique classique $\mathfrak{g}$, si $\alpha$ et $\beta$ sont des racines, $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ si et seulement si $\alpha+\beta \neq 0$, on a $l \perp X$. De plus, la superdimension de $X$ est bien nulle comme annoncé dans la proposition. $\square$

**Remarque** Le corollaire de la proposition 4.1 permet de redémontrer que les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(E)}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(E)}$ ne dépendent que de la superdimension de $E$, d'où $\chi_{\mathfrak{f}(4)} = \chi_{\mathfrak{sl}_3}$.

## Références


[1] **D Bar-Natan**, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology 34 (1995) 423–472

[2] **A M Cohen**, **R de Man**, *Computational evidence for Deligne's conjecture regarding exceptional Lie groups*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322 (1996) 427–432

[3] **S V Chmutov**, **S V Duzhin**, **A.I. Kaishev**, *The algebra of 3-graphs*, Tr. Mat. Inst. Steklova 221 (1998) 168–196

[4] **P Deligne**, *La série exceptionnelle de groupes de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322 (1996) no. 4, 321–326

[5] **P Deligne**, **R de Man**, *La série exceptionnelle de groupes de Lie. II.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323 (1996) no. 6, 577–582

[6] **J M Figueroa-O'Farrill**, **T Kimura**, **A Vaintrob**, *The universal Vassiliev invariant for the Lie superalgebra* $\mathfrak{gl}(1,1)$, Comm. Math. Phys. 185 (1997) 93–127

[7] **P Freyd**, **J Hoste**, **W B R Lickorish**, **K Millet**, **A Ocneanu**, **D Yetter**, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 239–246

[8] **V F R Jones**, *A polynomial invariant of knots via Von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 103–111

[9] **L H Kauffman**, *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. 312 (1990) 417–471

[10] **V G Kac**, *Lie superalgebras*, Advances in math. 26 (1977) 8–96

[11] **J A Kneissler**, *Relations in the algebra* $\Lambda$, preprint (Oct 1997)

[12] **J A Kneissler**, *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve*, preprint (Juin 1997)

[13] **A M Cohen**, **M A A van Leeuwen**, **B. Lisser**, *LiE, a package for lie group computations*, CAN. Amsterdam (1992)

[14] **T T Q Le**, **J Murakami**, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. 142 (1996) 39–65

[15] **T T Q Le**, **J Murakami**, *The universal Vassiliev–Kontsevich invariant for framed oriented links*, Compositio Math. 102 (1996) 41–64

[16] **T T Q Le**, **J Murakami**, *Representation of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral*, Comm. Math. Phys. 168 (1995) 535–562

[17] **B Patureau-Mirand**, *Caractères sur l'algèbre de diagrammes* $\Lambda$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I (1999) 803–806

[18] **A. Sergeev**, *The invariant polynomials on simple Lie superalgebras*, preprint (Oct 1998)

[19] **V. Vassiliev**, *Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications* (V I Arnold, ed) Amer. Math. Soc. Providence (1990)

[20] **P Vogel**, *Invariants de Vassiliev des nœuds*, Sém. Bourbaki, 1992–93, Astérisque 216 (1993) 213–232

[21] **P Vogel**, *Algebraic structures on modules of diagrams*, preprint à paraître dans Inventiones Mathematicae