ISSN 1464-8997

Geometry & Topology Monographs
Volume 1: The Epstein Birthday Schrift
Pages 181–248

Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative

Frédéric Haglund
Frédéric Paulin

Abstract We prove that numerous negatively curved simply connected locally compact polyhedral complexes, admitting a discrete cocompact group of automorphisms, have automorphism groups which are locally compact, uncountable, non linear and virtually **simple**. Examples include hyperbolic buildings, Cayley graphs of word hyperbolic Coxeter systems, and generalizations of cubical complexes, that we call *even* polyhedral complexes. We use tools introduced by Tits in the case of automorphism groups of trees, and Davis–Moussong's geometric realisation of Coxeter systems.

Résumé Nous montrons que de nombreux complexes polyédraux simplement connexes, localement compacts, à courbure négative, admettant un groupe discret cocompact d'automorphismes, ont leur groupe d'automorphismes localement compact, non dénombrable, non linéaire et virtuellement **simple**. Parmi les exemples, certains sont des immeubles hyperboliques, des graphes de Cayley de systèmes de Coxeter hyperboliques au sens de Gromov, et des généralisations de complexes cubiques, que nous appelons des complexes polyédraux *pairs*. Nous utilisons des outils dus à Tits dans le cas des groupes d'automorphismes d'arbres, et la réalisation géométrique de Davis–Moussong des systèmes de Coxeter.

AMS Classification 20E32, 51E24, 20F55; 20B27, 51M20

Keywords Simple group, polyhedral complex, even polyhedron, word hyperbolic group, hyperbolic building, Coxeter group

1 Introduction

J. Tits a démontré dans [31] que le groupe des automorphismes (sans inversion) d'un arbre (différent de la droite) homogène ou semi-homogène localement fini, est localement compact, non dénombrable et simple. Le but de cet article est de démontrer la simplicité de groupes d'automorphismes de nombreux complexes polyédraux localement finis, ayant des propriétés de courbure négative, comme par exemple des immeubles hyperboliques ou des complexes cubiques.

Un *immeuble hyperbolique* (voir [19]) est un immeuble de type un système de Coxeter $(W(P), S(P))$ de la forme suivante. Soit P un polyèdre (compact convexe, pas forcément un simplexe) de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ de dimension n, avec P *de Coxeter* (i.e. ses angles dièdres sont de la forme $\frac{\pi}{k}$ avec k un entier au moins 2). Alors $S(P)$ est l'ensemble des réflexions (orthogonales) sur les faces de codimension 1 de P, et $W(P)$ le groupe d'isométries de $\mathbb{H}^n$ engendré par $S(P)$.

Un premier exemple est l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$ avec $p \geq 5, q \geq 3$, qui est l'unique complexe polyédral de dimension 2, dont les polygones sont des copies du p–gone hyperbolique régulier à angles droits P_p, et le link de chaque sommet est isomorphe au graphe biparti complet à $q + q$ sommets (voir [7]). Il existe une numérotation des arêtes de $I_{p,q}$ (unique une fois numérotées les arêtes d'un polygone fixé) par $I = \{1, \cdots p\}$ de sorte que le long du bord de chaque polygone les arêtes apparaissent avec l'ordre cyclique ou l'ordre inverse. L'ensemble des polygones de $I_{p,q}$ est alors un système de chambres sur I, deux chambres étant i–adjacentes si et seulement si les polygones correspondants se rencontrent le long d'une arête numérotée i. Il est facile (voir [19]) de montrer que $I_{p,q}$ est un immeuble de type $(W(P_p), S(P_p))$.

Théorème 1.1 *Le groupe des automorphismes préservant le type de l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$ est un groupe localement compact, non dénombrable, non linéaire au moins si p est multiple de 4, et simple.*

Dans [23] sont construits de nombreux autres exemples. Soit L un m–gone généralisé fini épais classique (i.e. un graphe biparti complet à $p + q$ sommets avec $p, q \geq 3$ si $m = 2$, ou si $m \geq 3$, l'immeuble sphérique de rang 2 d'un groupe de Chevalley fini $\underline{G}(\mathbb{F}_q)$, avec $\underline{G}$ un groupe algébrique simple, de groupe de Weyl le groupe diédral D_{2m} d'ordre $2m$). Par exemple, L peut être l'immeuble des drapeaux du plan projectif sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, avec $m = 3$. Soit k un entier pair au moins 6. Alors dans [23] est construit un 2–complexe polyédral $A_{k,L}$, dont les polygones sont des copies du k–gone hyperbolique $P_{k,m}$ régulier à angles $\frac{\pi}{m}$, et le link de chaque sommet est isomorphe au graphe biparti L. L'ensemble de ses polygones possède aussi une structure naturelle d'immeuble de type $(W(P_{k,m}), S(P_{k,m}))$ (voir [19]).

Théorème 1.2 *Le groupe des automorphismes de l'immeuble hyperbolique $A_{k,L}$ est un groupe localement compact, non dénombrable, non linéaire au moins si k est multiple de 4, et virtuellement simple.*

En fait, $A_{k,L}$ est la réalisation géométrique au sens de Davis–Moussong (voir [25]) du système de Coxeter $W(k,L)$, dont la matrice de Coxeter est la matrice d'adjacence du graphe L, où les 1 et 0 ont été remplacés par des $\frac{k}{2}$ et ∞ respectivement. Le 1–squelette de la réalisation géométrique de Davis–Moussong d'un système de Coxeter (W,S) s'identifie au graphe de Cayley de (W,S), et nous montrons que tout automorphisme du 1–squelette s'étend à cette réalisation géométrique (voir section 5.1). Appelons *mur* du graphe de Cayley l'ensemble des points fixes d'un conjugué d'un élément de S. Un mur est *propre* si aucune des deux composantes du complémentaire du mur ne reste à distance bornée du mur. Un automorphisme du graphe de Cayley fixe *strictement* un mur s'il fixe le mur et n'échange pas les deux composantes de son complémentaire.

Un système de Coxeter est dit *rigide* s'il n'existe pas d'automorphisme non trivial de son diagramme qui fixe les arêtes de poids fini issues d'un de ses sommets. Généralisant [23], nous montrons que le groupe des automorphismes (de graphe) du graphe de Cayley de (W,S) est non dénombrable si et seulement si (W,S) est non rigide, et nous le calculons exactement dans le cas rigide (voir théorème 5.12).

Théorème 1.3 *Si (W,S) est un système de Coxeter, avec W ne contenant pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, alors le quotient, par son sous-groupe distingué des éléments fixant l'infini, du sous-groupe G^+ des automorphismes du graphe de Cayley de (W,S) engendré par les fixateurs stricts de murs propres, est simple. Il est non trivial, donc non dénombrable, si et seulement si (W,S) n'est pas rigide.*

Un *complexe cubique* de dimension n est un complexe polyédral P, dont les polyèdres sont des cubes euclidiens $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^k$, tout cube de P étant contenu dans un cube de dimension (maximale) n. Il est dit CAT(0) s'il est simplement connexe, et si pour tout cube c de P, le link $lk(c)$ de c vérifie la condition suivante: tout cycle d'arêtes dans $lk(c)$ est de longueur au moins 3, et si de longueur 3, borde un simplexe de $lk(c)$. Pour toute arête a de P, il existe un unique sous-complexe (de la subdivision barycentrique) de P, appelé *mur* ("geometric hyperplane" par M. Sageev [28]), rencontrant a en son milieu, et dont toute intersection non triviale avec un cube de dimension n de P est un hyperplan $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^k \times \{0\} \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{n-k-1}$ de ce cube. Par exemple, si $n=1$, alors P est un arbre, et un mur est le milieu d'une arête.

Nous introduisons une notion de *polyèdre pair* (section 4.1) et donc de *complexe polyédral pair* (i.e. dont tous les polyèdres sont pairs), généralisant strictement celle de cube et complexe cubique, avec ses murs. Un polyèdre d'un espace à courbure constante est pair s'il est symétrique par rapport à l'hyperplan médiateur de chacune de ses arêtes, et si un tel hyperplan ne passe pas par un de ses sommets. Nous donnons en section 4.1 la construction explicite de tous les polyèdres pairs euclidiens ou hyperboliques, à partir des systèmes de Coxeter finis, ainsi que la liste complète des polyèdres hyperboliques pairs de dimension 2 et 3 qui sont eux-mêmes des polyèdres de Coxeter. M. Davis nous a signalé que nos polyèdres pairs sont, du point de vue combinatoire, exactement les *zonotopes de Coxeter* (aussi appelés "Coxeter cell" dans [16]), i.e. les polyèdres duaux de l'arrangement d'hyperplans formé par les hyperplans fixes des conjugués des réflexions d'un système de Coxeter fini. Nos complexes polyédraux pairs sont donc, du point de vue combinatoire, des cas particuliers de "zonotopal cell complex" au sens de [17]. Notons qu'il existe des polyèdres pairs non isométriques ayant même combinatoire.

Théorème 1.4 *Soit P un complexe polyédral pair (par exemple cubique), localement fini,* $\mathrm{CAT}(0)$*, admettant un groupe discret cocompact d'automorphismes qui est hyperbolique au sens de Gromov. Alors le groupe d'automorphismes G^+ de P engendré par les fixateurs stricts de murs propres est presque simple (au sens que tout éventuel sous-groupe distingué propre est relativement compact). Si P est* $\mathrm{CAT}(-1)$ *et tout point de P appartient à une droite géodésique, alors G^+ est simple, et non dénombrable si non trivial.*

Bien sûr, G^+ peut être trivial. Pour tout type de polyèdre euclidien pair possible, nous construisons (section 5.4) un complexe polyédral pair $\mathrm{CAT}(-1)$, dont les cellules maximales sont de ce type, et dont le groupe G^+ est non dénombrable. Un arbre homogène ou semi-homogène localement fini admet un groupe discret cocompact d'automorphismes qui est libre, donc hyperbolique au sens de Gromov (voir section 2 pour des rappels sur cette notion.) Nous retrouvons ainsi le résultat de J.Tits. La condition de locale finitude n'est pas vraiment nécessaire (voir section 7). La condition d'hyperbolicité n'est sans doute pas optimale. Mais comme le montre le cas du produit de deux arbres homogènes, il faut une hypothèse d'irréductibilité sur P. Nous renvoyons à [11] pour un critère ingénieux de simplicité sur les groupes discrets d'automorphismes du produit de deux arbres.

Une généralisation immédiate du théorème B de Niblo–Reeves [26] est la suivante.

Théorème 1.5 *Soit P un complexe polyédral pair* $\mathrm{CAT}(0)$ *de dimension finie. Toute action polyédrale sur P d'un groupe ayant la propriété* (T) *de Kazhdan a un point fixe global.*

Pour généraliser la situation des exemples ci-dessus, nous introduisons (section 3) une notion abstraite d'ensemble discret X muni d'un système de *murs*, modélisant les propriétés de l'ensemble des sommets d'un complexe polyédral cubique (ou pair) CAT(0) et de la famille de ses hyperplans médiateurs des arêtes, ou d'un groupe de Coxeter W muni de sa famille de murs (voir [27, page 14]). Dans les sections 4.2 à 4.4, nous étudions l'espace à murs canoniquement associé à un complexe polyédral pair.

Sous des hypothèses d'hyperbolicité au sens de Gromov (voir section 2.2 pour les propriétés que nous utiliserons) du graphe d'incidence de cette famille de murs, nous montrons (section 6) un théorème de simplicité sur des groupes de bijections de X préservant le système de murs, vérifiant une condition (P) analogue à celle introduite par J. Tits [31] dans le cas des arbres. Le lemme clef 6.4 sur les commutateurs est analogue au lemme 4.3 de [31]. Enfin, en section 7, nous appliquons ce théorème de simplicité à nos exemples.

Nous remercions F. Choucroun, pour son exposé sur l'article de J. Tits, qui a servi de point de départ à ce travail, ainsi que S. Mozes et M. Davis.

2 Rappels sur les espaces métriques hyperboliques

Nous renvoyons à [21, 20] pour les définitions, références, historiques et preuves des propriétés rappelées ci-dessous des espaces métriques hyperboliques au sens de Gromov, à [9, 6] pour celles des espaces métriques CAT(χ) au sens d'Alexandroff–Topogonov et à [8] pour celles des complexes polyédraux. Le lecteur connaisseur peut se ramener directement à la proposition 2.1.

2.1 Définitions diverses

Une *géodésique* d'un espace métrique X est une isométrie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans X. On parle de *segment, rayon* ou *droite géodésique* si I est de la forme $[a,b], [a,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. Un espace métrique est *géodésique* si par deux de ses points passe un segment géodésique.

Un espace géodésique est *hyperbolique* (au sens de Gromov) s'il existe une constante $\delta \geq 0$ (dite *constante d'hyperbolicité*) telle que tout point de tout côté de tout triangle géodésique est à distance au plus δ d'un point de l'un des deux autres côtés. Un groupe de type fini G, muni d'une partie génératrice S, est *hyperbolique* (au sens de Gromov) si le graphe de Cayley de G pour S, muni de sa métrique naturelle, est hyperbolique. Une application $f\colon X \to Y$ entre deux espaces métriques est une *quasi-isométrie* s'il existe des constantes $\lambda \geq 1, c, c' \geq 0$ telles que pour tous x, y dans X et z dans Y:

$$\frac{1}{\lambda} d(x,y) - c \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) + c \quad \text{et} \quad d(z, f(X)) \leq c'.$$

Un espace géodésique quasi-isométrique à un espace hyperbolique est encore hyperbolique, donc l'hyperbolicité d'un groupe ne dépend pas de la partie génératrice fixée.

Deux rayons géodésiques sont *asymptotes* si leur distance de Hausdorff est finie. Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons géodésiques dans X. L'ensemble des classes d'équivalence est appelé le *bord* (ou espace à l'infini) de X, et noté ∂X. Il existe une topologie naturelle sur $\overline{X} = X \cup \partial X$, métrisable compacte lorsque X est hyperbolique, localement compact, complet. Toute quasi-isométrie entre deux espaces hyperboliques s'étend continûment en un homéomorphisme de ∂X sur ∂Y.

Soit X un espace géodésique et $\chi \in \mathbb{R}$. Soit $\mathbb{X}^2_\chi$ le plan riemannien complet simplement connexe à courbure constante χ ($\mathbb{X}^2_\chi$ est le plan hyperbolique, le plan euclidien, la sphère de dimension 2 si $\chi = -1, 0, 1$). Soit $\triangle = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ un triangle géodésique dans X. Soit $\overline{\triangle} = [\overline{x}\,\overline{y}] \cup [\overline{y}\,\overline{z}] \cup [\overline{z}\,\overline{x}]$ un triangle géodésique dans $\mathbb{X}^2_\chi$ ayant mêmes longueurs des côtés que $\triangle$. Si $s \in \triangle$, le point sur le côté correspondant de $\overline{\Delta}$, à la même distance des extrémités que s, est noté $\overline{s}$. Un triangle géodésique $\triangle$ dans X est $\mathrm{CAT}(\chi)$ s'il est plus “pincé” que le triangle correspondant de l'espace modèle, i.e. si, pour tous points $s, t \in \triangle$, on a

$$d_X(s,t) \leq d_{\mathbb{X}^2_\chi}(\overline{s}, \overline{t}).$$

Un espace géodésique est $\mathrm{CAT}(\chi)$ si tout triangle géodésique de X est $\mathrm{CAT}(\chi)$. Si $\chi < 0$, un espace $\mathrm{CAT}(\chi)$ est hyperbolique au sens de Gromov.

Un *complexe polyédral* P est un complexe cellulaire (voir par exemple [30]) dont les cellules sont des polyèdres (compacts convexes) d'un espace à courbure constante, et dont les applications d'attachements sont cellulaires et localement isométriques sur chaque cellule ouverte. Un *complexe polygonal* est un complexe polyédral de dimension 2. Un complexe polyédral, dont les polyèdres sont des simplexes ne se rencontrant qu'au plus en une face, est précisément (la réalisation géométrique d') un complexe simplicial.

Un *automorphisme* de complexe polyédral de P est un automorphisme du complexe cellulaire P. Nous identifierons deux automorphismes qui envoient chaque cellule ouverte sur une même cellule ouverte. Un automorphisme est dit *isométrique* (ou une *isométrie polyédrale*) si sa restriction à chaque polyèdre est isométrique. Par exemple, si P est un rectangle euclidien non carré, alors P admet 4 isométries polyédrales, et 8 automorphismes. Si P est muni de la topologie faible usuelle, le groupe des automorphismes de P sera muni de la topologie compacte–ouverte. Si P est localement fini, alors Aut G est localement compact, et le fixateur de tout polyèdre de P est un groupe compact profini.

Si P n'a qu'un nombre fini de classe d'isométrie de polyèdres, alors (voir [8]) il existe une métrique d (naturelle pour les automorphismes de P) géodésique et complète, ainsi définie. Une *géodésique brisée* γ de P est une courbe qui, par morceaux, est contenue et géodésique dans un polyèdre de P. Sa longueur $\ell(\gamma)$ est la somme des longueurs des morceaux géodésiques précédents. Alors $d(x,y)$ est la borne inférieure des longueurs des géodésiques brisées entre x et y.

Sauf mention explicite du contraire, tout complexe polyédral sera muni de cette distance. Toute isométrie polyédrale est une isométrie pour cette distance. La topologie faible et la topologie induite par cette distance coïncident si et seulement si P est localement fini. Voir [21] pour l'équivalence, dans le cas des complexes cubiques, entre la définition ci-dessus de CAT(0) et celle donnée en introduction.

Si C est un complexe polyédral n'ayant qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, et $x \in C$, nous noterons $lk(x, C)$ l'espace des germes de segments géodésiques issus de x. Il possède une structure naturelle de complexe polyédral, dont les cellules sont des polyèdres sphériques.

Un *graphe* est un 1–complexe simplicial connexe. En identifiant chaque arête à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on obtient un complexe polyédral. Sa métrique est l'unique métrique géodésique rendant chaque arête isométrique à $[0,1]$. Un *arbre* est un graphe simplement connexe. Un arbre est CAT$(-\infty)$, i.e. CAT(χ) pour tout $\chi \in \mathbb{R}$.

2.2 Groupes d'isométries non élémentaires

Soit Y un espace métrique complet, géodésique et hyperbolique, tel que par deux points de $Y \cup \partial Y$ passe un segment, rayon ou droite géodésique (cette dernière condition est toujours remplie si Y est localement compact). On note $\partial^2 Y$ l'espace des couples de points distincts de ∂Y. On note $\overline{Z}$ l'adhérence dans $Y \cup \partial Y$ d'une partie Z de Y, et $\partial Z = \overline{Z} \cap \partial Y$.

Une isométrie g de Y est dite *hyperbolique* si pour un (donc pour tout) point x dans Y, l'application de $\mathbb{Z}$ dans Y qui à k associe $g^k x$ est une quasi-isométrie sur son image. En particulier, g admet alors exactement deux points fixes dans ∂Y.

Soit G un sous-groupe du groupe des isométries de Y (n'agissant peut-être pas proprement discontinument). Définissons l'*ensemble limite* ΛG de G comme l'adhérence dans ∂Y de l'ensemble des points fixes dans ∂Y des éléments hyperboliques de G. Le groupe G est dit *non élémentaire* si son ensemble limite contient au moins trois points et ne contient pas de point fixe global (cette dernière condition est toujours remplie si Y est localement compact et G discret). Si G est non élémentaire, ΛG est non dénombrable et sans point isolé; c'est l'ensemble d'accumulation dans ∂Y de l'orbite par G de tout point de Y; c'est le plus petit fermé non vide invariant par G dans ∂X; l'orbite par G de tout point de ΛG est dense dans ΛG. On note $\Lambda^2 G$ l'ensemble des couples de points distincts de ΛG.

Remarque Par exemple, si Y est localement compact, si G contient un sous-groupe agissant proprement discontinûment avec quotient compact sur Y, alors G est non élémentaire et $\Lambda G = \partial Y$.

Proposition 2.1 *Si G est non élémentaire, alors l'ensemble des couples des point fixes des éléments hyperboliques de G est dense dans $\Lambda^2 G$.*

Soit H un sous-groupe distingué non trivial de G. Si G est non élémentaire, alors ou bien H est contenu dans le noyau de l'action de G sur ΛG, ou bien H est non élémentaire, d'ensemble limite égal à celui de G.

Preuve La première assertion est due à [21, Corollaire 8.2.G].

Pour la seconde assertion, supposons que $h \in H$ n'agisse pas trivialement sur l'ensemble limite de G. Montrons tout d'abord que H contient au moins un élément hyperbolique.

Soit $a \in \Lambda G$ tel que $ha \neq a$. Par invariance, ha est dans ΛG. Soit δ une constante d'hyperbolicité de X. Soit U un voisinage ouvert suffisamment petit de a dans $Y \cup \partial Y$, de sorte que U et hU soient disjoints, et séparés d'une distance grande devant δ. Soit g un élément hyperbolique de G, dont les points fixes répulsif $g^- \in \Lambda G$ et attractifs $g^+ \in \Lambda G$ sont dans U et hU respectivement. Soit γ une géodésique entre g^- et g^+. Soit y un point de $\gamma \cap U$. En particulier, hy appartient à hU.

Si n est assez grand, alors $g^n y$ est proche de g^+, donc appartient à hU. Donc $h^{-1} g^n y$ appartient à U, et si n est assez grand, $g^{-n} h^{-1} g^n y$ est beaucoup plus

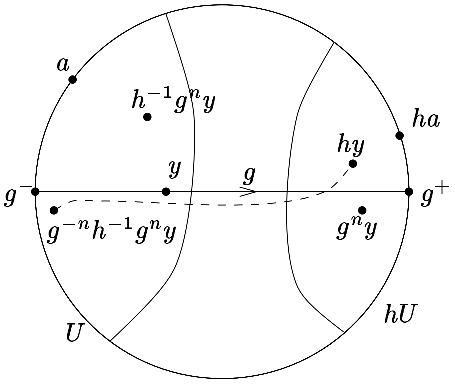


Figure 1: Construction d'un élément hyperbolique dans H

proche de g^- que y. Donc il existe une constante K (ne dépendant que de δ) telle que y est à distance au plus K d'un segment géodésique entre $g^{-n}h^{-1}g^ny$ et hy. Quitte à avoir pris U suffisamment petit, on a

$$\inf\{d(y,hy),d(y,g^{-n}h^{-1}g^ny)\} > 2K+1000\delta.$$

Par [21, Lemma 8.1.A], on en déduit que $h(g^{-n}h^{-1}g^n)^{-1}$ est hyperbolique. Comme H est distingué, ceci montre notre affirmation préliminaire.

Maintenant, comme les conjugués d'un élément hyperbolique h de H sont encore dans H, que l'orbite par G d'un point fixe de h est contenue et dense dans ΛG, on en déduit que $\Lambda H = \Lambda G$. En particulier ΛH contient au moins trois point. Si H fixait un point a de ΛH, celui-ci serait unique [21, 8.2.D]. Comme H est distingué dans G, le point a serait fixe par G, ce qui est impossible. □

Lemme 2.2 *Supposons ∂Y non vide sans point isolé. Si Y est localement compact, le noyau de l'action de G sur le bord de Y est relativement compact dans le groupe des isométries de Y (donc compact si G est fermé dans le groupe des isométries de Y). Si Y est* CAT(-1) *et tout point de Y appartient à une droite géodésique, alors G agit fidèlement sur le bord.*

Preuve Pour la première assertion, soient x,y,z trois points distincts de ∂Y et p une quasi-projection de x sur une géodésique entre y et z. Une isométrie de Y qui fixe (point par point) le bord de Y bouge p d'une distance inférieure à une constante. Le résultat découle alors du théorème d'Ascoli.

Pour la seconde assertion, soit $g \in G$ fixant le bord de Y. Soit $x \in Y$ et $a,b \in \partial Y$ les extrémités d'une droite géodésique D passant par x. Soient

a', b' deux points proches et distincts de a, b respectivement. Soit p, p' l'unique projection de a', b' sur D. Alors par unicité, p et p' sont fixes par l'isométrie g, et $x \in [p, p']$ aussi, par unicité du segment géodésique entre deux points. $\square$

3 Espaces à murs

Soit X un ensemble. Un *mur* de X est une partition de X en deux sous-ensembles, appelés les *demi-espaces* définis par le mur. Un mur *sépare* deux points x et y de X si et seulement si x appartient à l'un des demi-espaces définis par le mur et y appartient à l'autre. Un *système de murs sur* X est un ensemble $\mathcal{M}$ de murs de X tel que:

> (M) Pour tous x et y distincts dans X, l'ensemble $\mathcal{M}(x, y)$ des murs de $\mathcal{M}$ séparant x et y est fini non vide.

Un *espace à murs* est un couple $(X, \mathcal{M})$, où X est un ensemble et $\mathcal{M}$ un système de murs sur X. Tout singleton de X est alors l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

Dans un espace à murs $(X, \mathcal{M})$, on dit qu'un point z est *entre* deux points x et y si $\mathcal{M}(x, y)$ est la réunion (nécessairement disjointe) de $\mathcal{M}(x, z)$ et $\mathcal{M}(z, y)$. Le *graphe associé* à $(X, \mathcal{M})$ est le graphe ayant X pour ensemble de sommets, et une arête entre deux sommets x et y si et seulement si les seuls points de X entre x et y sont x et y. On note $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, \mathcal{M})$ ce graphe, qui est connexe d'après l'axiome (M). Un mur M de X est dit *transverse* à une arête de $\mathcal{G}(X, \mathcal{M})$ lorsqu'il sépare ses extrémités.

Un espace à murs $(X, \mathcal{M})$ est dit *hyperbolique* si son graphe associé est un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov, et s'il vérifie la condition (H) suivante de non trivialité et de compatibilité entre la structure métrique de $\mathcal{G}$ et le système de demi-espaces défini par $\mathcal{M}$:

> (H) Pour tout $\xi \in \partial\mathcal{G}$, l'ensemble des parties de $\mathcal{G} \cup \partial\mathcal{G}$ de la forme $\overline{A}$, où A est un demi-espace de $(X, \mathcal{M})$ tel que $\overline{A}$ contient ξ dans son intérieur, est une base de voisinages de ξ dans $\mathcal{G} \cup \partial\mathcal{G}$.

3.1 Automorphismes d'espaces à murs et propriété (P) de Tits

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace à murs. Un *automorphisme* ϕ de $(X, \mathcal{M})$ est une bijection de X préservant $\mathcal{M}$. Il induit un automorphisme du graphe $\mathcal{G}$, encore noté ϕ. Si $(X,\mathcal{M})$ est hyperbolique, alors ϕ induit un homéomorphisme du bord hyperbolique $\partial\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$, toujours noté ϕ.

Si $\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})$ est le groupe des automorphismes de (X,M), et $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ le groupe des automorphismes de graphe de $\mathcal{G}$, alors l'application $\phi\mapsto\phi$ est une injection de $\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$, en général non surjective (voir toutefois la preuve du théorème 5.1). Nous identifierons $\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})$ avec son image dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$. Lorsque $\mathcal{G}$ est localement fini, nous munirons $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ de la topologie compacte–ouverte et $\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})$ de la topologie induite.

Un automorphisme *fixe strictement* un mur M s'il fixe les sommets de toute arête transverse à M. Un automorphisme d'un espace à murs *fixe strictement* un demi-espace A s'il fixe A et fixe strictement le mur $M=\{\mathcal{A},X\setminus A\}$.

Lemme 3.1 *Un automorphisme fixant strictement un mur M préserve chacun des demi-espaces de X définis par M.*

Preuve Remarquons d'abord que si M sépare deux points x,y, alors tout chemin entre x et y dans $\mathcal{G}$ contient une arête de $\mathcal{G}$ transverse à M.

Notons $M=\{A,X\setminus A\}$ et $V(M)$ l'ensemble des sommets d'arêtes de $\mathcal{G}$ transverses à M. Si x appartient au demi-espace A, soit p un point de $V(M)$ à distance minimale de x. Par minimalité, p est dans A. Si ϕ fixe strictement M, alors il fixe point par point $V(M)$. Il envoie un chemin γ de longueur minimale entre x et p sur un chemin de même longueur entre $\phi(p)=p$ et $\phi(x)$. Si $\phi(x)$ n'est pas dans A, alors le chemin $\phi(\gamma)$ doit contenir une arête transverse à M, ce qui contredit le fait que ϕ préserve la distance combinatoire à $V(M)$. □

On appelle *chaîne* une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de demi-espaces qui est strictement décroissante pour l'inclusion. Un automorphisme *fixe strictement* cette chaîne s'il fixe strictement chaque mur $M_i=\{A_i,X\setminus A_i\}$. Par le lemme précédent, il préserve alors chaque demi-espace A_i.

Soit G un groupe d'automorphismes de $(X,\mathcal{M})$. Si $M=\{A,X\setminus A\}$ est un mur de $\mathcal{M}$, soit G_M le sous-groupe de G fixant strictement M. Par le lemme précédent, le groupe G_M préserve les ensembles $X\setminus A$ et A. Nous notons G_A (resp. $G_{X\setminus A}$) le groupe des permutations de A (resp. $X\setminus A$) induit par G_M. Le produit des restrictions donne un morphisme injectif

$$G_M\to G_A\times G_{X\setminus A}.$$

Soit $C=(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une chaîne. Soit G_C le sous-groupe de G fixant strictement C. Pour tout i, le groupe G_C préserve l'ensemble $A_i\setminus A_{i+1}$, et nous notons

$G_{C,i}$ le groupe des permutations de cet ensemble induit par G_C. Le produit direct des restrictions $G_C \to G_{C,i}$ est un morphisme

$$G_C \to \prod_{i\in\mathbb{Z}} G_{C,i}.$$

Lemme 3.2 *Ce morphisme est injectif.*

Preuve Il suffit de montrer que pour toute chaîne $C = (A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $(X,\mathcal{M})$, la réunion des $A_i \setminus A_{i+1}$ vaut tout X. Supposons par l'absurde qu'il existe un point x n'appartenant pas à cette réunion. Supposons que x appartient à A_0 (si $x \in X \setminus A_0$, le raisonnement est le même, quitte à renverser l'ordre de $\mathbb{Z}$). Soit $x_0 \in A_0 \setminus A_1$. Alors x_0 appartient à $X \setminus A_i$ et x appartient à A_i pour tout $i \geq 1$. Donc le mur $M_i = \{X \setminus A_i, A_i\}$ sépare x_0 et x pour tout $i \geq 1$, ce qui contredit la finitude de $\mathcal{M}(x, x_0)$. □

La définition suivante est alors analogue à la propriété homonyme de [31].

Définition 3.3 On dit qu'un groupe G d'automorphismes de $(X,\mathcal{M})$ *vérifie la propriété* (P) si pour tout mur M et toute chaîne C, les morphismes précédents sont surjectifs, i.e. des isomorphismes.

Lemme 3.4 *Soit G un groupe d'automorphismes d'un espace à murs, ayant la propriété* (P). *Alors le sous-groupe de G engendré par les fixateurs stricts de murs coïncide avec le sous-groupe de G engendré par les fixateurs stricts de demi-espaces.*

Preuve Le second groupe est contenu dans le premier, par définition. Il suffit donc de montrer que tout élément g de G fixant strictement un mur $M = \{A^-, A^+\}$ est produit de deux éléments g^-, g^+ fixant strictement les demi-espaces A^-, A^+ respectivement. Par la propriété (P), le morphisme $G_M \to G_{A^-} \times G_{A^+}$ est surjectif. Il suffit de prendre pour g^-, g^+ des préimages de $(g|_{A^-}, id)$ et $(id, g|_{A^+})$ respectivement. □

Considérons la propriété suivante d'un espace à murs $(X,\mathcal{M})$.

> (M′) Pour tous demi-espaces A, B de $(X,\mathcal{M})$, avec B rencontrant A et son complémentaire, tout automorphisme fixant strictement le mur $M = \{A, X \setminus A\}$ préserve B.

Dans le cas d'un arbre, cette condition est vide (donc n'apparaît pas dans [31]).

Lemme 3.5 *Si un espace à murs* $(X,\mathcal{M})$ *vérifie la condition* (M′)*, alors le groupe de tous ses automorphismes vérifie la propriété* (P).

Preuve Soit $M=\{A^-,A^+\}$ un mur de $(X,\mathcal{M})$. Soit $h^\pm$ la restriction à $A^\pm$ d'un automorphisme $\overline{h}^\pm$ de $(X,\mathcal{M})$ fixant strictement M. Comme $A^-\cup A^+=X$, soit g la bijection de X valant $h^\pm$ sur $A^\pm$. Montrons que g préserve $\mathcal{M}$, ce qui impliquera la surjectivité de $\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})_M\to\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})_{A^-}\times\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M})_{A^+}$. Soit $N=\{B,X\setminus B\}$ un mur de $(X,\mathcal{M})$. Si B est contenu dans $A^\pm$, alors $g(B)=h^\pm(B)\subset A^\pm$, donc $g(B)=\overline{h}^\pm(B)$ est un demi-espace de $(X,\mathcal{M})$. D'où $g(N)$ est encore un mur de $(X,\mathcal{M})$. Si B rencontre à la fois A^- et A^+, alors les deux automorphismes $\overline{h}^-$ et $\overline{h}^+$ préservent B par la propriété (M′). Donc $\overline{h}^\pm$ préserve $B\cap A^\pm$. D'où g préserve B, et $g(N)=N$ est encore un mur de $(X,\mathcal{M})$.

Soit $C=(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une chaîne de $(X,\mathcal{M})$, et soit h_i la restriction à $A_i\setminus A_{i+1}$ d'un automorphisme $\overline{h}_i$ de $(X,\mathcal{M})$ fixant strictement M_i. Comme $X=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}A_i\setminus A_{i+1}$ (voir la preuve du lemme 3.2), il existe une bijection g de X valant h_i sur $A_i\setminus A_{i+1}$. Soit B un demi-espace de $(X,\mathcal{M})$. On montre comme précédemment que si B est contenu dans un $A_i\setminus A_{i+1}$, alors $g(B)$ est encore un demi-espace, et que, par la propriété (M′), si B rencontre au moins deux $A_i\setminus A_{i+1}$, alors $g(B)=B$. Donc g est un automorphisme de $(X,\mathcal{M})$. Ceci montre la surjectivité de $\mathrm{Aut}\,(X,\mathcal{M})_C\to\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Aut}\,(X,\mathcal{M})_{C,i}$. □

Un mur d'un espace à murs hyperbolique est dit *propre* si le bord à l'infini dans $\overline{\mathcal{G}}$ de chacun des demi-espaces qu'il définit n'est pas égal à tout $\partial\mathcal{G}$. Une chaîne $C=(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est *propre* si chaque mur $M_i=\{A_i,X\setminus A_i\}$ est propre. Dans la condition (H), nous pouvons de plus supposer que les murs définissant les demi-espaces A sont propres. Si G est un groupe d'automorphismes de $(X,\mathcal{M})$, nous noterons G^+ le sous-groupe de G engendré par les fixateurs stricts de murs propres.

Lemme 3.6 *Soit* $(X,\mathcal{M})$ *un espace à murs hyperbolique, de graphe associé* $\mathcal{G}$ *localement fini, et* G *un groupe d'automorphismes de* $(X,\mathcal{M})$*, fermé vu comme sous-groupe du groupe des automorphismes de* $\mathcal{G}$*, ayant la propriété* (P)*, agissant de manière non élémentaire sur* $\mathcal{G}$ *et d'ensemble limite égal à* $\partial\mathcal{G}$*. Si* G^+ *est non trivial, alors* G^+ *est non dénombrable.*

Preuve Soit M un mur propre, de fixateur strict non trivial. Soit G^+_M le sous-groupe de G fixant strictement le mur M et fixant l'un des demi-espaces, disons A, définis par M. Le sous-groupe G^+_M est fermé dans G, donc dans

$\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$. On en déduit que G_M^+ est localement compact. Pour montrer qu'il est non dénombrable, il suffit de montrer qu'il n'a pas de point isolé, et comme c'est un groupe topologique, que l'identité n'est pas isolée.

Soit g un élément non trivial de G_M^+, qui existe par la propriété (P) quitte à échanger A et $X \setminus A$, et K une partie compacte arbitraire de $\mathcal{G}$. Puisque M est propre, soit x un point de $\partial X \setminus \partial A$. Soit U un ouvert, contenu dans $\overline{X} \setminus (\overline{A} \cap K)$, contenant x. Puisque G est non élémentaire, il existe un élément hyperbolique h dans G dont le point fixe attractif est contenu dans U et le point fixe répulsif dans $\partial X \setminus \partial(X \setminus A)$. Si n est assez grand, alors $h^n(\overline{X \setminus A})$ est contenu dans U. Posons $g_n = h^n g h^{-n}$, qui appartient à G et même à G_M^+. Comme g vaut l'identité sur A, l'élément g_n vaut l'identité sur $h^n(A)$, donc sur K. Puisque g est non trivial, g_n l'est aussi. On en déduit que l'identité n'est pas isolée dans G_M^+. □

3.2 L'exemple classique des systèmes de Coxeter

Adoptons un premier point de vue algébrique (on trouvera dans [5, Chapitre IV, Section 1, Exemple 16], [27] toutes les justifications des affirmations ci-dessous). Soient (W,S) un système de Coxeter, $\mathcal{T}$ l'ensemble de ses *réflexions* (i.e. des conjugués dans W des éléments de S), et $\ell(w)$ la longueur minimale d'une écriture de $w \in W$ comme mot sur S. Pour $t \in \mathcal{T}$, posons:

$$A_t^+ = \{w \in W, \ell(w) < \ell(tw)\} \quad \text{et} \quad A_t^- = \{w \in W, \ell(w) > \ell(tw)\}.$$

Alors A_t^+ contient 1_W et A_t^- contient t. De plus, $\ell(w)$ et $\ell(tw)$, n'ayant pas la même parité, sont toujours différents. Donc $\{A_t^+, A_t^-\}$ est un mur de W (les demi-espaces $A_t^\pm$ sont appelées moitiés dans [5]). Notons $\mathcal{M}(W,S) = \mathcal{M}$ l'ensemble des murs ainsi obtenus (en correspondance biunivoque avec $\mathcal{T}$). Montrons que $\mathcal{M}(W,S)$ vérifie l'axiome (M).

Pour $w', w'' \in W$, l'ensemble des murs séparant w' de w'' correspond à l'ensemble des réflexions t de la forme $s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_1$, pour une écriture géodésique fixée $w'^{-1}w'' = s_1 \dots s_n$, avec $n = \ell(w'^{-1}w'')$. Il y a n telles réflexions, autrement dit $\mathrm{card}\, \mathcal{M}(w', w'') = \ell(w'^{-1}w'')$. En particulier, l'axiome (M) est vérifié, et le graphe de l'espace à murs $(W, \mathcal{M})$ s'identifie au graphe de Cayley de (W,S). Cette identification est W–équivariante (l'image par w de A_t^+ est $A_{t'}^\varepsilon$, où $t' = w^{-1}tw$ et $\varepsilon = +$ si $w \in A_t^+$, $\varepsilon = -$ sinon).

On peut aussi définir le système de murs $\mathcal{M}$ sur W en considérant diverses actions de W sur des complexes polyédraux.

Si W agit sur un espace P et si t est une réflexion, appelons *mur* de t dans P, et notons $M(t,P)$, l'ensemble des points fixes de t dans P. Pour P, prenons successivement le graphe de Cayley de (W,S) (noté $\mathcal{G}(W,S)$), la réalisation géométrique standard de (W,S) (notée $|W|$, voir [27]), et enfin sa réalisation géométrique au sens de Davis–Moussong (notée $|W|_0$). Chacun de ces trois complexes est un "appartement" au sens de Davis, voir [15] pour les définitions et propriétés concernant ces espaces W–homogènes; le complexe $|W|_0$ est introduit dans [15], et muni d'une métrique $\mathrm{CAT}(0)$ dans [25].

Notons que $|W|$ est un complexe simplicial de dimension card $S-1$ sur lequel W agit, de manière simplement transitive sur les simplexes de dimension maximale. On identifie les éléments de W aux centres de ces simplexes maximaux.

(Rappelons brièvement la construction de $|W|_0$. Soit Δ_S le simplexe standard d'ensemble de sommets S, dont les faces s'identifient aux parties de S. Si T est une partie de S, on note W_T le *sous-groupe spécial* de W engendré par T. Soit $N = N(W,S)$ le sous-complexe simplicial de Δ_S, appelé *nerf fini* de (W,S), dont les simplexes sont les parties T de S telles que W_T soit fini. En particulier, N contient tous les sommets de Δ_S. Soit $C(W,S) = x_0 * N'$ le cône simplicial (de sommet x_0) sur la subdivision barycentrique N' de N. Pour tout sommet s de N, on note F_s l'étoile de s dans N', naturellement contenu dans $C(W,S)$. On considère alors le quotient

$$W \times C(W,S)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(w,x) \sim (w',x')$ s'il existe $s \in S$ tel que $w' = ws$ et $x' = x \in F_s$. On montre (voir [25]) que ce quotient admet une structure de subdivision barycentrique d'un complexe polyédral euclidien $\mathrm{CAT}(0)$ $|W|_0$, d'ensemble de sommets l'image de $W \times \{*\}$, que l'on identifie avec W.)

Pour chacune des trois actions considérées,

- le mur M d'une réflexion de W sépare P en deux composantes connexes, appelées *demi-espaces* de P définis par M;
- dans P, il y a un plongement W–équivariant de $\mathcal{G}(W,S)$, étendant celui de W (c'est le 1–squelette de $|W|_0$ par construction, et le graphe dual de $|W|$);
- si t est une réflexion, son mur dans P évite W, et deux éléments de W sont dans une même composante connexe de $P - M(t,P)$ si et seulement s'ils le sont dans $\mathcal{G}(W,S) - M(t,\mathcal{G}(W,S))$.

C'est pourquoi, pour chaque réflexion t, les intersections de W avec les deux demi-espaces de P définis par $M(t,P)$ donnent un mur de W indépendant de P. D'autre part, on vérifie que, si $P = \mathcal{G}(W,S)$, l'ensemble de murs ainsi obtenu est $\mathcal{M}(W,S)$.

Puisque le graphe de l'espace à murs $(W,\mathcal{M})$ s'identifie au graphe de Cayley de (W,S), il est hyperbolique (au sens de Gromov) si et seulement si W est un groupe hyperbolique. Nous vérifierons dans la section suivante que la condition (H) est satisfaite. Pour information, par un théorème de G. Moussong [25], les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) W est un groupe hyperbolique;

(2) W ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$;

(3) il n'existe pas de partie T de S telle que (W_T,T) soit un système de Coxeter affine de rang au moins 3, ni de paires de parties T_1,T_2 de S, disjointes, avec W_{T_1},W_{T_2} commutants et infinis.

Cas particuliers (Complexes de Benakli–Haglund, voir [4, 23]) Soit k un entier pair au moins 4, et L un graphe fini (sans boucle ni arête double), de maille (i.e. la plus petite longueur d'un cycle) au moins 5 si $k=4$, et 4 si $k=6$. Soit $(W(k,L),S(k,L))$ le système de Coxeter de matrice de Coxeter la matrice d'adjacence du graphe L, avec les 1 et 0 remplacés respectivement par $\frac{k}{2}$ et ∞. Il vérifie clairement la condition (3) ci-dessus.

Nous noterons $A(k,L)$ la réalisation géométrique au sens de Davis–Moussong de ce système de Coxeter. Alors (voir [23]) $A(k,L)$ est un complexe polygonal CAT(-1), dont les polygones sont des k–gones hyperboliques, le link de chaque sommet étant isomorphe à L.

Si p est un entier pair et $L_{q,q}$ est le graphe biparti complet sur $q+q$ sommets, alors l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$ est isomorphe, en tant que complexe polygonal, à $A(p,L_{q,q})$.

Un autre exemple d'espace à murs Par contre, si $p=2m+1$ est impair et $q\geq 5$, l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$ n'est isomorphe ni à un complexe polygonal $A(k,L)$ ni à un complexe cubique (sauf à passer à une subdivision). Supposons $p\geq 7$. Pour chaque côté fixé A du p–gone régulier à angles droits P, numérotons cycliquement $A=A_1,A_2,\cdots,A_p$ les côtés de P. Considérons les deux segments de perpendiculaire commune aux paires de côtés respectivement $A,A_{p-1/2}$ et $A,A_{p+1/2}$. Notons α_1,α_2 ces segments.

Nous appellerons *mur* de $I_{p,q}$ toute partie M de $I_{p,q}$ ainsi obtenue. Pour tout $i=1,2$ et pour toute identification isométrique d'un polygone de $I_{p,q}$ avec

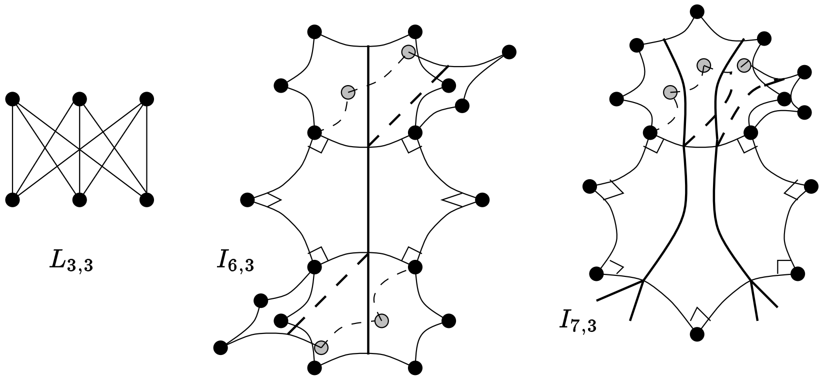


Figure 2: L'immeuble de Bourdon: son link, cas p pair, cas p impair

P, on considère la réunion M de toutes les géodésiques de $I_{p,q}$ passant par le segment α_i. Nous notons $X_{p,q}$ l'ensemble des sommets de $I_{p,q}$, et *mur* de $X_{p,q}$ la partition de $X_{p,q}$ obtenue en prenant l'intersection de $X_{p,q}$ avec les deux composantes connexes du complémentaire d'un mur de $I_{p,q}$. (Comme $I_{p,q}$ est simplement connexe, et qu'un mur sépare localement en deux composantes connexes, il sépare globalement en deux composantes connexes.)

Il est facile de montrer que l'espace à murs $(X_{p,q}, \mathcal{M}_{p,q})$ ainsi défini vérifie l'axiome (M). Le graphe associé $\mathcal{G}$ s'identifie avec le 1–squelette de $I_{p,q}$, mais les deux sommets de chaque arête de $I_{p,q}$ sont séparés par exactement deux murs. Ce système de demi-espace est différent de celui obtenu par subdivision en complexe cubique. Comme $I_{p,q}$ est $\mathrm{CAT}(-1)$, son 1–squelette est un espace métrique hyperbolique, de même bord que $I_{p,q}$. La condition (H) est facile à vérifier.

Le groupe Aut $I_{p,q}$ des automorphismes de complexe polygonal de l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$ s'identifie naturellement à Aut $(X_{p,q}, \mathcal{M}_{p,q})$. En effet, tout automorphisme de $I_{p,q}$ est une isométrie pour la distance de $I_{p,q}$, et donc envoie tout segment de perpendiculaire commune entre deux arêtes à distance cyclique $q-1/2$ ou $q+1/2$ sur le bord d'un polygone de $I_{p,q}$ sur un tel autre segment. Donc il préserve l'ensemble des sommets $X_{p,q}$ de $I_{p,q}$, ainsi que l'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}$ des demi-espaces, et Aut $I_{p,q}$ est contenu dans Aut $(X_{p,q}, \mathcal{M}_{p,q})$.

Comme les seuls cycles de longueur p dans le 1–squelette de $I_{p,q}$ sont les bords des polygones, il en découle que Aut $I_{p,q}$ est égal à Aut $(X_{p,q}, \mathcal{M}_{p,q})$

4 Complexes polyèdraux pairs à courbure négative ou nulle

4.1 Polyèdres pairs

Un polyèdre (compact convexe) C d'une variété riemanienne (complète, simplement connexe) à courbure constante ≤ 0 est *pair* si

> pour toute arête a de C, l'unique réflexion $\sigma_{a,C}$ de l'espace ambiant échangeant les extrémités de a préserve C, mais ne fixe aucun sommet de C.

Par exemple, si C est un polygone régulier, il est pair si et seulement s'il a un nombre pair de côtés. Un cube euclidien régulier de dimension quelconque est pair. Plus généralement, le produit de deux polyèdres euclidiens pairs est un polyèdre euclidien pair. Voir figure 3 pour d'autres exemples. Nous donnons ci-dessous une caractérisation constructive de tous les polyèdres pairs.

Soit $\mathbb{X}_\kappa$ l'espace à courbure constante $\kappa \leq 0$ de dimension n. Si $\kappa = 0$, nous prendrons $\mathbb{X}_\kappa = \mathbb{R}^n$. Si $\kappa < 0$, nous utiliserons le modèle de la boule de Poincaré pour l'espace hyperbolique $\mathbb{X}_\kappa$ à courbure constante κ. Le groupe des isométries de $\mathbb{X}_\kappa$ fixant l'origine s'identifie alors avec $O(n)$. Notons $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{X}_\kappa$ l'exponentielle riemannienne en l'origine (l'identité si $\kappa = 0$). Soit W un groupe fini engendré par des réflexions sur des hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^n$. L'application ϕ permet alors de définir les notions de *chambres, murs ... dans* $\mathbb{X}_\kappa$ pour l'action isométrique de W sur $\mathbb{X}_\kappa$.

Proposition 4.1 *Un polyèdre (compact convexe) C d'un espace $\mathbb{X}_\kappa$ à courbure constante $\kappa \leq 0$ est pair si et seulement s'il existe un point x dans $\mathbb{X}_\kappa$, un système de Coxeter fini (W, S) et une représentation (injective, envoyant chaque élément de S sur une réflexion) ρ de W dans le groupe des isométries de $\mathbb{X}_\kappa$ fixant x telle que C est l'enveloppe convexe de l'orbite par W d'un point y de l'intérieur d'une chambre. De plus, le 1–squelette de C est isomorphe au graphe de Cayley de (W, S).*

Preuve Supposons tout d'abord que C est pair. Notons W le groupe engendré par les réflexions dans $\mathbb{X}_\kappa$ par rapport aux hyperplans médiateurs des arêtes de C. Puisque C est invariant par W, le groupe W est fini et admet au moins un point fixe, le *centre métrique* x de la cellule C (c'est le centre de l'unique plus petite boule de $\mathbb{X}_\kappa$ contenant C). Nous supposerons que x est l'origine de $\mathbb{X}_\kappa$.

Fixons y un sommet de C, et notons S l'ensemble des réflexions dans $\mathbb{X}_\kappa$ par rapport aux hyperplans médiateurs des arêtes de C ayant y pour sommet. Par connexité du 1–squelette de C, le groupe W est engendré par S. Puisque c'est vrai au niveau de l'espace tangent en x (voir [5] par exemple), le groupe W agit simplement transitivement sur les chambres dans $\mathbb{X}_\kappa$ (qui sont les composantes connexes du complémentaire des hyperplans médiateurs des arêtes). Tout sommet de C est contenu dans une chambre, et la chambre contenant y ne contient pas d'autre sommet de C. Donc le groupe W agit simplement transitivement sur les sommets de C. Le sommet y de C est joint par une arête précisément aux sommets sy avec s dans S. Par définition du graphe de Cayley, le 1–squelette de C s'identifie donc au graphe de Cayley de (W,S). Comme C est l'enveloppe convexe de ses sommets, C est bien l'enveloppe convexe de l'orbite de y par W.

Réciproquement, soit C l'enveloppe convexe de l'orbite par W d'un point y de l'intérieur d'une chambre pour une représentation comme dans l'énoncé d'un système de Coxeter fini (W,S). Montrons que C est pair. Puisque toutes les images de y par W sont à la même distance de x, par convexité stricte des sphères, les sommets de C sont exactement les images de y par W. Le même argument de convexité stricte montre que le point y est strictement au-dessus de l'hyperplan affine passant par les sy pour s dans S. Donc les segments de droites entre y et les sy sont des arêtes de C. □

Proposition 4.2 *Soit C un polyèdre pair d'un espace à courbure constante négative ou nulle. Alors C est simple, i.e. les links de ses sommets sont des simplexes (sphériques). Si C est euclidien, alors les longueurs des arêtes des links de faces de C sont dans $[\frac{\pi}{2},\pi]$ (et en particulier ses angles dièdres sont obtus).*

Preuve Comme le type combinatoire des polyèdres pairs ne dépend pas de la courbure, nous pouvons supposer C euclidien. Si la dimension n de C est égale à celle de l'espace ambiant (ce que nous pouvons toujours supposer), le groupe fini engendré par des réflexions W construit ci-dessus est *essentiel* (i.e. il ne fixe aucun vecteur tangent au centre métrique de C non nul). Si v est un sommet de C, alors les sommets du link de v sont en bijection avec les murs de la chambre contenant v. Or (voir [5, Ch. V, section 3, Prop. 7]) les chambres sont des cônes simpliciaux. Donc le link de v (qui est de dimension $n-1$) a exactement $n-1$ sommets, et est donc un simplexe.

Si a,b sont deux arêtes de C, le plan P qui les contient rencontre perpendiculairement les hyperplans médiateurs de a,b en deux droites α,β. Les arêtes

a, b et les droites α, β définissent un quadrilatère dont deux angles sont droits et l'un des deux autres est l'angle dièdre entre les hyperplans médiateurs de a, b. L'angle dièdre entre deux murs d'une même chambre est dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc l'angle entre deux arêtes de C est dans $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. La longueur de toute arête du link de tout sommet s de C est donc dans $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Par les formules de trigonométrie sphérique, il en découle que l'angle en un sommet d'une 2–face du link de s est au moins $\frac{\pi}{2}$, donc que la longueur des arêtes des links de face de dimension 1 est au moins $\frac{\pi}{2}$. Le résultat en découle par récurrence sur la dimension de la face. □

Nous donnons ci-dessous la liste complète des polyèdres hyperboliques pairs qui sont des polyèdres de Coxeter, en dimension 2 et 3. Dans le tableau suivant, m est un entier, avec $m = 5$ ou $m \geq 7$. À tout polyèdre pair P de dimension n, et à tout sommet x_0 de celui-ci, est associé par la proposition 4.1 un système de Coxeter fini (W, S) de rang n, dont nous donnons le type et le diagramme de Coxeter. Les arêtes de P issues de x_0 sont en bijection avec les éléments de S. Si P est de dimension 3, nous donnons les angles dièdres $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ des arêtes issues de x_0 correspondant aux éléments de $S = \{a, b, c\}$. Par la formule de Gauss–Bonnet, un polygone hyperbolique pair est déterminé à isométrie près par (m, α, ℓ) dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \times]0, \frac{(p-1)\pi}{p}[\times]0 + \infty[$, avec $2m$ son nombre de côtés, α l'angle en chacun de ses sommets, et ℓ la longueur d'un de ses côtés (et donc des côtés à distance paire de celui-ci).

Rang 2			Rang 3		
(W, S)		α	(W, S)		$(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$
$A_1 \times A_1$	$\bullet \quad \bullet$	$\frac{\pi}{n}, n \geq 3$	$A_1 \times W$	$\overset{a}{\bullet} \quad \overset{b}{\bullet} \overset{m}{—} \overset{c}{\bullet}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}), n = 3, 4, 5$
A_2	$\bullet — \bullet$	$\frac{\pi}{n}, n \geq 2$	où $W =$	A_2, B_2, G_2	ou $I_2(m)$
B_2	$\bullet \overset{4}{—} \bullet$	$\frac{\pi}{n}, n \geq 2$	A_3	$\overset{a}{\bullet} — \overset{b}{\bullet} — \overset{c}{\bullet}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}), n \geq 3$ $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{3}), n = 3, 4, 5$
G_2	$\bullet \overset{6}{—} \bullet$	$\frac{\pi}{n}, n \geq 2$	B_3	$\overset{a}{\bullet} — \overset{b}{\bullet} \overset{4}{—} \overset{c}{\bullet}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}), n \geq 3$ $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{3}), n = 3, 4, 5$
$I_2(m)$	$\bullet \overset{m}{—} \bullet$	$\frac{\pi}{n}, n \geq 2$	H_3	$\overset{a}{\bullet} — \overset{b}{\bullet} \overset{5}{—} \overset{c}{\bullet}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}), n \geq 3$ $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{3}), n = 3, 4, 5$

Proposition 4.3 *À isométrie près, un polyèdre hyperbolique pair de dimension 2 ou 3 qui est un polyèdre de Coxeter est donné à isométrie près par le*

tableau précédent (avec un paramètre libre $\ell \in]0, +\infty[$ en rang 2).

Preuve Soit (W, S) un système de Coxeter de rang 3. Soit Z la cellulation duale de la subdivision barycentrique τ de la cellulation de la sphère $\mathbb{S}^2$ décrite ci-dessous:

- la cellulation de la sphère $\mathbb{S}^2$ par $4, 6, 8, 12, 2m$ bigones si (W, S) est de type $A_1 \times W$ avec W le groupe de Coxeter de rang 2 de type $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2, I_2(m)$ respectivement;
- la cellulation bord du tétraèdre, cube, dodécaèdre si (W, S) est de type A_3, B_3, H_3 respectivement.

Notons que si P est un polyèdre hyperbolique pair construit à partir de (W, S) comme dans la proposition 4.1, alors son bord est isomorphe à la cellulation Z.

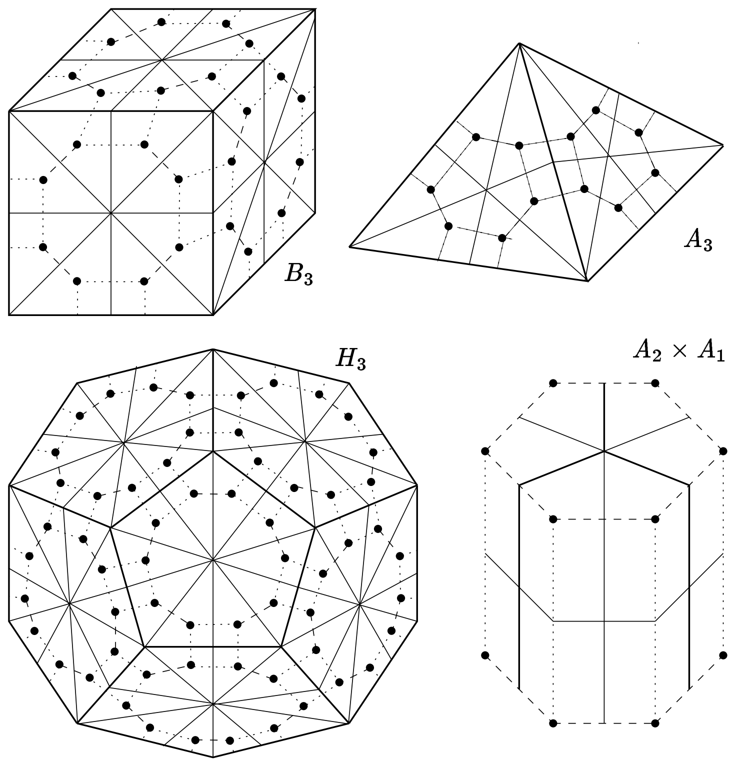


Figure 3: Polyèdres de Coxeter hyperboliques pairs de dimension 3

Par le théorème d'Andréev [1], si α est une application de l'ensemble des arêtes de Z dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, alors il existe un polyèdre hyperbolique (compact), unique à isométrie près, dont la cellulation du bord est isomorphe à Z, avec angle dièdre $\alpha(z)$ le long d'une arête z si et seulement si

(1) la somme des angles le long d'un cycle de longueur 3 dans τ qui ne borde pas un triangle de τ est strictement inférieure à π,

(2) la somme des angles le long d'un cycle de longueur 3 dans τ qui borde un triangle de τ est strictement supérieure à π,

(3) la somme des angles le long d'un cycle de longueur 4 dans τ qui ne borde pas la réunion de deux triangles de τ est strictement inférieure à 2π.

Comme il n'existe pas de cycle de longueur 3 dans τ qui ne borde pas un triangle, et que les seuls triangles sphériques de Coxeter ont pour angles $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\}$, $n \geq 2$ ou $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}\}, n = 3, 4, 5$, le résultat en découle par examination des divers cas possibles. L'unicité découle de l'unicité dans le théorème d'Andreev, en remarquant que ces polyèdres ont une symétrie supplémentaire (i.e. qui n'est pas dans W), par rapport à un hyperplan passant par des sommets. $\square$

Définissons maintenant la notion de parallélisme d'arêtes. Soit C un polyèdre pair de dimension quelconque. Si a est une arête de C, nous noterons $M(a,C)$ l'ensemble des points de C fixes par $\sigma_{a,C}$. C'est un convexe compact de codimension 1 dans C, séparant C en deux composantes connexes. Il ne peut rencontrer une arête b de C qu'en son milieu, et perpendiculairement: dans ce cas $M(a,C) = M(b,C)$. Deux arêtes a, b de C sont dites *parallèles dans* C si $M(a,C) = M(b,C)$. La relation de parallélisme dans C est une relation d'équivalence sur les arêtes de C.

4.2 L'espace à murs d'un complexe polyédral pair

Soit P un complexe polyédral, n'ayant qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules. Nous dirons que P est un *complexe polyédral pair* si toute cellule C de P est paire. Par exemple, un arbre, ou plus généralement un complexe cubique (voir [21, 28, 26]) est un complexe polyédral pair.

La réunion des relations de parallélisme sur les arêtes d'une même cellule de P engendre une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les arêtes de P, que nous appelerons *parallélisme entre arêtes* dans P. (Voir [28, section 2.4] pour le cas des complexes cubiques.) Définissons alors le *mur de P transverse à une arête a* comme l'union des $M(b,C')$, avec b une arête parallèle à a contenue dans une cellule (maximale pour l'inclusion) C' de P.

Puisque P n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, et les compacts $M(b,C')$ ne contenant aucun sommet de P, car C' est pair, il vient:

- tout mur de P est fermé, (localement compact si le link de toute cellule de P de dimension > 0 est compact) et évite l'ensemble X des sommets de P;
- l'ensemble des murs de P est localement fini.

Comme dans le cas des complexes cubiques [28, Theo. 4.10], le premier résultat est le suivant.

Lemme 4.4 *Soit P un complexe polyédral pair* CAT(0) *et M le mur de P transverse à une arête a. Alors M est convexe dans P, et sépare P en deux composantes connexes.*

Preuve Soit $V(M)$ l'union des cellules de P contenant une arête parallèle à a. Donnons d'abord une description du revêtement universel de $V(M)$.

Soit $\mathcal{C}(a)$ l'ensemble des suites de la forme $(a_0, a_1, \ldots, a_n, C)$, où les $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont des arêtes de P, avec $a_0 = a$, a_i parallèle à a_{i+1} dans une cellule de P, et C est une cellule de P contenant a_n. Si a_i, a_{i+1} et a_{i+2} sont trois arêtes parallèles à a dans une même cellule C', nous dirons qu'il y a entre $(a_0, \ldots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n, C)$ et $(a_0, \ldots, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n, C)$ une *homotopie élémentaire* (à extrémités fixées). Les homotopies élémentaires engendrent une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(a)$: nous noterons $[a_0, \ldots, a_n, C]$ la classe d'équivalence de $(a_0, \ldots, a_n, C)$ pour cette relation.

Soit $\overline{V}(M)$ le complexe polyédral obtenu à partir de l'union disjointe des cellules de la forme $[a_0, \ldots, a_n, C] \times C$ en identifiant deux points de la forme $([a_0, \ldots, a_n, C'], x')$ et $([a_0, \ldots, a_n, C''], x'')$ lorsque $x' = x''(\in C' \cap C'')$. Notons p: $\overline{V}(M) \to V(M)$ l'application polyédrale naturelle. Alors p est surjective et un isomorphisme sur chaque cellule. Via p, le complexe $\overline{V}(M)$ hérite d'une structure de complexe polyédral, n'ayant qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules (pour laquelle p est une isométrie sur chaque cellule). Montrons que sur $\overline{M} = p^{-1}(M)$, l'application p est une isométrie.

D'abord, $\overline{M}$ est localement convexe dans $\overline{V}(M)$. En effet, $\overline{V}(M)$ possède une réflexion $\overline{\sigma}_a$ (obtenue sur chaque cellule $\overline{C}$ de $\overline{V}(M)$ image de $[a_0, \ldots, a_n, C] \times C$ en conjugant $\sigma_{a_n, C}$ par $p_{|\overline{C}}$). L'ensemble des points fixes de l'isométrie $\overline{\sigma}_a$ est précisément $\overline{M}$. Or la métrique de $\overline{V}(M)$ est localement convexe. Il en résulte que $\overline{M}$ est localement convexe dans $\overline{V}(M)$.

Ensuite, l'image d'une géodésique $\overline{\gamma}$ de $\overline{M}$ par p est une géodésique de P contenue dans M. En effet, on remarque d'abord que $\overline{\gamma}$ est une géodésique locale de $\overline{V}(M)$, puis que p est une isométrie locale au voisinage de $\overline{M}$. Donc

$p(\overline{\gamma})$ est une géodésique locale de P. Mais comme P est CAT(0), ceci implique que $p(\overline{\gamma})$ est une géodésique globale de P.

Puisque $\overline{M}$ est évidemment connexe, M est convexe dans P, et p induit une isométrie de $\overline{M}$ sur M.

En fait, $p\colon \overline{V}(M) \to V(M)$ est un homéomorphisme. En effet, notons d'abord qu'un point $\overline{x}$ de $\overline{V}(M)$ est dans une cellule minimale $\overline{C}_{\overline{x}}$ de $\overline{V}(M)$ rencontrant $\overline{M}$. Si $\overline{x}'$ désigne la projection orthogonale de $\overline{x}$ sur $\overline{M} \cap \overline{C}_{\overline{x}}$, alors toute géodésique de $\overline{M}$ issue de $\overline{x}'$ fait avec $[\overline{x}', \overline{x}]$ un angle au moins égal à $\frac{\pi}{2}$. Maintenant, si deux points $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\overline{V}(M) - \overline{M}$ sont identifiés par p, il apparaît dans P un triangle de sommets $p(\overline{x}) = p(\overline{y})$, $p(\overline{x}')$ et $p(\overline{y}')$, avec des angles à la base supérieurs ou égaux à $\frac{\pi}{2}$. Comme P est CAT(0), cela n'est possible que si $p(\overline{x}') = p(\overline{y}')$. Donc $\overline{x}' = \overline{y}'$, et $\overline{C}_{\overline{x}} = \overline{C}_{\overline{y}}$. Or p est un plongement sur chaque cellule: donc $\overline{x} = \overline{y}$.

Après avoir vérifié que $\overline{M}$ sépare $\overline{V}(M)$ en deux composantes connexes, on en déduit que M sépare P en deux composantes connexes (parce qu'il sépare son voisinage $V(M)$, et que P est simplement connexe). □

Le résultat suivant découle aussi de la preuve du lemme précédent.

Lemme 4.5 *Pour toute cellule C de P maximale pour l'inclusion, le mur de P transverse à une arête a de C est la réunion de tous les segments géodésiques rencontrant $M(a,C)$ en un intervalle d'intérieur non vide.* □

Soient $X = X_P$ l'ensemble des sommets de P et M un mur de P transverse à une arête; notons $P^+(M)$ et $P^-(M)$ les deux composantes connexes de $P - M$. Comme $X \cap M = \emptyset$, la paire $\{X \cap P^+(M), X \cap P^-(M)\}$ est une partition de X. Nous noterons encore M ce mur de X, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_P$ l'ensemble des murs de X ainsi défini.

Proposition 4.6 *Soit P un complexe polyédral pair* CAT(0).
Alors $(X_P, \mathcal{M}_P)$ est un espace à murs.

Preuve Vérifions que $\mathcal{M}$ satisfait l'axiome (M).

Soient x et y deux sommets de P, et γ la géodésique de P qui les joint. Tout mur de $\mathcal{M}(x,y)$ correspond à un mur de P séparant topologiquement x et y, donc coupant γ. L'ensemble des murs de P étant localement fini, on en déduit que $\mathcal{M}(x,y)$ est fini.

D'autre part, γ part de x par l'intérieur d'une (unique) cellule C, elle doit traverser un des murs $M(a,C)$ (avec a une arête issue de x) avant de retoucher ∂C: donc $\mathcal{M}(x,y)$ est non vide. □

Avant de poursuivre l'étude de cet exemple fondamental, il convient de faire quelques remarques.

Remarque 1 Le système de murs d'un système de Coxeter (W,S) défini dans la section 3 peut s'obtenir par la présente construction, en prenant pour P la réalisation géométrique au sens de Davis–Moussong $|W|_0$ de (W,S). Par construction même (voir [25]), une cellule de $|W|_0$ est paire, le groupe engendré par les réflexions orthogonales le long des arêtes de la cellule étant isomorphe à un sous-groupe spécial fini de (W,S) ; d'autre part, $|W|_0$ est bien $\mathrm{CAT}(0)$ (voir [25]).

Remarque 2 De nombreux complexes polyèdraux $\mathrm{CAT}(0)$ admettent des subdivisions régulières cubiques qui restent $\mathrm{CAT}(0)$ lorsqu'on munit les cubes de leurs métriques euclidiennes standard. Par exemple, si P est un complexe polygonal $\mathrm{CAT}(0)$ sans triangle tel que le link d'un sommet de P ne contient aucun circuit de longueur 3, alors la subdivision de chaque k–gone de P en k carrés, identifiés au carré euclidien unité, fournit un complexe carré encore $\mathrm{CAT}(0)$. Voir par exemple l'exemple à la fin de la section 3.2, où le système de murs est toutefois différent de celui obtenu par subdivision cubique. Ce genre de subdivision permet d'appliquer nos résultats de simplicité à des complexes polyèdraux $\mathrm{CAT}(0)$ non nécessairement pairs (comme l'immeuble de Bourdon avec p impair).

Remarque 3 On pourrait penser que tout complexe polyédral pair $\mathrm{CAT}(0)$ peut être subdivisé en cubes, tout en restant $\mathrm{CAT}(0)$, et donc qu'il suffit d'étudier les complexes cubiques. Mais il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant en dimension 2.

Soient ℓ et m deux entiers supérieurs ou égaux à 3. Considérons un ensemble $S_{\ell,m}$ de ℓm points, répartis en ℓ colonnes de m points chacune. Relions deux points de $S_{\ell,m}$ si et seulement s'ils n'appartiennent pas à la même colonne. Nous noterons $K_{\ell,m}$ le graphe ainsi obtenu (dont le graphe complémentaire est donc une union disjointe de ℓ graphes complets sur m sommets). Comme $\ell \geq 3$, ce graphe contient des circuits de longueur 3. Fixons d'autre part un entier $k \geq 4$. Nous pouvons considérer le système de Coxeter $(W_{k,\ell,m}, S_{\ell,m})$ dont le graphe de Coxeter a des arêtes de poids infini entre points d'une même colonne, et des arêtes de poids k entre points n'appartenant pas à la même colonne. Alors la réalisation géométrique de Davis–Moussong de $(W_{k,\ell,m}, S_{\ell,m})$ est (la subdivision barycentrique d')un complexe polygonal $W_{k,\ell,m}$–homogène X, dont les polygones sont hyperboliques réguliers à $2k$ côtés, d'angle aux sommets $\frac{2\pi}{3}$, et tel que le link de chaque sommet est isomorphe à $K_{\ell,m}$ (voir

[23]). Donc X est un complexe polyédral pair CAT(0). Une subdivision en carrés de X donne alors des angles aux sommets égaux à $\frac{\pi}{2}$, donc des circuits de longueur égale à $\frac{3\pi}{2} < 2\pi$ dans le link métrique des sommets, ce qui empêche X d'être CAT(0).

4.3 Le graphe associé à l'espace à murs d'un complexe polyédral pair

Soit à nouveau P un complexe polyédral pair CAT(0) et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_P$ son système de murs sur l'ensemble $X = X_P$ de ses sommets. Nous étudions maintenant les géodésiques du 1–squelette $\mathcal{G}$ de P, pour la métrique géodésique sur $\mathcal{G}$ rendant chaque arête isométrique au segment unité (qui n'est pas forcément celle induite par P). Nous allons voir que cette métrique sur $\mathcal{G}$ vérifie des propriétés analogues à la métrique des mots d'un système de Coxeter.

Si $c = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est un chemin combinatoire de $\mathcal{G}$ empruntant les $n+1$ arêtes $a_0, a_1, \dots, a_n$, nous noterons $M(c)$ la suite $M(a_0), M(a_1), \dots, M(a_n)$ des murs traversés par c.

Lemme 4.7 *Soit c un chemin combinatoire de $\mathcal{G}$ d'extrémités x et y.*

a) *Un mur M sépare x de y si et seulement s'il apparaît un nombre impair de fois dans la suite $M(c)$.*

b) *Si la suite $M(c)$ est sans répétition, alors c est une géodésique de $\mathcal{G}$.*

Preuve a) D'une part, tout mur séparant x de y est traversé par c. D'autre part, si un mur M est traversé un nombre pair de fois par c, c'est donc que x et y sont dans la même composante connexe de $P - M$.

b) Il résulte du a) que, pour un tel chemin, l'ensemble des murs traversés par c est $\mathcal{M}(x, y)$, et la longueur de c est le cardinal de $\mathcal{M}(x, y)$. Si c' est un autre chemin d'extrémités x et y, sa longueur est égale au nombre de murs qu'il traverse, donc au moins égale au nombre de murs qu'il traverse un nombre impair de fois. Donc c' est au moins aussi long que c. □

Lemme 4.8 *Soit $\mathcal{O}$ l'ouvert des points de P qui ne sont sur aucun mur de P. Alors toute composante connexe de $\mathcal{O}$ contient un et un seul sommet de P.*

Preuve Puisque deux sommets distincts de P sont toujours séparés par un mur, il y a au plus un sommet de P par composante connexe de $\mathcal{O}$.

Pour la réciproque, il suffit de considérer le cas où P est réduit à une cellule C. Par la proposition 4.1, ceci découle du fait qu'un groupe de Coxeter fini agit simplement transitivement sur ses chambres. □

Le résultat suivant montre qu'on peut accompagner une géodésique de P par une géodésique de son 1–squelette.

Lemme 4.9 *Soient x' et y' deux points du polyèdre P n'appartenant à aucun mur de P, et γ la géodésique qui les joint dans P. Alors il existe un chemin combinatoire c de $\mathcal{G}$ tel que $M(c)$ est sans répétition, contenu dans la réunion $V(\gamma)$ des cellules de P touchant γ, et d'extrémités x et y définis par: x' et x (resp. y' et y) sont dans la même composante connexe de $\mathcal{O}$.*

Preuve D'abord, par le lemme 4.5, la géodésique γ rencontre un nombre fini de murs, en des points distincts $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pour prouver le lemme, il suffit de l'établir lorsque $n = 1$. En effet, pour n quelconque, on découpe γ en n segments géodésiques successifs γ_i, contenant z_i, d'extrémités x'_i et x'_{i+1} contenues dans aucun mur de P. On applique le lemme pour $n = 1$ à chacun de ces segments, ce qui fournit n chemins combinatoires $c_1, \ldots, c_n$, les extrémités de c_i étant x_i et x_{i+1}, seuls sommets de P appartenant à la même composante connexe de $\mathcal{O}$ que x'_i et x'_{i+1} respectivement. Ainsi, les c_i se raccordent pour former un chemin c de x à y. De plus, la suite des murs traversés par c_i est sans répétition. En effet, d'après le lemme 4.7 b), l'ensemble des murs traversés est l'ensemble des murs séparant x_i de x_{i+1}, ou encore l'ensemble des murs séparant x'_i de x'_{i+1}, c'est-à-dire précisément l'ensemble des murs passant par z_i. Un mur étant convexe, il ne peut contenir z_i et z_j pour $i \neq j$ (sinon, il contiendrait tous les points entre z_i et z_j). Ceci achève de prouver que la suite des murs traversés par c est sans répétition. Enfin, $c \subset V(\gamma_1) \cup \ldots \cup V(\gamma_n) \subset V(\gamma)$.

Considérons donc une géodésique γ entre deux points x' et y' n'appartenant à aucun mur, de sorte que γ quitte $\mathcal{O}$ en un seul point z.

Juste avant z (resp. juste après z), la géodésique γ est dans l'intérieur d'une unique cellule C_- (resp. C_+). Les points de γ avant (resp. après) z sont dans une même composante connexe de $\mathcal{O}$, celle de x (resp. de y). Donc $x \in C_-$ et $y \in C_+$. En revanche, x' n'est pas nécessairement dans C_- (ni y' dans C_+).

Si C désigne la plus petite cellule contenant z, on a $C \subset C_-$ (resp: $C \subset C_+$), mais pas nécessairement égalité. Cependant, nous allons montrer que $x \in C$ et $y \in C$ (même lorsque C est une face stricte de C_- ou C_+).

Raisonnons par récurrence sur $dim(C_-) - dim(C)$. Si ce nombre est nul, il n'y a rien à prouver. Sinon C est contenu dans le bord de C_-, et nous pouvons projeter radialement à partir du centre métrique de C_- sur ∂C_- la partie de γ contenue dans C_-. Nous obtenons une géodésique par morceaux γ_z de ∂C_- aboutissant à z. Mis à part z, aucun point de γ_z n'est sur un mur de C_-, sinon, par convexité des murs, le point de γ correspondant serait sur le même mur. La partie de γ_z juste avant z (notée γ_z^-) est une géodésique aboutissant à z dans une face stricte de C_-: on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, assurant que l'unique sommet x_z de P contenu dans la composante connexe de $\mathcal{O}$ contenant γ_z^- est un sommet de C. D'autre part, un point de $\gamma \cap C_-$ (différent de z) et sa projection sur γ_z ne sont séparés par aucun mur (par convexité, un tel mur, qui passe par le centre métrique de C_-, devrait contenir le point de γ). Ce qui prouve que $x = x_z$ et achève la récurrence.

Les deux sommets x et y appartenant à une même cellule C (rencontrant γ en z, et engendrée par ce point), nous pouvons considérer une géodésique c du 1–squelette de C entre x et y. Nous avons déjà $c \subset V(\gamma)$. Il reste à prouver que la suite des murs de P traversés par c est sans répétition. Raisonnons par l'absurde: si c'est le cas, il existe deux arêtes a et b de c définissant un même mur M de C, et dont les milieux sont les extrémités d'une composante connexe c_0 de $c - M$. Alors, en remplaçant c_0 par $\sigma_{a,C}(c_0)$, on obtient un chemin du 1–squelette de C de même longueur et mêmes extrémités que c, mais avec deux allers-retours dans les arêtes a et b. Ceci contredit le fait que c est géodésique. □

Le corollaire suivant nous permet d'identifier par la suite le 1–squelette de P au graphe de l'espace à murs $(X_P, \mathcal{M}_P)$.

Corollaire 4.10 *Deux sommets de P sont liés par une arête de P si et seulement s'ils sont liés dans $\mathcal{G}(X_P, M_P)$.*

Preuve La condition est bien sûr nécessaire. Réciproquement, soient x et y deux sommets de P à distance combinatoire $n > 1$. Il s'agit de montrer que x et y ne sont pas liés dans $\mathcal{G}(X, M)$, autrement dit qu'il existe un sommet z de P entre x et y (au sens des murs). Considérons la géodésique de P entre x et y. Appliquons-lui le lemme 4.9. Nous trouvons un chemin c de $\mathcal{G}$ entre x et y, tel que la suite des murs traversés par c est sans répétition. En particulier, d'après le lemme 4.7 b), le chemin c est géodésique. Comme $n > 1$, le chemin c contient un point z différent de ses extrémités, qui découpe c en deux sous-chemins c_- et c_+. Si c est constitué des arêtes $a_1, \ldots, a_n$, avec

$z = a_i \cap a_{i+1}, i < n$, on obtient, grâce au lemme 4.7 b):

$$\mathcal{M}(x,y) = \{M(a_1), \ldots, M(a_i), M(a_{i+1}), \cdots, M(a_n)\},$$
$$\mathcal{M}(x,z) = \{M(a_1), \ldots, M(a_i)\}$$
$$\mathcal{M}(z,y) = \{M(a_{i+1}), \ldots, M(a_n)\}.$$

Donc $\mathcal{M}(x,y)$ est bien l'union (disjointe) de $\mathcal{M}(x,z)$ et $\mathcal{M}(z,y)$: le point z est entre x et y dans $(X,\mathcal{M})$. □

Le résultat suivant est analogue à celui des complexes de Coxeter (voir [27]) et des complexes cubiques (voir [28]).

Proposition 4.11 *Un chemin combinatoire du 1–squelette est une géodésique si et seulement si la suite des murs qu'il traverse est sans répétition.*

Preuve Compte tenu du lemme 4.7 b), il ne reste que le sens "seulement si" à démontrer. Commençons par un analogue combinatoire de la convexité des murs de P.

Lemme 4.12 *Soient M un mur de P, $V(M)$ la réunion des cellules touchant M, x et y deux sommets de $V(M)$. Alors il existe une géodésique de $\mathcal{G}$ d'extrémités x et y contenue dans $V(M)$.*

Preuve D'abord, d'après les hypothèses de finitude sur les types d'isométrie des cellules de P, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute cellule de P passant à distance inférieure ou égale à ε de M coupe M.

Soit alors C_x une cellule de P contenant x et touchant M. Le centre métrique $\hat{C}_x$ de C_x est dans M, mais le segment de x à $\hat{C}_x$ ne touche aucun mur de P entre ses extrémités (sinon x serait dans ce mur). Nous pouvons donc trouver sur ce segment un point x' distinct de $\hat{C}_x$, mais ε proche de celui-ci, donc ε proche de M. Il faut noter que x et x' sont dans la même composante connexe de $\mathcal{O}$. De même, il existe un point y' n'appartenant à aucun mur, dans la même composante connexe de $\mathcal{O}$ que y, et ε proche de M. Par convexité (de l'espace P et de M dans P), la géodésique γ de x' à y' reste à distance inférieure ou égale à ε de M. Par définition de ε, cela entraîne que $V(\gamma) \subset V(M)$. Donc la géodésique de $\mathcal{G}$ fournie par le lemme 2 entre x et y reste dans $V(M)$. □

Pour montrer la proposition, considérons un chemin c qui traverse (au moins) deux fois un mur M de P, et prouvons que c n'est pas géodésique. Nous pouvons trouver un sous-chemin c_0 de c qui ne traverse pas M, mais dont

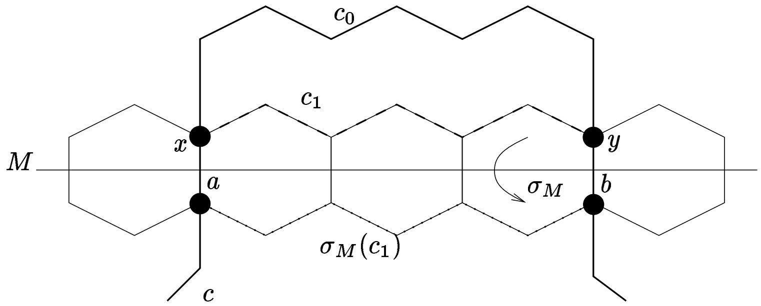


Figure 4: Comment raccourcir les chemins par réflexion

les extrémités sont des sommets x et y d'arêtes a et b transverses à M et contenues dans c.

En appliquant le lemme 4.12, nous remplaçons c_0 par une géodésique c_1 de $\mathcal{G}$ contenue dans $V(M)$ et d'extrémités x et y. Le chemin c' ainsi obtenu a les mêmes extrémités que c, il n'est pas plus long, et il contient comme sous-chemin (a, c_1, b). Or $V(M)$ possède une réflexion σ_M par rapport à M: le chemin $\sigma_M(c_1)$ a les mêmes extrémités que (a, c_1, b), mais il est plus court de deux unités. Ceci prouve que ni c', ni a fortiori c, ne sont géodésiques. $\square$

Compte tenu de la proposition 4.11, la preuve du théorème 1.5 est exactement la même que celle du théorème B de [26].

4.4 Hyperbolicité de l'espace à murs d'un complexe polyédral pair

Soit P un complexe polyédral pair $\mathrm{CAT}(0)$, dont la métrique est hyperbolique au sens de Gromov (par exemple, P est $\mathrm{CAT}(-1)$). Comme P n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, le diamètre des cellules est uniformément majoré. Donc l'inclusion du 1–squelette $\mathcal{G}$ dans P est une quasi-isométrie (quasi-surjective), et $\mathcal{G}$ est hyperbolique.

Nous allons montrer que la condition (H) est remplie dans $(X_P, \mathcal{M}_P)$, en établissant son analogue dans P. Comme d'habitude, nous notons $\overline{P}$ le compactifié de Gromov de P (donc $\overline{P} = P \cup \partial P$), et si E est une partie de P, nous notons $\overline{E}$ son adhérence dans $\overline{P}$. Compte tenu des lemmes 4.5 et 4.4, le premier lemme suivant est clair.

Lemme 4.13 *Soient M un mur de P, x un point de M et $p_x\colon \overline{P} \to lk(x,P)$ la projection qui à un rayon de P d'origine x associe la direction qu'il définit en partant de x. Alors $\overline{M}$ sépare $\overline{P}$ en deux composantes connexes, images réciproques par p_x des deux composantes connexes de $lk(x,P) - lk(x,M)$.* □

Lemme 4.14 *Il existe une constante $D > 0$ telle que deux points de P à distance supérieure ou égale à D sont séparés par au moins un mur de P.*

Preuve Puisque P n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, il existe un entier N bornant le nombre de murs susceptibles de traverser une cellule donnée de P. Soient x et y deux points quelconques de P, et considérons deux sommets x_0 et y_0 contenus dans une même cellule que x et y respectivement. Le nombre des murs séparant x_0 de x ou y_0 de y est inférieur à $2N$. D'autre part, d'après l'étude de la distance combinatoire sur $\mathcal{G}$, nous savons que le nombre de murs séparant x_0 de y_0 vaut la distance entre x_0 et y_0 dans $\mathcal{G}$. Cette distance tend vers l'infini avec la distance dans P entre x et y, par quasi-isométrie entre P et X, et puisque le diamètre des cellules est uniformément borné. En particulier, il existe un nombre $D > 0$ tel que, si $d_P(x,y) > D$, alors x_0 et y_0 sont séparés par au moins $2N+1$ murs de P. L'un de ces murs ne sépare ni x_0 de x, ni y_0 de y. Donc il sépare x de y. □

Si x_0 est un point base de P, ξ un point de ∂P et r_0 l'unique rayon géodésique de P joignant x_0 à ξ, nous notons $\mathcal{M}(r_0)$ l'ensemble des murs M de P tels que $\overline{M}$ sépare x_0 de ξ.

Lemme 4.15 *Pour tout rayon géodésique r de P, l'ensemble $\mathcal{M}(r)$ est infini.*

Preuve Considérons la suite de points $(x_k)_{k\geq 0}$ du rayon r définie par: x_0 est l'origine de r, et x_k est le point de r à distance kD de x_0 — où D est la constante du lemme 4.14 précédent. Il existe donc pour $k > 0$ un mur M_k séparant x_{k-1} de x_k. Pour $k < \ell$, on a nécessairement $M_k \neq M_\ell$ (sinon, par convexité, ce mur contiendrait les points x_{k+1} et $x_{\ell-1}$).

Le mur M_k et le point ξ ne sont pas adhérents. En effet, si m_k désigne le point d'intersection de M_k avec le sous-segment de r entre x_{k-1} de x_k, la projection de ξ dans $lk(m_k,P)$ correspond à la géodésique $[m_k,x_k]$, non tangente à M. Le lemme 4.13 entraîne bien que $\xi \notin \overline{M}$. La portion de r de x_0 à x_{k-1} ne coupe pas M_k (sinon, par convexité, M_k contiendrait x_{k-1}). De même, la portion de r de x_k à l'infini ne coupe pas M_k. Mais M_k sépare x_{k-1} de x_k. Donc $M_k \in \mathcal{M}(r)$. □

Soient M un mur de P et ξ un point de ∂P non adhérent à M dans $\overline{P}$. Nous noterons $V(\xi, M)$ la composante connexe de $\overline{P} - \overline{M}$ contenant ξ.

Proposition 4.16 *La famille* $(V(M,\xi))_{M\in\mathcal{M}(r_0)}$ *est une base de voisinages de* ξ *dans* $\overline{P}$.

Preuve Remarquons tout d'abord que $V(M,\xi)$ est bien un voisinage de ξ. Pour montrer que la famille est une base de voisinages, raisonnons par l'absurde. Par définition de la topologie de $\mathcal{G}\cup\partial\mathcal{G}$, supposons que les distances $d_P(x_0, V(M,\xi))$ restent bornées pour $M\in\mathcal{M}(r_0)$.

En fait, x_0 n'appartient à aucun des voisinages $V(M,\xi)$ pour $M\in\mathcal{M}(r_0)$. Donc $d_P(x_0, V(M,\xi))$ est atteinte sur le bord de $V(M,\xi)$, c'est-à-dire sur M. Nous sommes donc en train de supposer que tous les murs de $\mathcal{M}(r)$ rencontrent une certaine boule fermée B de centre x_0 et de rayon R.

Si P est supposé localement compact, nous obtenons immédiatement une contradiction entre la locale finitude de l'ensemble des murs et le fait que $\mathcal{M}(r)$ est infini.

Donnons un raisonnement général, où l'on ne suppose plus les links de sommet de P compacts. Dans ce cas les boules de P de rayons trop grands peuvent rencontrer une infinité de murs. Cependant, par finitude du nombre de types d'isométrie de cellules de P, il existe un $\varepsilon_0>0$ (qu'on peut choisir strictement inférieur à R) et un entier $N_0>0$ tels que toute ε_0–boule fermée de P rencontre un nombre de murs strictement inférieur à N_0.

Pour un entier $N\geq N_0$, posons $t_N = ND(\frac{R}{\varepsilon_0}+1)$ et $s_N = ND\frac{R}{\varepsilon_0}$ (le nombre D est celui qui apparaît dans le lemme 4.14). Appelons x_N (resp. y_N) le point du rayon r à distance s_N (resp. t_N) de l'origine x_0. Montrons tout d'abord que toute géodésique γ de P joignant un point u de la boule B à un point v de r entre x_N et y_N passe par la ε_0–boule fermée de P de centre x_N.

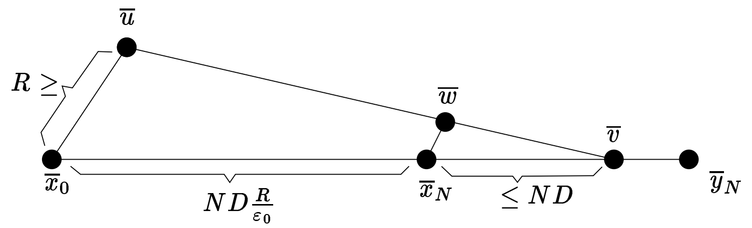


Figure 5: Triangle de comparaison

En effet, considérons le triangle géodésique de P dont les sommets sont x_0 et les extrémités u, v de γ. Soient $\overline{x_0}, \overline{u}, \overline{v}$ les sommets correspondants d'un triangle euclidien de comparaison. Si $\overline{x_N} \in [\overline{x_0}, \overline{v}]$ est le point correspondant à x_N, alors:

$$d(\overline{x_0}, \overline{u}) \leq R, d(\overline{x_0}, \overline{v}) \geq ND\frac{R}{\varepsilon_0}, d(\overline{x_N}, \overline{v}) \leq ND.$$

Soit $\overline{w}$ le point de $[\overline{u}, \overline{v}]$ situé sur la parallèle au côté $[\overline{x_0}, \overline{u}]$ passant par $\overline{x_N}$. Alors par le théorème de Thalès, il vient

$$\frac{d(\overline{w}, \overline{x_N})}{ND} \leq \frac{R}{ND\frac{R}{\varepsilon_0}}.$$

Par l'inégalité CAT(0), la distance de x_N au point w de γ correspondant à $\overline{w}$ est donc inférieure à ε_0.

Pour achever la démonstration de la proposition, découpons le sous-segment de r entre x_N et y_N en N intervalles de longueur D. Par le lemme 4.14, on trouve N murs deux à deux distincts séparant les extrémités de ces intervalles. Ces N murs sont dans $\mathcal{M}(r_0)$ (voir preuve du lemme 4.15). Ils passent par un point du sous-segment de r entre x_N et y_N, et d'autre part ils coupent la boule B par hypothèse. Par convexité des murs et ce qui précède, chacun de ces murs coupe la ε_0–boule fermée de P de centre x_N. Ainsi cette boule est coupée par N murs, avec $N \geq N_0$, en contradiction avec les définitions de ε_0 et N_0. □

L'image réciproque par l'inclusion canonique de $\mathcal{G}$ dans P est une quasi-isométrie, se prolongeant en un homéomorphisme entre les bords. On obtient ainsi un plongement $\overline{i}$: $\overline{\mathcal{G}} \to \overline{P}$. De plus l'image réciproque par $\overline{i}$ d'un voisinage d'un point de ∂P est un voisinage du point correspondant sur $\partial\mathcal{G}$. La proposition précédente entraîne donc que $(X, \mathcal{M})$ vérifie l'axiome (H).

Nous résumons les résultats 4.6, 4.10, 4.16 dans l'énoncé suivant.

Théorème 4.17 *Soit P un complexe polyédral pair* CAT(0)*, hyperbolique au sens de Gromov. Alors $(X_P, \mathcal{M}_P)$ est un espace à murs hyperbolique, dont le graphe associé est le 1–squelette de P.*

Un mur M de P est dit *propre* si $\partial P \setminus \partial A$ est non vide pour chacune des composantes connexes A de $P \setminus M$. Ceci équivaut au fait que le mur correspondant de l'espace à murs $(X_P, \mathcal{M}_P)$ est propre.

Lemme 4.18 *Supposons que chaque arête de P soit contenue dans une droite géodésique. Alors tout mur de P est propre.*

Preuve Soit M un mur transverse à une arête d, et A, B les deux composantes connexes de $P \setminus M$. Soit D une droite géodésique contenant d, et a, b l'extrémité du rayon géodésique $D \cap A, D \cap B$ respectivement. Alors puisque P est $\mathrm{CAT}(0)$ et que l'angle entre M et d est droit au point d'intersection, le point a n'appartient pas à ∂B, ni b à ∂A. Donc M est propre. □

5 Groupes d'automorphismes d'un complexe polyédral pair

Nous fixons P un complexe polyédral pair $\mathrm{CAT}(0)$. Nous notons $(X, \mathcal{M}) = (X_P, M_P)$ son espace à murs associé et $\mathcal{G}$ le 1–squelette de P.

5.1 Automorphismes de l'espace à murs d'un complexe polyédral pair

Le but de cette section est de montrer que le groupe des automorphismes de P et celui de $(X, \mathcal{M})$ coïncident.

Si f est un automorphisme isométrique de P, C une cellule de P et a une arête de C, alors $f(M(a, C)) = M(f(a), f(C))$. Aussi, tout automorphisme isométrique de P agit sur l'ensemble des murs de P. Plus généralement, un isomorphisme (non nécessairement isométrique) entre deux cellules paires préserve le parallélisme entre arêtes. En effet, deux arêtes a et b d'une cellule paire C sont parallèles si et seulement s'il existe une géodésique combinatoire γ du 1–squelette de C joignant une extrémité de a à une extrémité de b, de sorte que a suivie de γ, ainsi que γ suivie de b, soit encore géodésique, mais (a, γ, b) n'est plus géodésique. D'autre part, deux sommets x et y sont du même côté d'un mur M si et seulement si une géodésique de x à y ne contient pas d'arête transverse à M.

Ainsi, le parallélisme des arêtes est une notion ne faisant appel qu'à la combinatoire de C, et même seulement de son 1–squelette. Si f est un isomorphisme (polyédral) d'une cellule paire C sur une autre cellule paire C', et si M est un mur de C, alors les arêtes de C' images par f des arêtes de C transverses à M sont toutes transverses à un même mur de C', qu'on notera $f(M)$. Et deux sommets x et y de C sont du même côté de M si et seulement si $f(x)$ et $f(y)$ sont du même côté de $f(M)$.

Les résultats précédents restent valables pour P tout entier. Il y a donc un morphisme canonique (d'ailleurs clairement injectif) du groupe $\mathrm{Aut}(P)$ des automorphismes (polyèdraux) de P dans $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{M})$.

Théorème 5.1 *Soit P un complexe polyédral pair* $\mathrm{CAT}(0)$. *Alors le morphisme de* $\mathrm{Aut}(P)$ *dans* $\mathrm{Aut}(X_P, \mathcal{M}_P)$ *ci-dessus est un isomorphisme.*

Preuve Si $\mathcal{G}(X,\mathcal{M})$ est le graphe associé à $(X,\mathcal{M})$, alors nous avons défini un morphisme injectif $\mathrm{Aut}(X,\mathcal{M}) \to \mathrm{Aut}\ \mathcal{G}(X,\mathcal{M})$. Comme $\mathcal{G}(X,\mathcal{M})$ s'identifie avec le 1–squelette combinatoire $\mathcal{G}$ de P, si ρ: $\mathrm{Aut}\ P \to \mathrm{Aut}\ \mathcal{G}$ est l'application de restriction d'un automorphisme de P à son 1–squelette, alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Aut}\ (X,\mathcal{M}) \arrow[dr] & \\ \mathrm{Aut}\ P \arrow[ur] \arrow[rr, "\rho"] & & \mathrm{Aut}\ \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Pour établir que tous ces morphismes injectifs sont des isomorphismes, il suffit de montrer que ρ est surjective, i.e. que l'on peut construire un automorphisme (polyédral) de P à partir d'un automorphisme de son 1–squelette $\mathcal{G}$.

Lemme 5.2 *Soient C une cellule de P et a une arête de P telle que l'intersection $a \cap C$ est réduite à un sommet x_0. Alors le mur transverse à a ne coupe pas C.*

Preuve Supposons, par l'absurde, qu'il existe une cellule C, une arête a et un sommet x_0 tels que $a \cap C = \{x_0\}$ et $M = M(a)$ coupe C. Soient y_0 le sommet de C symétrique de x_0 par rapport à M, et p le point où la géodésique qui joint x_0 à y_0 (dans C) coupe M. Alors p est le point de $M \cap C$ le plus proche de x_0.

En fait, pour toute cellule D dont C est une face, p est encore le point de $M \cap D$ le plus proche de x_0: donc p est un minimum local (strict) pour la fonction qui à un point q de M associe sa distance à x_0 dans P. Mais il en va de même pour le point p', milieu de l'arête a. Or $p' \neq p$, puisque $a \not\subset C$, ce qui donne deux minimaux locaux sur M à la fonction "distance à x_0", en contradiction avec la convexité de cette fonction et celle de M dans P. □

Corollaire 5.3 *Le 1–squelette d'une cellule C est convexe dans $\mathcal{G}$, le 1–squelette de P.*

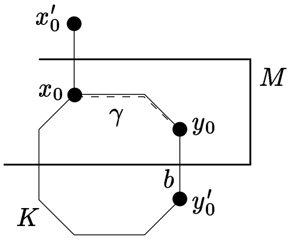
Preuve Soient x_0, y_0 deux sommets de C, et γ un chemin de $\mathcal{G}$ entre x_0 et y_0, qui sort de C. D'après le lemme précédent, la suite des murs traversés par γ contient un mur ne coupant pas C. Or l'ensemble des murs qui sépare x_0, y_0 est contenu dans l'ensemble des murs coupant C. Donc, d'après la proposition 4.11, γ ne peut être géodésique. □

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des cellules de P et $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-graphes convexes de $\mathcal{G}$ isomorphes au graphe de Cayley d'un système de Coxeter fini.

Comme le 1–squelette d'une cellule paire est le graphe de Cayley d'un système de Coxeter fini (Proposition 4.1), le corollaire ci-dessus montre que l'application $i\colon C \mapsto C \cap \mathcal{G}$ est une application (injective) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Pour retrouver les cellules de P à partir de son 1–squelette, nous allons montrer que $i(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.

Lemme 5.4 *Soient K un élément de $\mathcal{F}$ et a une arête de P telle que l'intersection $a \cap K$ est réduite à un sommet x_0. Alors le mur M transverse à l'arête a ne recoupe pas K.*

Preuve Raisonnons par l'absurde. Soit b une arête de K transverse à M. Notons y_0 l'extrémité de b du même côté de M que x_0, puis x'_0 et y'_0 les images de x_0 et y_0 par la réflexion σ_M du voisinage $V(M)$ de M. Comme le 1–squelette de $V(M)$ est géodésique dans le 1–squelette de P (voir lemme 4.12), il existe une géodésique γ de $\mathcal{G}$ entre x_0 et y_0 contenue dans $V(M)$. Mais comme K est convexe dans $\mathcal{G}$, on a $\gamma \subset K$.



Puisque x_0 et y_0 ne sont pas séparés par M, le chemin γ ne coupe pas le mur M. Donc (γ, b) est une géodésique de $\mathcal{G}$ entre x_0 et y'_0 (voir lemme 4.11). Le chemin $(a, \sigma_M(\gamma))$ a les mêmes extrémités et la même longueur, mais il passe par $x'_0 \notin K$: ceci contredit la convexité de K dans $\mathcal{G}$. □

Lemme 5.5 *Soient K un élément de $\mathcal{F}$ et M un mur coupant une arête a de K. Alors chaque arête de K touchant a est contenue dans $V(M)$, et l'ensemble de ces arêtes est invariant par σ_M.*

Preuve Soient x_0 et y_0 les extrémités de a, et b une arête de K distincte de a, contenant y_0. Il s'agit de montrer que b est dans $V(M)$, et que $\sigma_M(b)$ est dans K.

Soit (W, S) le système de Coxeter de graphe de Cayley $\mathcal{G}(W, S)$ isomorphe à K. Puisque W est transitif sur les sommets de $\mathcal{G}(W, S)$, on peut trouver un isomorphisme φ de $\mathcal{G}(W,S)$ sur K envoyant 1 sur x_0. Soient s et w les éléments de W dont l'image par φ sont y_0 et z_0, la deuxième extrémité de b. D'abord, $s \in S$, puisqu'il est lié à 1 dans $\mathcal{G}(W,S)$ par l'arête $\varphi^{-1}(a)$. Ensuite, il existe $t \neq s$, $t \in S$ tel que $w = st$. Considérons $\mathcal{G}_{s,t}$, le sous-graphe plein de $\mathcal{G}(W,S)$ dont les sommets sont $1, s, st, sts, \ldots, 1$. C'est un graphe homéomorphe à un cercle, contenant $2m_{s,t}$ arêtes, où $m_{s,t}$ désigne l'ordre du produit st dans W. Ce sous-graphe est une maille de $\mathcal{G}(W,S)$, au sens suivant: une *maille* est un circuit de longeur $2m$ totalement géodésique dans $\mathcal{G}(W,S)$, tel que si deux de ses sommets sont à distance strictement inférieure à m, il y a une unique géodésique de $\mathcal{G}(W,S)$ les joignant (alors nécessairement contenue dans le circuit).

L'image de $\mathcal{G}_{s,t}$ dans K est une maille $K_{s,t}$ de K; par convexité de K dans $\mathcal{G}$, c'est aussi une maille de $\mathcal{G}$. L'arête a' de $K_{s,t}$ la plus éloignée de a est caractérisée par l'existence d'un sous-segment c de $K_{s,t}$, tel que c joint y_0 à une extrémité y_0' de a', (a,c) et (c,a') sont géodésiques, mais (a,c,a') ne l'est pas.

Des trois dernières propriétés et de la proposition 4.11, il résulte que $M(a) = M(a')$.

D'après le lemme 4.12, il existe une géodésique de y_0 à y_0' contenue dans $V(M)$. Mais comme $K_{s,t}$ est une maille, cette géodésique est c. Alors $\sigma_M(c)$ est une géodésique entre deux points de $K_{s,t}$ à distance strictement inférieure à $m_{s,t}$, donc $\sigma_M(c) \subset K_{s,t}$. □

Lemme 5.6 *Soient K un élément de $\mathcal{F}$ et C une cellule de P dont le 1–squelette contient un sommet x_0 de K tel que $St(x_0,K) = St(x_0,i(C))$. Alors $K = i(C)$.*

Preuve On peut supposer la dimension de C au moins égale à deux, sinon il n'y a rien à montrer. Par connexité de C, il suffit de montrer que K est un ouvert de $i(C)$. Par connexité de K, il suffit de montrer que si x_0 est un sommet de K tel que $St(x_0,K) = St(x_0,i(C))$, alors pour tout voisin y_0 de x_0 dans K, on a encore $St(y_0,K) = St(y_0,i(C))$.

Soit a l'arête de K d'origine x_0 et d'extrémité y_0, et M le mur transverse à a. Comme σ_M préserve $i(C)$ et l'ensemble des arêtes de K touchant a (d'après le lemme 5.5), on a:

$$St(y_0,K) = St(\sigma_M(x_0),K) = \sigma_M(St(x_0,K)) =$$
$$\sigma_M(St(x_0,i(C))) = St(y_0,i(C)).$$ □

Proposition 5.7 *L'application $i: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est surjective.*

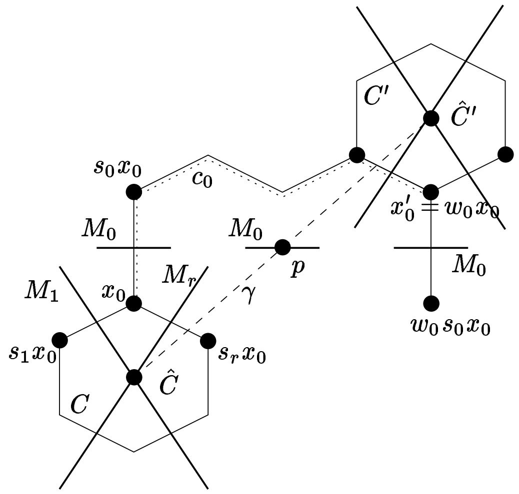
Preuve On raisonne par récurrence sur le rang du système de Coxeter dont K est le graphe de Cayley (cela correspond au degré du graphe régulier K). Il n'y a rien à dire en rang 1.

Soit $K \in \mathcal{F}$ de rang $r+1$ supérieur ou égal à 2. Considérons un sommet x_0 de K, et soient $a_0, a_1, \dots, a_r$ les arêtes issues de x_0; nous noterons M_i le mur transverse à l'arête a_i. Alors il existe un système de Coxeter fini $(W, S = \{s_0, s_1, \dots, s_r\})$ et un isomorphisme de son graphe de Cayley $\mathcal{G}(W,S)$ sur K envoyant 1 sur x_0 et l'arête issue de 1 préservée par s_i sur a_i. Considérons maintenant V, le sous-groupe spécial de (W,S) engendré par $T = \{s_1, \dots, s_r\}$. Il y a une unique copie de son graphe de Cayley contenue dans le graphe de Cayley de (W,S) et passant par 1; à ce sous-graphe correspond un sous-graphe L de K.

Un résultat classique sur les sous-groupes spéciaux (cf. [5]) entraîne que L est convexe dans $\mathcal{G}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à L, et trouver une cellule C de P dont L est le 1–squelette.

Comme (W,S) est fini, il possède un unique élément w_0 de longueur maximale: soit x'_0 le sommet correspondant de K.

Fait 1 Notons d'abord que les arêtes de K issues de x'_0 sont traversées par les murs M_i, qui de plus séparent x'_0 de x_0.



Preuve Pour tout s_i de S, l'élément s_iw_0 doit être lié à w_0 dans $\mathcal{G}(W,S)$, ce qui signifie qu'il existe un $s_j \in S$ tel que $s_iw_0 = w_0s_j$. Soit c_i une géodésique de $\mathcal{G}(W,S)$ de 1 à w_0 commençant par l'arête de 1 à s_i: la suite des murs de $\mathcal{G}(W,S)$ traversés par c_i est sans répétition. Alors le chemin γ_i formé de c_i suivi de l'arête de w_0 à $s_i.w_0 = w_0.s_j$ n'est pas géodésique, car le premier mur qu'elle traverse est $M(s_i) = M(w_0.s_j.w_0^{-1})$, donc égal au dernier. On en déduit que le chemin c_i' tel que l'arête de 1 à s_i suivie de c_i' égale γ_i est géodésique.

En prenant les images de ces trois chemins dans K, en utilisant la convexité de K dans $\mathcal{G}$ et la caractérisation des géodésiques combinatoires par la suite des murs traversés, on voit que le mur M_i coupe une arête issue de x_0', et sépare x_0 de x_0'. □

Comme ci-dessus, il y a une unique copie convexe de L dans K passant par x_0', coupée par les murs $M_1, \ldots M_r$: nous la noterons L' et C' sera la cellule de P dont le 1–squelette est L'.

Les centres métriques des cellules C et C' sont des points $\hat{C}$ et $\hat{C}'$ de $M_1 \cap \ldots \cap M_r$; par convexité, la géodésique γ qui les joint est aussi dans cette intersection. D'autre part, la géodésique joignant $\hat{C}$ à x_0 ne coupe que les murs de C, donc pas M_0 (d'après le lemme 5.2). Un résultat analogue étant vrai pour x_0', et M_0 séparant x_0 de x_0', la géodésique γ doit couper M_0. Comme $\gamma \not\subset M_0$, l'intersection de γ avec M_0 ne contient qu'un point p.

Soit D la cellule de P engendrée par γ juste après $\hat{C}$; comme $\gamma \cap C = \hat{C}$, la cellule D contient C comme face stricte.

Fait 2 Le point p appartient à D.

Preuve Par l'absurde, supposons que p n'est pas dans D. Alors γ ressort de D par un point q de son bord; ce point est dans $M_1 \cap \ldots \cap M_r$. Comme γ reste dans l'intérieur de D entre $\hat{C}$ et q, ces deux points ne peuvent être sur une même face du bord de D. Soit F la face stricte de D engendrée par q; cette cellule paire est coupée par les murs $M_i, 1 \leq i \leq r$, donc invariante par les réflexions σ_{M_i}, tout comme C.

Montrons que F est disjointe de C. Si F contenait un sommet de C, elle contiendrait toutes ses images par le groupe d'isométrie de D engendrée par les réflexions $\sigma_{M_i}, 1 \leq i \leq r$. Mais ce groupe est (simplement) transitif sur l'ensemble des sommets de C. Donc F contiendrait tous les sommets de C, autrement dit C elle-même. Mais alors $\hat{C}$ et q seraient dans une même face F du bord de D, ce qui n'est pas.

Considérons une géodésique combinatoire c de $x_0 \in C$ à un sommet de F, de longueur minimale. Par convexité de $i(D)$, on a $c \subset D$. Comme $C \cap F = \emptyset$, la longueur de c est non nulle: donc $c = (b, \ldots)$, où b est une arête de D issue de x_0. Comme σ_{M_i} préserve F, il est évident, par minimalité, que $b \not\subset C$. Donc, d'après le lemme 5.2, $M(b)$ ne peut pas couper C.

Maintenant, le mur $M(b)$ ne peut pas non plus couper F: sinon en appliquant $\sigma_{M(b)}$ au sous-segment de c après b, on trouverait une géodésique de x_0 à un sommet de F, de longueur inférieure à celle de c, en contradiction avec la minimalité de celle-ci.

Il en résulte que $M(b)$ sépare les deux cellules C et F, donc en particulier les deux points $\hat{C}$ et q. Alors $M(b)$ sépare $\hat{C}$ et $\hat{C}'$, C et C', donc x_0 et x'_0.

Le mur $M(b)$ n'est pas le mur M_0: car celui-là coupe la géodésique γ dans D, alors que celui-ci la coupe en p, supposé extérieur à D. Nous nous retrouvons avec un élément K de $\mathcal{F}$ et une arête b de P contenant un sommet de K, mais non contenue dans K, telle que $M(b)$ sépare deux points de K: une contradiction avec le lemme 5.4. Cette absurdité prouve que $p \in D$. □

Puisque l'arête a_0 est issue d'un sommet x_0 de D et que le mur $M_0 = M(a_0)$ recoupe D (en p), le lemme 5.2 entraîne que $a_0 \subset D$. Alors la sous-cellule E de D engendrée par les arêtes $a_0, a_1, \ldots a_r$ vérifie $St(x_0, K) = St(x_0, i(E))$, donc $K = i(E)$ d'après le lemme 5.6. □

Corollaire 5.8 *Le morphisme de restriction de* $\mathrm{Aut}(P)$ *dans* $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ *est un isomorphisme.*

Preuve Il suffit de montrer la surjectivité. Si φ est un automorphisme de $\mathcal{G}$, définissons un automorphisme $\overline{\varphi}$ de P de la façon suivante. Pour une cellule C de P, considérons l'élément K' de $\mathcal{F}$ défini par $K' = \varphi(i(C))$. D'après la proposition précédente, il existe une (unique) cellule C' dont le 1–squelette est K'. Alors il existe un unique isomorphisme polyédral de C sur C' prolongeant $\varphi|_{i(C)}$.

La collection d'isomorphismes polyédraux locaux $\overline{\varphi}_C$ ainsi obtenue se recolle pour donner l'automorphisme $\overline{\varphi}$. □

Ce corollaire termine la preuve du théorème 5.1. □

5.2 Existence d'automorphisme non trivial fixant strictement un mur propre

Un automorphisme de P *fixe strictement* un mur M de P si et seulement s'il fixe M (point par point) et préserve chacune des deux composantes connexes de $P \setminus M$.

Le but de cette section est de donner des exemples de P dont le groupe $\mathrm{Aut}^+(P)$, sous-groupe de $\mathrm{Aut}(P)$ engendré par les stabilisateurs stricts de murs propres est très gros.

Remarque (1) L'automorphisme f fixe strictement le mur M si et seulement s'il fixe point par point $M \cup a$, où a est une arête transverse à M. Une condition équivalente est que f fixe $V(M)$ point par point. Et un automorphisme de P fixe strictement un mur M si et seulement si l'automorphisme correspondant de $(X_P, \mathcal{M}_P)$ fixe strictement le mur correspondant à M.

(2) Soient P^+ et P^- les adhérences des deux composantes connexes de $P \setminus M$. Alors le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(P)$ formé des automorphismes fixant strictement M est le produit direct de $\mathrm{Fix}(P^+)$ et de $\mathrm{Fix}(P^-)$.

Lemme 5.9 *Soit P un complexe polyédral pair* $\mathrm{CAT}(0)$*. Alors son espace à murs (X_P, M_P) vérifie la propriété* (M')*.*

Preuve Soit f un automorphisme de P fixant strictement un mur M et A une des deux moitiés de X définies par M. Soit B une moitié de X telle que $A \cap B$ et $(X \setminus A) \cap B$ sont non vides. Notons N le mur de P dont le mur associé sur X est $(B, X \setminus B)$. Alors on voit que N contient des points séparés par M. Donc, par convexité, $M \cap N$ est non vide. En particulier, il existe une cellule C de P coupée par M et N. Puisque f fixe strictement M, elle vaut l'identité sur C. Donc f fixe une arête transverse à N: f préserve globalement N, ainsi que les deux composantes connexes de $X \setminus N$. □

Nous allons étudier le cas où P est la réalisation géométrique de Davis–Moussong d'un système de Coxeter.

Soit (W, S) un système de Coxeter. Nous noterons $N = N(W, S)$ le nerf fini de (W, S). Nous munissons la première subdivision barycentrique N' de N d'une fonction m, définie sur l'ensemble des milieux $\hat{a}$ des arêtes a de N par la formule: $m(\hat{a})$ est l'ordre du produit st, avec s et t les réflexions de S correspondant aux extrémités de a. Il est alors immédiat que les automorphismes du graphe de Coxeter de (W,S) correspondent aux automorphismes de N' qui proviennent d'un automorphisme de N et préservent la fonction m.

Notons $P = |W|_0$ la réalisation de Davis–Moussong de (W,S). On a $P' = (W \times (x_0 * N'))/ \sim$ (voir section 3.2), et nous noterons $[w,x]$ la classe de (w,x). Les sommets de P sont les points $[w,x_0]$ pour $w \in W$. Nous identifierons un point x de $x_0 * N'$ avec son image $[id,x]$ dans P'. En particulier, le link de x_0 dans P' s'identifie avec N'. L'action à gauche de W sur le produit passe au quotient, en une action simplement transitive sur les sommets wx_0 de P. Mais on peut aussi construire, à partir de (W,S), des éléments de $\mathrm{Aut}(P)$ fixant le sommet x_0.

Soit $G(W,S)$ le groupe des automorphismes du diagramme de Coxeter de (W,S). Tout élément f de $G(W,S)$ agit sur N' (en préservant m), donc nous pouvons considérer son prolongement conique à $x_0 * N'$, encore noté f. D'autre part, f induit naturellement un automorphisme du groupe W (permutant S), que nous noterons $\overline{f}$. Alors l'application $(w,x) \mapsto (\overline{f}(w), f(x))$ est compatible avec $\sim$, donc induit un automorphisme $\hat{f}$ de P'. On a $\hat{f}([w,x]) = [\overline{f}(w), f(x)]$, donc $\hat{f}(x_0) = x_0$, et $\hat{f}$ agit sur le link de x_0 comme f sur N'. Enfin, $\hat{f}$ provient d'un automorphisme de P (car f provient d'un automorphisme de N).

Nous obtenons ainsi une représentation fidèle de $G(W,S)$ dans $\mathrm{Aut}(P)$, d'image contenue dans le stabilisateur de x_0. D'après la formule $\hat{f}(w \cdot [w',x]) = \overline{f}(w) \cdot \hat{f}([w',x])$, si $\overline{f}$ fixe point par point un sous-ensemble T de S, alors $\hat{f}$ commute avec l'action sur P du sous-groupe spécial engendré par T.

Définition 5.10 Soient Q un complexe polyédral pair $\mathrm{CAT}(0)$, et a une arête de Q. La *facette* de Q transverse à a est la réunion des simplexes de Q' (la première subdivision barycentrique de Q) qui contiennent le milieu de l'arête a, mais aucune de ses extrémités. Nous la noterons $\phi(a)$. Si x_0 est un sommet de Q, le *bloc de centre* x_0 est l'étoile de x_0 dans Q'.

Lemme 5.11 *Le mur transverse à l'arête a est la réunion des facettes $\phi(b)$, avec b parallèle à a. Les deux blocs centrés sur les extrémités d'une arête a ont pour intersection la facette $\phi(a)$.*

Preuve Vérifions d'abord que $\phi(a) \subset M(a)$. Soit Δ un simplexe de $\phi(a)$. Considérons la plus petite cellule C contenant Δ: les sommets de Δ sont les centres métriques de certaines faces de C contenant l'arête a. Donc chacun de ces sommets est invariant par $\sigma(a,C)$: autrement dit $\Delta \subset M(a,C)$.

Pour achever de montrer la première assertion, il suffit de prouver que si C est un polyèdre pair et a une arête de C, alors $M(a,C)$ est contenu dans l'union des facettes $\phi(b)$, avec b parallèle à a dans C. On raisonne par récurrence sur $dim(C)$, la propriété étant évidente en dimension 1.

Soit x un point de $M(a,C)$. Si $x = \hat{C}$ (le centre métrique de C), alors x est dans toutes les facettes de C, en particulier dans $\phi(a)$. Si $x \neq \hat{C}$, nous pouvons considérer la géodésique de $\hat{C}$ à x, et la prolonger jusqu'au bord de C, qu'elle touche en un point y. Comme x et $\hat{C}$ sont dans $M(a,C)$, le point y est aussi dans ce mur. Cela signifie que D, la face stricte de C engendrée par y, est coupée par $M(a,C)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $y \in D$: il existe un simplexe Δ_y de la facette d'une arête b de D telle que $M(b,D) = M(a,C) \cap D$ qui contient y. Alors b est parallèle à a, et x est dans Δ_x, le joint de Δ_y avec $\hat{C}$. Ceci conclut, car Δ_x est dans la facette de b dans C.

Pour la seconde assertion, soit a une arête de Q d'extrémités x_0 et y_0. Un sommet de Q' est joignable aux extrémités de a si et seulement s'il est le centre métrique d'une face C contenant x_0 et y_0. Ceci, par convexité, équivaut à dire que C contient a, autrement dit $\hat{C} \in \phi(a)$. □

Si (W,S) est un système de Coxeter, nous appellerons *facette de* (W,S) *(au sens de Davis–Moussong)* l'étoile dans N' d'un sommet de N; si ce sommet correspond à la réflexion s, nous noterons ϕ_s cette facette. Le système de Coxeter est dit *rigide* si le fixateur dans $G(W,S)$ de toute facette de (W,S) est trivial. Tous les blocs de la réalisation géométrique de Davis–Moussong P sont isomorphes au cône sur N'; l'intersection de deux blocs centrés sur des sommets voisins de P est donc une facette de (W,S).

Théorème 5.12 *Si (W,S) est rigide, alors $\mathrm{Aut}(P)$ est discret: c'est le produit semi-direct de W et de $G(W,S)$.*

Supposons que (W,S) n'est pas rigide, et que (W,S) est hyperbolique au sens de Gromov. Alors, pour tout automorphisme non trivial f de $G(W,S)$ fixant une facette ϕ_s, le mur M_s passant par ϕ_s est propre. De plus, il existe un automorphisme φ de P, dont la restriction à l'étoile de x_0 dans P est $\hat{f}$, et qui fixe strictement M_s. En particulier, $\mathrm{Aut}^+(P) \neq \{1\}$, et $\mathrm{Aut}(P)$ est non discret.

Preuve Supposons d'abord que (W,S) est rigide. Il s'agit de montrer que le stabilisateur de x_0 est $G(W,S)$.

D'abord le fixateur de $St(x_0,P')$ dans $\mathrm{Aut}(P)$ est trivial: car si $F \in \mathrm{Aut}(P)$ fixe l'étoile d'un sommet dans P', alors par rigidité F fixe l'étoile de tout sommet voisin.

Ensuite, si $F \in \mathrm{Aut}(P)$ fixe x_0, il induit un automorphisme du link de x_0 dans P' (isomorphe à N'), provenant d'un automorphisme de N, et préservant la fonction m. En effet, cette fonction a une interprétation géométrique: $m(x)$ est simplement le diamètre combinatoire du bord de la 2–face dont x est le centre. Il existe donc un $f \in G(W,S)$ tel que $\hat{f}$ coïncide avec F sur le bloc de P de centre x_0. D'après la première partie, $\hat{f} = F$.

Lemme 5.13 *Soit (W,S) un système de Coxeter hyperbolique. Alors l'ensemble des $w \in W$ qui agissent trivialement au bord de W est un sous-groupe spécial fini W_F tel que le système $(W_{S\backslash F}, S\backslash F)$ est irréductible, et tout élément de F commute avec tout élément de $S\backslash F$. En particulier, si W est irréductible, alors W agit fidèlement sur son bord.*

Preuve Soit G le sous-groupe de W agissant trivialement sur ∂W : c'est un sous-groupe distingué fini de W (voir [13]). En tant que sous-groupe fini, G est contenu dans un conjugué d'un sous-groupe spécial fini W_T. Mais comme G est distingué, on a $G \subset W_T$, avec toujours G distingué dans W. En prenant l'intersection des sous-groupes spéciaux finis contenant G, on trouve un sous-groupe spécial fini W_F contenant G, et tel que, pour tout $t \in F$, il existe $g \in G$ tel que t apparaisse dans une écriture de longueur minimale de g. Pour s n'appartenant pas à F et $g \in G$, on a $s.g.s \in G \subset W_F$. Donc s commute avec tous les éléments t de F apparaissant dans une écriture géodésique de g. On en déduit que tout élément de F commute avec tout élément de $S \setminus F$.

Il reste à montrer que $(W_{S\setminus F}, S \setminus F)$ est irréductible. Supposons que $S \setminus F = T_1 \cup T_2$, avec $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et tout élément de T_1 commute avec tout élément de T_2. On ne peut avoir W_{T_1} et W_{T_2} infinis, puisque W est hyperbolique et contient $W_{T_1} \times W_{T_2}$. Si par exemple W_{T_1} est fini, il commute à $W_{T_2 \cup F}$, donc agit trivialement au bord: d'où $T_1 \subset W_{T_1} \subset G \subset W_F$, et donc $T_1 = \emptyset$. □

Supposons maintenant que (W,S) est non rigide. Soient $f \in G(W,S)$ et $s \in S$ tels que f est non trivial et f fixe ϕ_s (point par point). Le fait que M_s soit un mur propre de P résulte du lemme précédent. En effet, si M_s n'est pas propre, comme s permute les deux demi-espaces définis par M_s, le bord de M_s est égal à tout le bord de P, donc s agit trivialement sur le bord de P. Par le lemme, s appartient à F, et son étoile est égale à tout le nerf fini de (W,S), ce qui contredit la non-trivialité de f.

Comme f fixe la facette ϕ_s, $\overline{f}$ fixe tous les $t \in S$ tels que $m_{s,t} < \infty$. Donc $\hat{f}$ commute à tout produit de telles réflexions. Comme d'autre part $\hat{f}$ fixe l'arête transverse à M_s passant par x_0, c'est donc que $\hat{f}$ fixe toutes les arêtes de la forme $w.a_s$, avec $w \in W_{T_s}$, où $T_s = \{t \in S \,/\, m_{s,t} < \infty\}$, et a_s est l'arête de P entre x_0 et sx_0.

Soient $\partial\mathcal{H}$ la réunion de ces arêtes, $\mathcal{H}$ la réunion des chemins d'origine x_0 dans le 1–squelette $\mathcal{G}$ de P, qui ne traversent pas $\partial\mathcal{H}$, et $\mathcal{H}^c$ le sous-graphe de $\mathcal{G}$ réunion des arêtes non dans $\mathcal{H}$. La proposition 5.17 de la section suivante dit que $\mathcal{H}^c$ contient le demi-espace A de W défini par M_s et contenant s. L'automorphisme $\hat{f}$ vaut l'identité sur $\partial\mathcal{H}$, et $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^c$ est contenu dans $\partial\mathcal{H}$. Donc on peut définir un automorphisme φ de $\mathcal{G}$ qui coïncide avec l'identité sur $\mathcal{H}^c$, et avec $\hat{f}$ sur $\mathcal{H}$. Comme A est contenu dans $\mathcal{H}^c$, φ vaut l'identité sur le demi-espace A, donc fixe strictement le mur M_s. Enfin, $\hat{f}$ agit sur l'ensemble $\bigcup_{t\in S\setminus\{s\}} a_t$ des arêtes à la fois dans $\mathcal{H}$ et dans l'étoile de x_0, comme f sur $S \setminus \{s\}$. Donc φ, qui coïncide avec $\hat{f}$ sur l'étoile de x_0, est non trivial. □

5.3 Un résultat technique sur les groupes de Coxeter

Soit (W, S) un système de Coxeter, notons 1 son élément neutre et $\mathcal{G} = \mathcal{G}(W, S)$ son graphe de Cayley.

Si $t \in S$ et $T \subset S$, nous noterons a_t l'arête de $\mathcal{G}(W, S)$ entre 1 et t et $\mathcal{G}_T$ le sous-graphe de $\mathcal{G}$ réunion des arêtes reliant deux sommets de $\mathcal{G}$ appartenant au sous-groupe spécial W_T engendré par T. Alors $\mathcal{G}_T$ est isomorphe à $\mathcal{G}(W_T, T)$, et c'est un sous-graphe convexe de $\mathcal{G}$ (voir [5]). On peut aussi voir $\mathcal{G}_T$ comme la réunion des chemins de $\mathcal{G}$ d'origine 1, et dont toutes les arêtes ont un label dans T (i.e. sont de la forme wa_t, avec $t \in T$).

Pour $s \in S$ quelconque, soit T_s la partie de S formée des réflexions t telles que $m_{s,t} < \infty$. Notons alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s$ la réunion des chemins c de $\mathcal{G}(W, S)$ d'origine 1, et n'empruntant que des arêtes de la forme wa_t, avec $t \neq s$, ou de la forme wa_s, avec $w \notin W_{T_s}$. Introduisons enfin $A = A_s$, l'ensemble des éléments de W séparés de 1 par le mur M_s de s.

Notre but est de montrer que $\mathcal{H}$ et A sont disjoints, ce qui est le résultat voulu dans la preuve du théorème 5.12.

Commençons par donner une description plus constructive de $\mathcal{H}$. Posons

$$\mathcal{K}_1 = \{1\}, \mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}, \ldots,$$

$$\mathcal{K}_{n+1} = \bigcup_{w\in\mathcal{H}_n, w\notin W_{T_s}} w.\mathcal{G}_{T_s}, \mathcal{H}_{n+1} = \bigcup_{w\in\mathcal{K}_{n+1}} w.\mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}.$$

Alors $\mathcal{H}$ est la réunion croissante des $\mathcal{H}_n$.

Lemme 5.14 *Soient $w \in \mathcal{H}$ et $n = n(w)$ le plus petit indice i tel que $w \in \mathcal{H}_i$. Alors il existe deux suites $v_1^-, \ldots, v_{n-1}^-$ et $v_1^+, \ldots, v_{n-1}^+$ d'éléments de W appartenant à $\mathcal{H}$, et une suite $M_1, \ldots, M_{n-1}$ de murs de (W, S) tels que, pour $1 \leq i < n$,*

- *$n(v_i^-) = i$ et $n(v_i^+) = i + 1$;*
- *v_i^- et v_i^+ sont congrus modulo W_{T_s}, v_{i-1}^+ et v_i^- sont congrus modulo $W_{S \setminus \{s\}}$ (en posant $v_0^+ = 1$), et v_{n-1}^+ est congru à w modulo $W_{S \setminus \{s\}}$;*
- *M_i est transverse à l'arête de type s d'origine v_i^-, et sépare $v_i^-.\mathcal{G}_{S \setminus \{s\}}$ de $v_i^+.\mathcal{G}_{S \setminus \{s\}}$.*

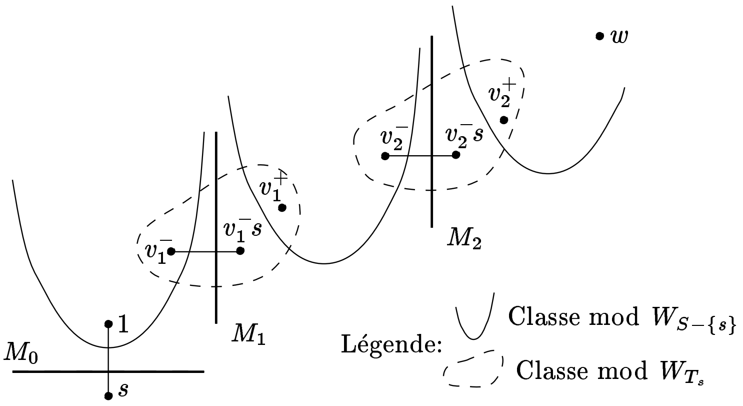


Figure 6: Description constructive de $\mathcal{H}$

Preuve Par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc $n > 1$. Comme $w \in \mathcal{H}_n$, il existe un v_{n-1}^+ de $\mathcal{K}_n$ congru à w modulo $W_{S \setminus \{s\}}$; puis il existe un v_{n-1}^- de $\mathcal{H}_{n-1}$ auquel v_{n-1}^+ est congru modulo W_{T_s}. Quitte à multiplier v_{n-1}^- et v_{n-1}^+ par des éléments convenables de $W_{T_s \setminus \{s\}}$ (ce qui ne change ni les classes modulo W_{T_s}, ni les classes modulo $W_{S \setminus \{s\}}$), on peut supposer que $d_W(v_{n-1}^-.W_{T_s \setminus \{s\}}, v_{n-1}^+.W_{T_s \setminus \{s\}}) = d_W(v_{n-1}^-, v_{n-1}^+)$.

Si v_{n-1}^- était dans un $\mathcal{H}_i$ avec $i < n - 1$, w serait dans $\mathcal{H}_{n-1}$, en contradiction avec la définition de n. De même, $v_{n-1}^+ \in \mathcal{H}_n \setminus \mathcal{H}_{n-1}$ (en particulier, $v_{n-1}^-.W_{S \setminus \{s\}} \neq v_{n-1}^+.W_{S \setminus \{s\}}$). Donc, si on complète les suites fournies par la récurrence appliquée à v_{n-1}^- à l'aide de v_{n-1}^- et v_{n-1}^+ d'une part, et d'autre part à l'aide du mur M_{n-1} fourni par le lemme suivant d'autre part, on obtient le résultat au rang n. □

Lemme 5.15 *Supposons que* $v^-.W_{T_s} = v^+.W_{T_s}$ *et* $v^-.W_{S\setminus\{s\}} \neq v^+.W_{S\setminus\{s\}}$. *Si de plus* $d_W(v^-.W_{T_s\setminus\{s\}}, v^+.W_{T_s\setminus\{s\}}) = d_W(v^-, v^+)$, *alors le mur transverse à l'arête* $v^-.a_s$ *issue de* v^- *sépare* $v^-.\mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}$ *de* $v^+.\mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}$.

Preuve Quitte à multiplier par l'inverse de v^-, on peut supposer $v^- = 1$. On a alors $v = v^+ \in W_{T_s} \setminus W_{S\setminus\{s\}}$, et v est l'élément de plus petite longueur dans sa classe modulo $W_{T_s\setminus\{s\}}$ (cette longueur est non nulle, sinon v serait dans $W_{T_s\setminus\{s\}}$, donc dans $W_{S\setminus\{s\}}$). En particulier, toute géodésique de 1 à v passe par a_s, et le mur M_s transverse à a_s sépare 1 de v.

La convexité de $\mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}$ l'empêche d'être coupée par le mur M_s. Supposons que M_s soit transverse à une arête de $v.\mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}$. Cela signifie qu'il existe $t \in S \setminus \{s\}$ et $w \in W_{S\setminus\{s\}}$ tels que $s(vw) = (vw)t$. Donc $v^{-1}sv = wtw^{-1}$: par convexité des sous-groupes spéciaux, la réflexion $v^{-1}sv$ est donc dans $W_{T_s} \cap W_{S\setminus\{s\}} = W_{T_s\setminus\{s\}}$. Alors l'élément $v' = v(v^{-1}sv) = s.v$ est congru à v modulo $W_{T_s\setminus\{s\}}$, mais il est de longueur 1 de moins que v, puisque toute géodésique de 1 à v commence par s. Ceci contredit la minimalité supposée de $|v|$. □

Nous allons montrer que, vus dans la réalisation de Davis-Moussong P de (W,S), les murs apparaissant dans le lemme 5.14 sont disjoints, et ne séparent pas deux points de A. Pour cela, nous faisons agir W sur un certain arbre.

Soient s,t dans S tels que $m_{s,t} = \infty$. Alors W est le produit amalgamé $W_{S\setminus\{s\}} *_{W_{S\setminus\{s,t\}}} W_{S\setminus\{t\}}$. Considérons le graphe biparti $\mathcal{T}_{s,t}$ ayant un sommet de type s pour chaque classe de W modulo $W_{S\setminus\{s\}}$, un sommet de type t pour chaque classe de W modulo $W_{S\setminus\{t\}}$, avec une arête entre une classe modulo $W_{S\setminus\{s\}}$ et une classe modulo $W_{S\setminus\{t\}}$ lorsque ces deux classes ne sont pas disjointes. Notons que si w appartient à $uW_{S\setminus\{s\}} \cap vW_{S\setminus\{t\}}$, alors $wW_{S\setminus\{s,t\}}$ est contenu dans $uW_{S\setminus\{s\}} \cap vW_{S\setminus\{t\}}$. La convexité des sous-groupes spéciaux entraîne alors que $wW_{S\setminus\{s,t\}}$ est égal à $uW_{S\setminus\{s\}} \cap vW_{S\setminus\{t\}}$. Ainsi, les arêtes de $\mathcal{T}_{s,t}$ correspondent bijectivement aux classes de W modulo $W_{S\setminus\{s,t\}}$.

Le groupe W agit sur $\mathcal{T}_{s,t}$ par multiplication à gauche. Cette action est transitive sur les arêtes de $\mathcal{T}_{s,t}$, le stabilisateur de $x_s = W_{S\setminus\{s\}}$ est $W_{S\setminus\{s\}}$, le stabilisateur de $x_t = W_{S\setminus\{t\}}$ est $W_{S\setminus\{t\}}$, et le stabilisateur de l'arête joignant ces deux sommets est $W_{S\setminus\{s,t\}}$. Il résulte alors de la théorie de Bass–Serre [29] que $\mathcal{T}_{s,t}$ est un arbre.

Lemme 5.16 *Vus dans* P, *les murs* M_{i-1} *et* M_i *apparaissant dans le lemme 5.14 sont disjoints. Le mur* M_i *ne sépare pas* $v_{i-1}^-.a_s$ *de* v_i^-. *Enfin* $M_1 \cap M(a_s) = \emptyset$.

Preuve Notons que v_{i-1}^+ et v_i^- ne peuvent être dans la même classe modulo W_{T_s} (sinon $w \in \mathcal{H}_{n-1}$). Par W–homogénéité, il suffit donc de montrer le résultat suivant (lequel donne du même coup la dernière partie du lemme).

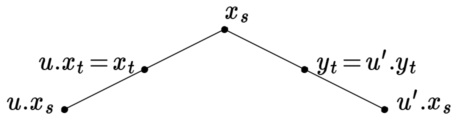
Soient $v^- \in W_{S\setminus\{s\}} \setminus W_{T_s}$ et M le mur d'une réflexion u de W_{T_s} ne coupant pas $\mathcal{G}_{S\setminus\{s\}}$. Alors M est disjoint du mur M' transverse à $v^-.a_s$.

Puisque $v^- \notin W_{T_s}$, il existe un $t \in S$ tel que $m_{s,t} = \infty$ et $v^- \notin W_{S\setminus\{t\}}$. Nous raisonnons en considérant l'action de W sur l'arbre $\mathcal{T}_{s,t}$.

D'abord, dire que $M \cap \mathcal{G}_{S\setminus\{s\}} = \emptyset$, c'est dire que $u \notin W_{S\setminus\{s\}}$. Autrement dit, $u.x_s \neq x_s$. De même, si u' est la réflexion par rapport à M', on a $u'.x_s \neq x_s$.

Soit y_t la classe à gauche de v^- modulo $W_{S\setminus\{t\}}$. Alors $u'.y_t = y_t$. D'autre part, comme $T_s \subset S \setminus \{t\}$, on a aussi $u.x_t = x_t$.

Enfin, $y_t \neq x_t$, et x_s est lié dans $\mathcal{T}_{s,t}$ à x_t et y_t.



Donc le produit $u'u$ agit comme une translation non triviale de l'arbre $\mathcal{T}_{s,t}$, et est nécessairement d'ordre infini. Or, si les murs des deux réflexions u et u' se coupaient dans P, le produit $u'u$ aurait un point fixe, donc devrait être d'ordre fini (l'action de W sur P est propre).

En fait, non seulement $M \cap M' = \emptyset$, mais de plus M' ne sépare pas 1 d'une arête a transverse à M et contenue dans $\mathcal{G}_{T_s}$ (ce qui achève de prouver le lemme). Car si c'était le cas, par convexité, M' serait transverse à une arête a' de $\mathcal{G}_{T_s}$, et u' serait une réflexion de W_{T_s}. Donc u' fixerait x_t. Comme u' fixe déjà y_t, elle fixerait l'unique sommet de type s lié à la fois à x_t et à y_t, c'est à dire x_s. Or nous avons vu que ce n'était pas le cas. □

Proposition 5.17 *$\mathcal{H}$ est disjoint de A.*

Preuve Si $w \in \mathcal{H}$, appliquons le lemme 5.14 pour trouver une suite $s = v_0^-, v_1^-, \ldots, v_{n-1}^-, v_n^- = w$ et une suite de murs $M_0 = M_s, M_1, \ldots, M_{n-1}$ tels que M_i sépare v_i^- de v_{i+1}^- et M_i est transverse à $v_i^-.a_s$. D'après le lemme 5.16, les murs M_i et M_{i+1} sont disjoints, et M_{i+1} ne sépare pas v_{i+1}^- de M_i (voir figure 6). Soit A_i la moitié de W définie par M_i contenant v_i^-. Il est maintenant immédiat que la suite des moitiés A_i est (strictement) croissante, avec $A_0 = A$, et $w \notin A_{n-1}$. Donc $w \notin A$. □

5.4 Exemples de complexes polyédraux pairs CAT(-1)

(1) Soient k un entier pair avec $k \geq 4$, et L le graphe d'incidence d'un plan projectif sur un corps fini, ou plus généralement n'importe quel immeuble épais fini de rang 2 vérifiant la condition de Moufang (voir [27]). Cette condition (plus le fait que L soit épais) implique en particulier que le fixateur de l'étoile d'un sommet de L est non trivial. Donc $\mathrm{Aut}^+(A(k,L))$ est non trivial, dès que $W(k,L)$ est hyperbolique (au sens de Gromov), c'est-à-dire si $k \geq 6$ ou $k = 4$ et L n'est pas de type $A_1 \times A_1$. Ceci concerne donc l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$, avec p pair, $p \geq 6$ et $q \geq 3$.

(2) Étant donné un polyèdre pair C, nous allons montrer comment construire un complexe polyédral pair CAT(-1) ayant un gros groupe d'automorphismes, et dont toute cellule maximale est isomorphe (combinatoirement) à C.

Proposition 5.18 *Pour tout polyèdre pair C, il existe un complexe polyédral pair localement compact* CAT(-1), *dont les cellules maximales sont combinatoirement isomorphes à C, admettant un groupe discret cocompact d'automorphismes, et dont le groupe des automorphismes engendré par les fixateurs stricts de murs propres est non dénombrable. Si C n'est pas combinatoirement un produit, alors on peut de plus supposer que tous les murs sont propres.*

Preuve Soit (W,S) le système de Coxeter fini associé à C par la proposition 4.1. Considérons une fonction $\overline{n}$ de S dans l'ensemble des entiers strictement positifs, telle que, si $\overline{n}(s) > 1$ et $\overline{n}(t) > 1$, on a $m_{s,t} > 2$ (c'est-à-dire s et t sont liés par une arête dans le graphe de Coxeter de (W,S)). Nous noterons $K_{\overline{n}}$ le sous-graphe complet du graphe de Coxeter de (W,S) dont les sommets s vérifient $\overline{n}(s) > 1$. Remarquons que par le théorème de classification des systèmes de Coxeter fini (voir par exemple [5, p.193]), $K_{\overline{n}}$ est réduit à un seul sommet ou à une seule arête.

Définissons $(\overline{W},\overline{S})$, l'unique système de Coxeter tel qu'il existe une application $\tau\colon \overline{S} \to S$ avec

i) $\tau^{-1}(\{s\})$ possède $\overline{n}(s)$ éléments;

ii) si $\overline{s} \neq \overline{t}$, ou bien $\tau(\overline{s}) = \tau(\overline{t})$, et dans ce cas $m_{\overline{s},\overline{t}} = \infty$, ou bien $\tau(\overline{s}) \neq \tau(\overline{t})$, et dans ce cas $m_{\overline{s},\overline{t}} = m_{\tau(\overline{s}),\tau(\overline{t})}$.

Il est immédiat que τ s'étend en un homomorphisme de groupes de $\overline{W}$ dans W, et est injective sur les parties $\overline{T}$ de $\overline{S}$ telles que $\overline{W}_{\overline{T}}$ est fini. Donc les simplexes du nerf fini de $(\overline{W},\overline{S})$ sont les parties de $\overline{S}$ sur lesquelles τ est injective.

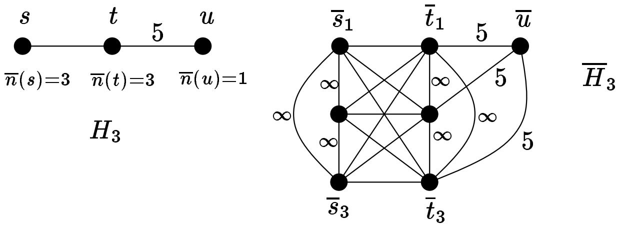


Figure 7: Exemple de système de Coxeter hyperbolique non rigide

Les permutations de $\overline{S}$ laissant τ invariante donnent des automorphismes de $(\overline{W}, \overline{S})$. Si on suppose que $\overline{n}$ atteint une valeur supérieure ou égale à 3, on en déduit que $(\overline{W}, \overline{S})$ n'est pas rigide.

Montrons que $(\overline{W}, \overline{S})$ est hyperbolique. Si ce n'est pas le cas, d'après Moussong, $(\overline{W}, \overline{S})$ contient un sous-groupe spécial affine de rang au moins 3, ou bien deux sous-groupes spéciaux infinis qui commutent. Dans le premier cas, τ est nécessairement injective sur le sous-groupe spécial (car le graphe d'un tel système de Coxeter ne contient pas d'∞), donc (W, S) est infini, contradiction. Dans le deuxième cas, un argument analogue au précédent montre qu'il existe $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$, $\overline{t_1}$ et $\overline{t_2}$ tels que $m_{\overline{s_1},\overline{s_2}} = m_{\overline{t_1},\overline{t_2}} = \infty$ et $m_{\overline{s_i},\overline{t_j}} = 2$ pour tous $i, j = 1, 2$. Mais alors $\tau(\overline{s_1}) = \tau(\overline{s_2})$ commute avec $\tau(\overline{t_1}) = \tau(\overline{t_2})$, en contradiction avec l'hypothèse de départ sur $\overline{n}$.

Enfin, notons $P(C, \overline{n})$ la réalisation géométrique de Davis–Moussong de $(\overline{W}, \overline{S})$. Alors les cellules maximales de $P(C, \overline{n})$ correspondent aux sous-groupes spéciaux finis maximaux de $(\overline{W}, \overline{S})$, lesquels sont tous isomorphes à (W, S). Donc toutes les cellules maximales de $P(C, \overline{n})$ sont isomorphes à C.

Supposons (W, S) irréductible. Par classification, son graphe de Coxeter contient au plus une arête ayant un label pair. Alors il existe une application $\overline{n}$ telle que $\overline{n}(s) \geq 3$ si s appartient à $K_{\overline{n}}$, et telle que s'il existe une arête de label pair (différent de 2), alors $K_{\overline{n}}$ consiste en cette arête. Rappelons que si deux sommets d'un graphe de Coxeter peuvent être joints par un chemin d'arêtes dont tous les labels sont impairs, alors les deux réflexions correspondantes sont conjuguées dans le groupe de Coxeter (voir [5]). Donc toute réflexion de $(\overline{W}, \overline{S})$ est conjuguée à un élément de $\tau^{-1}(K_{\overline{n}})$. Or le mur de toute réflexion dans $\tau^{-1}(K_{\overline{n}})$ est propre. Par conséquent, tout mur est propre. □

Par exemple, lorsque C est le polygone à $p = 2k$ côtés et $\overline{n}$ est constante égale à $q \geq 3$, le polyèdre $P(C, \overline{n})$ est l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$.

Lorsque C est un cube de dimension 3, $P(C,\overline{n})$ est le produit d'un arbre régulier par un carré.

Lorsque C est le polyèdre pair du groupe H_3, définissons $\overline{H_3}$ comme dans la figure précédente. Alors toutes les 2–faces de $P(C,\overline{n})$ sont contenues dans 3 copies de C, sauf les décagones, qui ne sont contenus que dans une copie de C.

5.5 Automorphismes préservant le type de complexes polyédraux pairs

Dans toute cette section, P est un complexe polyédral pair CAT(0) dont toutes les cellules maximales (appelées *chambres* par la suite) sont isométriques à une cellule C fixée (par exemple, P est un (k,L)–complexe, au sens de [23, 4], voir aussi [3]). La codimension des faces de P est maintenant bien définies.

Définition 5.19 Une *fonction type* de P dans C est une application polyédrale $\tau\colon P \to C$ dont la restriction à chaque chambre de P est une isométrie.

Exemples (1) Supposons que C soit une cellule paire de l'espace E_χ à courbure constante $\chi \leq 0$, dont les faces de codimension 1 font des angles dièdres de la forme $\frac{\pi}{n}$, avec $n \geq 2$. Alors, par le théorème de Poincaré (voir par exemple [24]), le sous-groupe $W(C)$ des isométries de E_χ engendré par les réflexions par rapport aux faces de codimension 1 de C est discret, et le quotient de E_χ par $W(C)$ s'identifie naturellement à C. Cela signifie que le pavage $P(C)$ de E_χ donné par les wC, avec $w \in W(C)$, admet une fonction type dans C.

(2) Plus généralement, tout immeuble P dont les appartements sont isométriques à $P(C)$ admet une fonction type (on fixe une certaine copie A_0 de $P(C)$ dans P, ainsi qu'une certaine chambre C_0 de A_0, puis on considère la rétraction de P sur A_0 basée en C_0, et on la compose par une quelconque fonction type sur A_0).

(3) Enfin, un arbre quelconque admet toujours une fonction type à valeur dans l'une de ses arêtes.

Appelons *galerie de P* toute suite de chambres $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ telles que $C_i \cap C_{i+1}$ contient une cellule de codimension 1. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la proposition suivante, qui ne servira pas dans ce texte.

Proposition 5.20 *Supposons que deux chambres de P sont jointes par au moins une galerie. Deux fonctions de type égales sur une chambre C_0 de P*

sont égales. S'il est non vide, l'ensemble des fonctions types sur P s'identifie avec l'ensemble (fini) des isométries de C_0 sur C. Dans ce cas, le link d'une face de codimension 2 de P est biparti.

Réciproquement, si P est de dimension 2 avec 2-cellules régulières, et si le link de chaque sommet de P est un graphe biparti connexe, alors l'ensemble des fonctions types sur P est non vide. □

A partir de maintenant, nous supposerons que P admet une fonction type dans un polyèdre pair C, et que deux chambres quelconques de P sont jointes par une galerie.

Définition 5.21 Nous noterons $\mathrm{Aut}_0(P)$ le noyau de l'action par précomposition du groupe $\mathrm{Aut}(P)$ sur l'ensemble des fonctions types de P dans C. Nous dirons que ses éléments *préservent le type.*

Remarque Si C' est isomorphe à C, un élément de $\mathrm{Aut}(P)$ préserve le type dans C si et seulement s'il préserve le type dans C'. C'est ce qui justifie l'omission de C dans la notation $\mathrm{Aut}_0(P)$. Remarquons que $\mathrm{Aut}_0(P)$ est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}(P)$.

Notons $\mathrm{Aut}_F(P)$ le sous-groupe caractéristique de $\mathrm{Aut}(P)$ engendré par les fixateurs de facettes (au sens de la définition 5.10). Ses éléments seront appelés *F-automorphismes.* Notons G_0 et G_1 les sous-groupes de $G = \mathrm{Aut}(P)$ engendrés par les intersections avec $\mathrm{Aut}_F(P)$ des fixateurs de chambres d'une part, et des fixateurs de cellules de codimension 1 d'autre part.

Il est clair que $G_0 \subset G_1 \subset \mathrm{Aut}_F(P)$. Si M est un mur propre de P, son fixateur strict est dans G_0. Donc $\mathrm{Aut}^+(P)$ est contenu dans G_0. Si $f \in \mathrm{Aut}(P)$ fixe une face F de codimension 1 et envoie une chambre C_2 contenant F sur C_1, alors $f|_{C_2}$ commute avec la fonction type de P restreinte à C_1 et à C_2. Par connexité par galeries de P, f préserve alors le type. Donc $G_1 \subset \mathrm{Aut}_0(P)$. En résumé, $\mathrm{Aut}^+(P) \subset G_0 \subset G_1 \subset \mathrm{Aut}_0(P) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$.

Introduisons des propriétés de transitivité, globales ou locales:

- (T_0) L'action de G_0 sur l'ensemble des chambres de P est transitive.
- (T_1) L'action de G_1 sur l'ensemble des chambres de P est transitive.
- (TL_1) Pour toute face σ de codimension 1, le fixateur de σ dans $\mathrm{Aut}_F(P)$ agit transitivement sur les chambres contenant σ.

(TL_0) Pour toute face σ de codimension 1, le sous-groupe de $\mathrm{Fix}(\sigma) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$ engendré par les $\mathrm{Fix}(\sigma) \cap \mathrm{Aut}_F(P) \cap \mathrm{Fix}(C)$, où C est une chambre de P, agit transitivement sur les chambres contenant σ.

Il est immédiat que (T_0) implique (T_1) et (TL_0) implique (TL_1). D'autre part:

Lemme 5.22 *Pour $i = 0, 1$, la condition (TL_i) implique (T_i), qui implique que $G_i = \mathrm{Aut}_0(P) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$.*

Preuve La première implication découle de la connexité par galerie de l'ensemble des chambres de P. La deuxième de ce qu'un élément de $\mathrm{Aut}_0(P)$ préservant une chambre la fixe nécessairement. □

Si a et b sont deux arêtes adjacentes à un sommet x_0 et contenues dans un même polygone de P, nous noterons $m_{a,b}$ la moitié du nombre de côtés de ce polygone. Nous obtenons ainsi une fonction de l'ensemble des arêtes de $lk(x_0, P)$ dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2. Il est clair qu'un automorphisme f de P envoie la fonction m du sommet x_0 sur la fonction m du sommet $f(x_0)$. Nous noterons G_{x_0} le groupe des automorphismes de $(lk(x_0, P), m)$ engendré par les fixateurs de facettes de $lk(x_0, P)$. Remarquons que si P est de dimension 2, alors m est constant (car tous les polygones ont le même nombre de côtés).

Voici maintenant deux propriétés de prolongement:

(P_0) Pour tout sommet x_0 de P, tout élément de G_{x_0} s'étend à P.

(P^+) Pour tout sommet x_0 de P, tout élément de G_{x_0} fixant une facette (voir définition 5.10) ϕ (transverse à une arête issue de x_0) s'étend à P en un automorphisme fixant le mur M passant par ϕ et fixant toute la moitié de P définie par M et ne contenant pas x_0.

Nous avons maintenant des conditions permettant d'identifier $\mathrm{Aut}^+(P)$ et $\mathrm{Aut}_0(P) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$, dans le cas où P est de dimension 2.

Proposition 5.23 *Soit P un complexe polyédral pair $\mathrm{CAT}(0)$ de dimension 2 admettant un type et dont deux chambres sont jointes par au moins une galerie.*

(1) *Supposons que, pour tout sommet x_0 de P, le stabilisateur dans G_{x_0} d'un sommet de $lk(x_0, P)$ agit transitivement sur les arêtes issues de ce sommet. Si P vérifie (P_0), alors $\mathrm{Aut}_0(P) \cap \mathrm{Aut}_F(P) = G_1$.*

(2) *Supposons que, pour tout sommet x_0 de P, pour toute arête a issue de x_0, l'ensemble $E(a)$ des polygones de P contenant a est de cardinal au moins trois, et que pour tout polygone c contenant a, le stabilisateur dans G_{x_0} de c agit transitivement sur $E(a)\setminus\{c\}$. Si P vérifie (P_0), alors $G_0 = G_1 = \mathrm{Aut}_0(P)\cap \mathrm{Aut}_F(P)$.*

(3) *Supposons que, pour tout sommet x_0 de P, toute arête c de $lk(x_0,P)$, et tout $f\in G_{x_0}$ fixant c, on a une décomposition $f=f_1\circ f_2$, où $f_1\in G_{x_0}$ fixe toute une facette de $lk(x_0,P)$ contenant une extrémité de c, et $f_2\in G_{x_0}$ fixe toute la facette de $lk(x_0,P)$ contenant l'autre extrémité de c. Supposons que la restriction d'un F-automorphisme fixant un sommet x_0 à $lk(x_0,P)$ est dans G_{x_0}. Si P vérifie (P^+) et si tous ses murs sont propres, alors $\mathrm{Aut}^+(P) = G_0$.*

Preuve Pour la première assertion, il suffit de remarquer que l'hypothèse, plus la propriété (P_0), entraînent la propriété (TL_1). On applique alors le lemme 5.22 précédent.

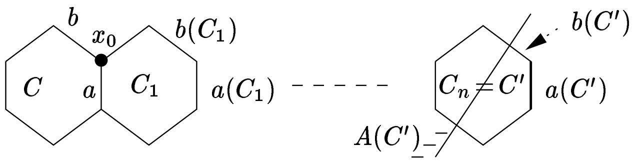
Pour la deuxième, par le lemme 5.22, il suffit de vérifier que P satisfait (TL_0). Soit a une arête de P contenues dans deux polygones c_1,c_2. Fixons un sommet x_0 de a et un troisième polygone c contenant a distinct de c_1,c_2. Par hypothèse, soit f dans G_{x_0} fixant c et envoyant c_1 sur c_2. La propriété (P_0) permet d'étendre f en un F-automorphisme de P, qui fixe a et c, et envoie c_1 sur c_2, ce qui montre (TL_0).

Montrons la troisième assertion. Comme $\mathrm{Aut}^+(P)$ est contenu dans le groupe engendré par les fixateurs de chambres, il suffit de montrer que pour toute chambre C de P, le groupe $\mathrm{Fix}(C)$ est contenu dans $\mathrm{Aut}^+(P)\cap\mathrm{Aut}_F(P)$. En fait, nous allons montrer que si $\overline{f}$ est dans $\mathrm{Fix}(C)$ et si a et b sont deux arêtes du polygone C adjacentes en un sommet x_0, alors il existe $\overline{f}_a$ et $\overline{f}_b$ fixant strictement les murs $M(a)$ et $M(b)$ tels que $\overline{f}=\overline{f}_b\circ\overline{f}_a$.

Affirmation 1 Il existe un automorphisme $\overline{f}_b$ de P fixant $M(b)$ et toute la moitié de P définie par $M(b)$ ne contenant pas x_0, tel que $\overline{f}$ coïncide avec $\overline{f}_b$ sur l'ensemble des chambres de P contenant l'arête a.

Preuve L'automorphisme $\overline{f}$ fixe x_0 et C, donc induit un automorphisme f de G_{x_0} fixant l'arête c entre les sommets du link correspondant aux arêtes a et b de P. Vu l'hypothèse sur P, il existe f_a et f_b dans G_{x_0} tels que $f=f_b\circ f_a$. D'après (P^+), on peut prolonger ces deux automorphismes locaux en éléments $\overline{f}_a$ et $\overline{f}_b$ fixant strictement les murs $M(a)$ et $M(b)$ (ainsi que les moitiés convenables). Maintenant l'égalité $\overline{f} = \overline{f}_b \circ \overline{f}_a$ sur l'étoile de x_0 entraîne $\overline{f} = \overline{f}_b$ sur l'ensemble des chambres de P contenant l'arête a, puisque $\overline{f}_a$ agit trivialement sur cet ensemble. □

Appelons *galerie géodésique de $M(a)$ d'origine* (C, a) toute galerie sans répétition $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ telle que $C_0 = C$, $C_0 \cap C_1 = a$, l'arête $C_i \cap C_{i+1}$ est parallèle à a et distincte de a_{i-1}. Comme $M(a)$ est un arbre, deux galeries géodésiques de $M(a)$ d'origine (C, a) et de mêmes extrémités sont égales. Nous noterons $\delta(C_n)$ la longueur n de cette galerie. Soit alors $\mathcal{B}_n^+(C)$ l'ensemble des polygones C' de P qui sont extrémités d'une galerie géodésique de $M(a)$



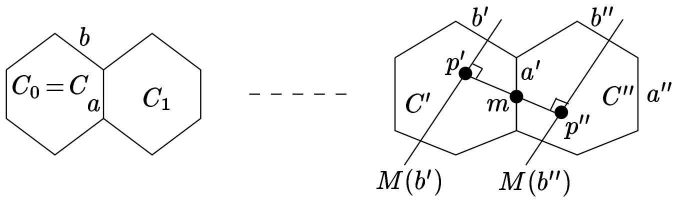
d'origine (C, a) de longueur au plus n. Nous noterons $a(C)$ l'arête a; pour $C' \in \mathcal{B}_n^+(C)$, avec $\delta(C') = n > 0$, soit $a(C')$ l'arête de C' parallèle à a, non contenue dans un polygone de $\mathcal{B}_{n-1}^+(C)$. Nous pouvons ensuite définir $b(C')$ comme l'arête de C' adjacente à $a(C')$, non séparée de b par $M(a) = M(a(C'))$.

Soient enfin $A(C')$ la moitié fermée de P définie par $M(b(C'))$ ne contenant pas $a(C')$, et $\mathcal{B}^+(C)$ l'union des $\mathcal{B}_n^+(C)$.

Affirmation 2 Les murs $M(b(C'))$ sont deux à deux disjoints; la moitié $A(C')$ contient strictement le mur $M(b(C''))$ (donc la chambre C''), dès que la galerie géodésique de $M(a)$ d'origine (C, a) et d'extrémité C'' ne passe pas par C'.

Preuve Prouvons d'abord que $M(b(C')) \cap M(b(C'')) = \emptyset$, lorsque C' et C'' sont deux chambres de $\mathcal{B}^+(C)$ telles que $C' \cap C''$ est une arête, et $\delta(C') \neq \delta(C'')$. Nous pouvons supposer les notations telles que l'arête a' commune à C' et C'' est l'arête $a(C')$ (autrement dit, $\delta(C') < \delta(C'')$). Pour alléger, nous notons alors a'', b' et b'' les arêtes $a(C'')$, $b(C')$ et $b(C'')$. Pour voir que $M(b') \cap M(b'') = \emptyset$, il suffit de voir que les deux murs ont une perpendiculaire commune (dans $C' \cup C''$): l'inégalité $\mathrm{CAT}(0)$ permet alors de conclure.

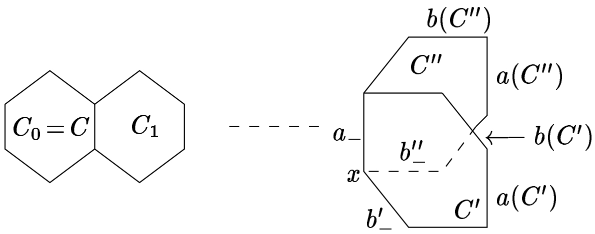
Soient m le milieu de a', et p' (resp: p'') la projection orthogonale de m sur $M(b')$ (resp: $M(b'')$). Alors p' s'obtient comme l'intersection avec $M(b', C')$ de la géodésique de C' joignant m à son image par $\sigma(b', C')$. En particulier, P' est à l'intérieur de C', et $p'' \neq p'$. Il reste à montrer que la géodésique de P joignant p' et p'' passe par m.



La réunion de C' et C'' admet deux réflexions orthogonales: $\sigma_{a'}$ qui échange les extrémités de a', et $\rho_{a'}$ qui fixe a' en échangeant les deux chambres C' et C'' (rappelons que P admet un type). Il est alors immédiat que la symétrie centrale $\rho_{a'} \circ \sigma_{a'}$ envoie $M(b', C')$ sur $M(b'', C'')$ en fixant m, donc envoie le segment le m à p' sur le segment de m à p'', de sorte que l'union de ces deux segments est encore une géodésique.

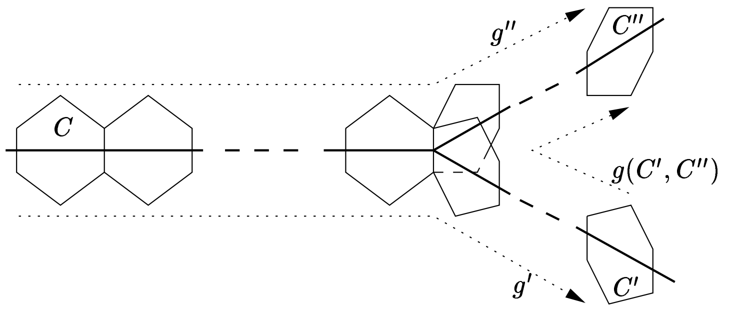
Il est maintenant clair que, si $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ est une galerie géodésique de $M(a)$ d'origine (C, a), la suite des demi-espaces fermés $A(C_i)$ est strictement croissante. En particulier, $A(C_n)$ contient strictement les murs $M(b(C_i))$, pour $0 \leq i < n$.

Montrons maintenant que $M(b(C')) \cap M(b(C'')) = \emptyset$, lorsque C' et C'' sont deux chambres de $\mathcal{B}^+(C)$ telles que $C' \cap C''$ est une arête, et $\delta(C') = \delta(C'')$. Dans ce cas, l'arête a_- formant $C' \cap C''$ est opposée à $a(C')$ et $a(C'')$ dans C' et C'' respectivement. Il existe alors deux arêtes b'_- et b''_- de C' et C'', opposées à $b(C')$ et $b(C'')$ respectivement, donc adjacentes à a_- en un sommet x, avec $M(b'_-) = M(b(C'))$ et $M(b''_-) = M(b(C''))$.



Pour montrer que ces deux murs sont disjoints, on exhibe là aussi une perpendiculaire commune. Auparavant, on modifie la métrique CAT(0) sur P, en rendant tous les polygones de P réguliers à angle droit (donc hyperboliques, sauf si au départ on avait des carrés). La nouvelle métrique est bien encore CAT(0) (et même souvent CAT(-1)), puisque tous les links de P sont des graphes bipartis (P admet un type), donc ont des circuits de longueur au moins 4. Alors $b'_- \cup b''_-$ est géodésique même en x, et perpendiculaire aux deux murs.

Il est alors évident que $A(C')$ contient strictement la moitié fermée de P définie par $M(b(C''))$ et contenant $a(C'')$ (i.e. dont la réunion avec $A(C'')$ est P entier).



Pour achever la preuve de l'affirmation, soient C' et C'' deux chambres distinctes de $B^+(C)$, telles que la galerie géodésique de $M(a)$ d'origine (C, a) et d'extrémité C'' ne passe pas par C'. Si g' et g'' sont les galeries géodésiques de $M(a)$ d'origine (C, a) et d'extrémité C' et C'' respectivement, la galerie $g(C', C'')$ obtenue à partir de $g'^{-1}.g''$ en ôtant les répétitions permet, compte tenu des résultats préliminaires ci-dessus, de construire une suite strictement décroissante de moitiés fermées dont la première est $A(C')$ et la dernière est la moitié complémentaire de $A(C'')$. Ceci conclut. $\square$

Revenons à la preuve de la proposition. Pour $\overline{f} \in \mathrm{Fix}(C) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$, supposons avoir construit $\overline{f}_b^n$ fixant strictement le mur $M(b)$, et coïncidant avec $\overline{f}$ sur chaque chambre de $\mathcal{B}_n^+(C)$ (c'est vrai pour $n = 1$, d'après l'affirmation 1). Alors $(\overline{f}_b^n)^{-1} \circ \overline{f}$ agit trivialement sur chaque chambre de $\mathcal{B}_n^+(C)$. Soient $C^1, \ldots, C^k$ les chambres de $\mathcal{B}^+(C)$ avec $\delta(C^i) = n$. En appliquant l'affirmation 1 à la chambre C^1, aux arêtes $a(C^1)$ et $b(C^1)$, on trouve $\overline{f}^1$ fixant toute la moitié $A(C^1)$ et coïncidant avec $(\overline{f}_b^n)^{-1} \circ \overline{f}$ sur l'ensemble des chambres contenant $a(C^1)$. D'après l'affirmation 2, $\overline{f}^1$ fixe strictement le mur $M(b)$, agit trivialement sur toutes les chambres de $\mathcal{B}_n^+(C)$, et même sur les chambres de $\mathcal{B}^+(C)$ adjacentes à $C^2, C^3, \ldots$ ou C^k. Alors $(\overline{f}^1)^{-1} \circ (\overline{f}_b^n)^{-1} \circ \overline{f}$ agit trivialement sur chaque chambre de $\mathcal{B}_n^+(C)$, et sur chaque chambre contenant $a(C^1)$. En réutilisant les affirmations 1 et 2, on trouve des automorphismes $\overline{f}^2, \overline{f}^3, \ldots, \overline{f}^k$ fixant tous strictement $M(b)$, tels que $\overline{f}_b^{n+1} = \overline{f}_b^n \circ \overline{f}^1 \circ \overline{f}^2 \circ \ldots \circ \overline{f}^k$ agit comme $\overline{f}$ sur $\mathcal{B}_{n+1}^+(C)$. L'automorphisme $\overline{f}_b^{n+1}$ fixe strictement $M(b)$ et coïncide avec $\overline{f}$ sur chaque chambre de $B_{n+1}^+(C)$. En itérant ce processus, et quitte à extraire une sous-suite convergente, on trouve à la limite un $\overline{f}_b^+$ fixant strictement le mur $M(b)$ et coïncidant avec $\overline{f}$ sur chaque chambre de $\mathcal{B}^+(C)$. On peut imposer que $\overline{f}_b^+$ fixe point par point la moitié de P définie par $M(b)$ et ne contenant pas a.

En appliquant la construction précédente sur l'autre moitié de $M(b)$, on trouve un $\overline{f}_b^-$ coïncidant avec $\overline{f}$ sur chaque chambre de $\mathcal{B}^-(C)$, et fixant point par point la moitié de P définie par $M(b)$ et contenant a. Si on pose $\overline{f}_b = \overline{f}_b^+ \circ \overline{f}_b^-$ et $\overline{f}_a = (\overline{f}_b)^{-1} \circ \overline{f}$, on a $\overline{f} = \overline{f}_b \circ \overline{f}_a$, avec $\overline{f}_b$ fixant strictement le mur $M(b)$, et $\overline{f}_a$ fixant strictement le mur $M(a)$. □

Soit k un entier pair au moins 4 et L un graphe fini de maille au moins 5 si $k = 4$ et 4 si $k \geq 6$. Pour tout bloc B de $A(k,L)$ (au sens de la définition 5.10), notons F_B le sous-groupe caractéristique des automorphismes de B engendré par les fixateurs de facettes dans B. En fait, si x est le centre du bloc B, alors $F_B = G_x$ avec les notations précédant la proposition 5.23. Remarquons que $W(k,L)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_F A(k,L)$.

Lemme 5.24 *Soit B_0 un bloc de $A(k,L)$. Si $\rho = \rho_{B_0}$ désigne le morphisme de restriction de* $\mathrm{Stab}(B_0, \mathrm{Aut}A(k,L))$ *dans* $\mathrm{Aut}(B_0)$, *alors*

$$\rho(\mathrm{Stab}(B_0, \mathrm{Aut}_F A(k,L))) = F_{B_0}.$$

Preuve Pour tout bloc B de $A(k,L)$, notons $\underline{F}_B$ l'image réciproque de F_B par ρ_B. Par le prolongement $W(k,L)$-équivariant (voir les remarques avant la définition 5.10), on a $\rho_B(\underline{F}_B) = F_B$.

D'autre part, si $\overline{F}_B$ est le stabilisateur de B dans $\mathrm{Aut}_F A(k,L)$, alors $\underline{F}_B \subset \overline{F}_B$. En effet, si $\hat{\varphi} \in \underline{F}_B$, par définition $\rho_B(\hat{\varphi})$ s'écrit $\rho_B(\hat{\varphi}) = \varphi_1 \cdots \varphi_n$, où les φ_i sont des automorphismes de B fixant une facette de B. Comme $\rho_B(\underline{F}_B) = F_B$, il existe $\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_n$ éléments de $\underline{F}_B$ prolongeant les φ_i. On a donc $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1 \cdots \hat{\varphi}_n \varepsilon$, où ε vaut l'identité sur B. Chaque terme de la décomposition fixant une facette de B, on a $\hat{\varphi} \in \mathrm{Aut}_F A(k,L)$.

Pour montrer l'inclusion réciproque $\underline{F}_{B_0} \supset \overline{F}_{B_0}$, introduisons le sous-groupe H de $\mathrm{Aut}A(k,L)$ engendré par $W(k,L)$ et $\underline{F}_{B_0}$. Nous allons d'abord montrer que $H = \mathrm{Aut}_F A(k,L)$, puis que $\mathrm{Stab}(B_0, H) = \underline{F}_{B_0}$, ce qui achèvera la preuve du lemme.

D'abord, comme $\underline{F}_{B_0} \subset \overline{F}_{B_0}$ et $W(k,L) \subset \mathrm{Aut}_F(A(k,L))$, on a bien $H \subset \mathrm{Aut}_F A(k,L)$. Réciproquement si f est un automorphisme de $A(k,L)$ fixant une facette ϕ, il existe w dans $W(k,L)$ tel que $w(\phi) \subset B_0$. Alors l'automorphisme wfw^{-1} fixe une facette ϕ' de B_0. Si s désigne la réflexion de

$W(k,L)$ par rapport au mur passant par cette facette, il existe un $k \in \{0,1\}$ tel que $s^k w f w^{-1}$ préserve B_0 et fixe une facette ϕ' de B_0, donc est dans $\underline{F}_{B_0}$. Ainsi $f \in H$, et H contient $\mathrm{Aut}_F A(k,L)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Stab}(B_0,H) = \underline{F}_{B_0}$, c'est-à-dire $\mathrm{Stab}(B_0,H) \subset \underline{F}_{B_0}$. Si nous vérifions que tout $h \in H$ peut s'écrire $h = wf$, avec $w \in W(k,L)$ et $f \in \underline{F}_{B_0}$, alors on aura $h(B_0) = B_0$ implique $w = 1$, donc $h \in \underline{F}_{B_0}$. Pour établir que H coïncide avec l'ensemble H' des automorphismes f de $A(k,L)$ tels que $w_0^{-1} f \in \underline{F}_{B_0}$, pour w_0 l'unique élément de $W(k,L)$ tel que $w_0(B_0) = f(B_0)$, introduisons l'ensemble H'' des automorphismes f de $A(k,L)$ tels que, pour tout bloc B, $w^{-1} f \in \underline{F}_B$, avec w l'unique élément de $W(k,L)$ tel que $w(B) = f(B)$. Il est clair que H'' est un sous-groupe de H contenu dans H'. Pour conclure, montrons que $H'' = H$. Comme $W(k,L) \subset H''$, il suffit de montrer que $\underline{F}_{B_0} \subset H''$, ce qui découle de l'affirmation suivante: si $w_1^{-1} f$ est dans $\underline{F}_{B_1}$ et si $B_1 \cap B_2$ est une facette ϕ, alors $w_2^{-1} \circ f$ est dans $\underline{F}_{B_2}$ (avec $w_i(B_i) = f(B_i) = B_i'$). Pour voir ceci, soit s (resp. s') la réflexion de $W(k,L)$ échangeant B_1 et B_2 (resp. B_1' et B_2'), alors $w_2 = s' w_1 s$. Posons $\varepsilon_i = w_i^{-1} f$. Par hypothèse sur l'automorphisme f, on a ε_1 est dans $\underline{F}_{B_1}$. Donc $s\varepsilon_1 s$ est dans $\underline{F}_{B_2}$. Or $(s\varepsilon_1 s)^{-1}\varepsilon_2 = s f^{-1} w_1 s s w_1^{-1} s' f = s f^{-1} s' f$. Ce dernier automorphisme fixe la facette ϕ et préserve le bloc B_2, donc est lui aussi dans $\underline{F}_{B_2}$, ce qui conclut. □

Appelons *facette de* L l'étoile d'un sommet de L dans la subdivision barycentrique L'. Soit F le sous-groupe caractéristique de $\mathrm{Aut}(L)$ engendré par les fixateurs de facettes de L. Si L est le graphe biparti complet sur $p+q$ sommets avec $p,q \geq 3$, alors $\mathrm{Aut}_0(L) (\simeq S_p \times S_q) = F$.

Corollaire 5.25 *Le quotient de* $\mathrm{Aut}A(k,L)$ *par son sous-groupe distingué* $\mathrm{Aut}_F A(k,L)$ *est isomorphe au quotient de* $\mathrm{Aut}(L)$ *par son sous-groupe distingué* F.

Preuve Le groupe $\mathrm{Aut}A(k,L)$ est transitif sur les sommets de $A(k,L)$ car $W(k,L)$ l'est. Donc pour tout sommet x_0, centre du bloc B_0, le quotient $\mathrm{Aut}A(k,L)/\mathrm{Aut}_F A(k,L)$ est isomorphe à $\mathrm{Fix}\ x_0/\mathrm{Fix}\ x_0 \cap \mathrm{Aut}_F A(k,L)$. Par restriction, on a un morphisme $\mathrm{Fix}\ x_0 \to \mathrm{Aut}(B_0)$, qui est surjectif par le paragraphe précédant la définition 5.10. Son noyau est contenu dans $\mathrm{Fix}\ x_0 \cap \mathrm{Aut}_F A(k,L)$. De plus, par le lemme précédent, l'image de $\mathrm{Fix}\ x_0 \cap \mathrm{Aut}_F A(k,L)$ est exactement F_{B_0}. Donc $\mathrm{Fix}\ x_0/\mathrm{Fix}\ x_0 \cap \mathrm{Aut}_F A(k,L)$ est isomorphe au quotient $\mathrm{Aut}(B_0)/F_{B_0}$. □

Soit G un groupe de Chevalley fini de rang 2, sur le corps fini K, de système de racines Φ, de racines fondamentales α_1, α_2, de racines positives Φ^+ et de groupes de racines

$$X_\alpha = \{x_\alpha(t) \,/\, t \in K\}$$

pour $\alpha \in \Phi$. Nous utiliserons les notations de [12]. En particulier, U est le sous-groupe de G engendré par les racines positives. On a un morphisme $h : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2, K^\times) \to \mathrm{Aut}(G)$ qui, à un caractère χ du réseaux des racines à valeurs dans le groupe multiplicatif de K, associe l'automorphisme de G induit par l'automorphisme

$$h(\chi) : x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(\chi(\alpha)t)$$

sur chaque groupe de racine de G. On rappelle (voir [12]) que G est sans centre, est engendré par les groupes de racines X_α, et que chaque racine est combinaison linéaire à cœfficients entiers (tous du même signe) de α_1, α_2.

On identifie G à son image dans $\mathrm{Aut}(G)$ par les automorphismes intérieurs. On note $\widehat{H}$ l'image de h, $H = G \cap \widehat{H}$ et $B = UH$. Il existe alors (voir [12, page 101]) un sous-groupe N de G tel que (B, N) est une BN-paire de G. Soit L le m-gone généralisé associé à cette BN-paire, muni de son action de G, de sa chambre fondamentale c de fixateur B, et de son appartement fondamental Σ de fixateur H [12, page 102]. On identifie Φ avec l'ensemble des demi-appartements de Σ, de sorte que Φ^+ corresponde à ceux contenant c, et que X_α soit le fixateur de la réunion de α et des arêtes de L rencontrant α en un sommet intérieur de α.

Notons que $\widehat{H}$ préserve chaque groupe de racine X_α. Par conséquent, il agit sur L en fixant Σ (et en particulier en préservant le type). Pour $i = 1, 2$, notons x_i le sommet de c appartenant au bord de α_i, c_i la chambre de Σ adjacente à c en x_i, et ϕ_i la facette de L de centre x_i. Les arêtes de ϕ_i sont les moitiés contenant x_i des chambres disjointes $\{c\} \cup \{x_{\alpha_i}(t)c_i \,/\, t \in K\}$, car X_{α_i} agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres contenant x_i différentes de c. Tout caractère $\chi : \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \to K^\times$ s'écrit comme un produit de caractères $\chi_1\chi_2$ avec χ_i valant 1 sur α_i. Comme h est un morphisme, on a donc $h(\chi) = h(\chi_1)h(\chi_2)$. De plus $h(\chi_i)$ fixe ϕ_i par la description précédente.

Proposition 5.26 *Si F est le sous-groupe caractéristique de* $\mathrm{Aut}(L)$ *engendré par les fixateurs de facettes de L, alors*

(1) $F = G\widehat{H}$,

(2) *Le fixateur* $\mathrm{Fix}_F(c)$ *de c dans F est* $U\widehat{H}$,

(3) $\mathrm{Aut}_0(L)/F$ *est isomorphe au groupe* $\mathrm{Aut}(K)$ *des automorphismes du corps* K.

Preuve (1) D'après les rappels précédents, l'inclusion de $G\widehat{H}$ dans F est claire. Soit ϕ une facette de L et f un automorphisme de L fixant ϕ. On veut montrer que f appartient à $G\widehat{H}$. Quitte à composer à gauche par un élément de G, on peut supposer que f fixe Σ et l'une des facettes ϕ_1 ou ϕ_2, disons ϕ_1. Comme f préserve ϕ_2 en fixant c et c_2, on peut écrire

$$f(x_{\alpha_2}(1)c_2) = x_{\alpha_2}(\xi)c_2$$

pour un certain ξ dans $K - \{0\}$. Soit χ le caractère qui à α_1 associe 1 et à α_2 associe ξ. Montrons alors que $f = h(\chi)$. Posons $\theta = h(\chi)^{-1}f$. C'est un automorphisme de L fixant Σ, ϕ_1 et $x_{\alpha_2}(1)c_2$. Notons que θ normalise G, et notons encore θ l'automorphisme de G induit. Alors θ préserve chaque X_α, $\theta(x_{\alpha_1}(t)) = x_{\alpha_1}(t)$ pour tout $t \in K$ et $\theta(x_{\alpha_2}(1)) = x_{\alpha_2}(1)$. Il découle de la preuve du théorème 12.5.1 de [12, page 211] que l'ensemble des automorphismes θ de G qui préservent chaque X_α, et fixent $x_{\alpha_i}(1)$ pour $i = 1, 2$, est un sous-groupe de G isomorphe à $\mathrm{Aut}(K)$, et que si de plus $\theta(x_{\alpha_1}(t)) = x_{\alpha_1}(t)$ pour tout $t \in K$, alors θ vaut l'identité.

(2) L'inclusion de $U\widehat{H}$ dans $\mathrm{Fix}_F(c)$ est claire. Réciproquement, soit f dans F fixant c. Alors $f = g\widehat{f}$ avec $g \in G$ et $\widehat{f} \in \widehat{H}$ par (1). Comme $\widehat{f}$ fixe c, on en déduit que g fixe c. Or le fixateur de c dans G est $B = UH$, et comme $H \subset \widehat{H}$, le résultat en découle.

(3) Il est clair que F est contenu et distingué dans $\mathrm{Aut}_0(L)$. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}_0(L)$. Quitte à le multiplier par un élément de G, on peut supposer que θ fixe Σ. Quitte à le multiplier par un élément de $\widehat{H}$, on peut supposer que θ fixe $x_{\alpha_i}(1)$ pour $i = 1, 2$. Soit Z le fixateur dans $\mathrm{Aut}_0(L)$ de $\Sigma \cup \{x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1)\}$. On a donc un isomorphisme entre $\mathrm{Aut}_0(L)/F$ et $Z/Z \cap F$. Or si $f = g\widehat{f}$ fixe Σ, avec $g \in G$ et $\widehat{f} \in \widehat{H}$, alors g fixe Σ. Donc g appartient au fixateur de Σ dans G, qui est H. Par conséquent $f \in \widehat{H}$. Or un élément $h(\chi)$ de $\widehat{H}$ fixant $x_{\alpha_1}(1)$ et $x_{\alpha_2}(1)$ vaut l'identité, car on aurait $\chi(\alpha_1) = 1$ et $\chi(\alpha_2) = 1$. D'où $Z \cap F = \{1\}$, ce qui montre le résultat, Z étant isomorphe à $\mathrm{Aut}(K)$, d'après le dernier argument de (1). □

Corollaire 5.27 *Pour* $i = 1, 2$, *soit* F_i *le fixateur de la facette* ϕ_i *dans* $\mathrm{Aut}(L)$. *Alors*

$$\mathrm{Fix}_F(c) = F_1F_2 = F_2F_1.$$

Preuve L'égalité $F_1F_2 = F_2F_1$ vient du fait que F_1 et F_2 fixent $c = \phi_1 \cap \phi_2$ donc F_i préserve ϕ_{3-i}. L'inclusion de F_1F_2 dans $\mathrm{Fix}_F(c)$ est claire. Pour montrer l'inclusion inverse, comme $\mathrm{Fix}_F(c) = U\widehat{H}$, il suffit de le faire pour U et pour $\widehat{H}$. Or U est engendré par les X_α pour α racine positive, et un tel X_α est contenu soit dans F_1, soit dans F_2. De plus, on a vu avant la proposition 5.26 que pour tout caractère χ, $h(\chi) = h(\chi_1)h(\chi_2)$ avec $h(\chi_i)$ fixant ϕ_i. □

Corollaire 5.28 *Si L est un m–gone généralisé épais fini classique, alors le groupe $\mathrm{Aut}_0 A(k,L) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$ des F-automorphismes préservant le type de $A(k,L)$, coïncide avec le groupe $\mathrm{Aut}^+ A(k,L)$ des automorphismes de $A(k,L)$ engendré par les fixateurs stricts de murs propres, et est distingué dans $\mathrm{Aut}_0 A(k,L)$, de quotient trivial si $m = 2$, et sinon isomorphe au groupe fini des automorphismes de corps du corps fini de définition de L.*

Preuve Nous allons vérifier les hypothèses de la proposition 5.23 (2) et (3) pour montrer que $\mathrm{Aut}^+ A(k,L) = G_0 = \mathrm{Aut}_0(P) \cap \mathrm{Aut}_F(P)$. Puisque $A(k,L)$ est un immeuble, il admet un type. Puisque $A(k,L)$ est la réalisation géométrique de Davis–Moussong d'un système de Coxeter, il vérifie la propriété (P^+). Tous ses murs sont propres par le lemme 4.18. Par hypothèse, L est épais et de Moufang, et pour tout sommet x_0 de $A(k,L)$, le bord du bloc de centre x_0 s'identifie avec L, donc l'hypothèse de 5.23 (2) est vérifiée.

Par le lemme 5.24, si ρ est le morphisme de restriction à un bloc B_0 de centre x_0 des automorphismes de $A(k,L)$ fixant x_0, alors l'image I par ρ du fixateur de x_0 dans $\mathrm{Aut}_F A(k,L)$ est exactement G_{x_0}. L'inclusion de G_{x_0} dans I montre la propriété (P_0) et l'inclusion réciproque montre la deuxième hypothèse de 5.23 (3).

La première hypothèse de 5.23 (3) découle du corollaire 5.27 si $m \geq 3$, et est claire si $m = 2$.

Enfin, par le corollaire 5.25 et la proposition 5.26 (3) si $m \geq 3$, le quotient $\mathrm{Aut}_0 A(k,L)/\mathrm{Aut}^+ A(k,L)$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(K)$. □

6 Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à murs

Théorème 6.1 *Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace à murs hyperbolique, de graphe associé $\mathcal{G}$, et G un groupe d'automorphismes de $(X, \mathcal{M})$, dont l'action sur $\mathcal{G}$ est non élémentaire, d'ensemble limite égal à $\partial\mathcal{G}$. Supposons que G vérifie la* *condition* (P). *Soit* G^+ *le sous-groupe de* G *engendré par les fixateurs stricts de murs propres et* H *un sous-groupe distingué de* G^+. *Alors ou bien* H *est contenu dans le noyau de l'action de* G^+ *sur* $\partial\mathcal{G}$, *ou bien* H *est égal à* G^+.

Corollaire 6.2 *Si l'action de* G^+ *sur* $\partial\mathcal{G}$ *est fidèle, alors* G^+ *est simple.* □

Remarquons que le sous-groupe G^+ est distingué dans G, et qu'il peut être trivial.

Preuve Soit H un sous-groupe distingué non trivial de G^+. Supposons que H n'est pas contenu dans le noyau de l'action de G^+ sur $\partial\mathcal{G}$. Rappelons que X est le sous-ensemble des sommets de $\mathcal{G}$.

Lemme 6.3 *Pour tout demi-espace* A *avec* $\partial X \setminus \partial A$ *non vide, il existe une chaîne propre* $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *et un élément* h *dans* H *tels que* $A \subset A_0 \setminus A_1$, $h(A_i) = A_{i+1}$ *pour tout* i.

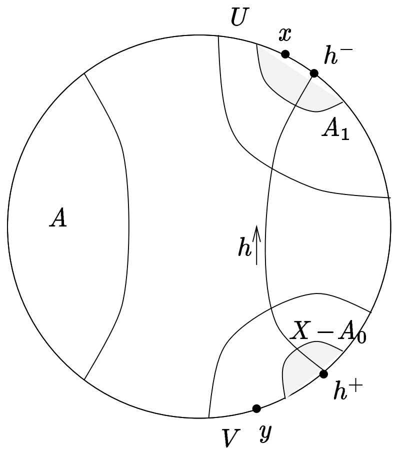


Figure 8: Construction de chaîne invariante par un élément hyperbolique

Preuve Puisque $\Lambda G = \partial\mathcal{G}$ n'a pas de point isolé (G est non élémentaire), et par la condition (H), il existe (voir figure 8):

- x, y deux points distincts dans l'ouvert $\partial X \setminus \partial A = (\overline{X} \setminus \overline{A}) \cap \partial X$ de ∂X,
- U, V deux ouverts disjoints de $\overline{X}$, contenus dans $\overline{X} \setminus \overline{A}$ et contenant respectivement x, y,

- A_1 un demi-espace contenu dans U, avec $\overline{A_1}$ un voisinage de x, et dont le mur est propre.

Par une application double du lemme 2.1 (à $G^+ \subset G$ et à $H \subset G^+$), les couples des points fixes d'éléments hyperboliques de H sont denses dans $\partial^2\mathcal{G}$. Soit donc h un élément hyperbolique de H dont un point fixe au bord est contenu dans l'intérieur de ∂A_1, et l'autre dans V. Quitte à remplacer h par une puissance suffisamment grande (en valeur absolue), pour que $h(A_1)$ soit strictement contenu dans A_1 et que $h^{-1}(X \setminus A_1)$ soit contenu dans V, la suite de demi-espaces $(h^{i-1}(A_1))_{i\in\mathbb{Z}}$ est une chaîne. Le lemme est alors facile à vérifier. □

Lemme 6.4 *Soient $h \in H$ et $C = (A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une chaîne propre tels que $h(A_i) = A_{i+1}$ pour tout i. Pour tout $g \in G$ fixant strictement C, il existe $f \in G^+$ tel que $g = [h, f]$.*

Preuve On note $[u,v] = uvu^{-1}v^{-1}$. Soient h, g comme dans l'énoncé. Si $u \in G$ fixe strictement les $M_i = \{A_i, X \setminus A_i\}$, notons u_i la restriction de u à $A_i \setminus A_{i+1}$. Alors $g = [h, f]$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$g_i = hf_{i-1}h^{-1}f_i^{-1}$$

ou encore

$$f_i = g_i^{-1}hf_{i-1}h^{-1}.$$

Posons f_0 la restriction à $A_0 \setminus A_1$ de l'identité de G. Alors la relation de récurrence ci-dessus (ou $f_{i-1} = h^{-1}g_if_ih$ pour les i strictement négatifs) permet de définir une application f_i sur $A_i \setminus A_{i+1}$, qui est par récurrence restriction à $A_i \setminus A_{i+1}$ d'un élément $\tilde{f_i}$ de G fixant strictement C. En effet, le fixateur strict de C, qui contient $\tilde{f}_{i-1}$, est distingué dans le stabilisateur de C (qui contient h). Par la propriété (P), il existe un élément f dans G fixant strictement C, dont les restrictions sont les f_i, et la remarque préliminaire montre que $g = [h, f]$.

Par définition, le fixateur strict dans G d'une chaîne propre est contenu dans G^+. Ceci conclut la preuve. □

Corollaire 6.5 *Le groupe H contient le fixateur strict dans G de tout mur propre.*

Preuve Soit $M = \{A, X \setminus A\}$ un mur propre, donc tel que $\partial X \setminus \partial A$ est non vide. Soit $g \in G$ fixant strictement M. Par le lemme 3.4, pour montrer que g

appartient à H, il suffit de le montrer en supposant de plus que g fixe (point par point) $X\backslash A$. Par le lemme 6.3, il existe $h \in H$ et une chaîne propre $C = (A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que $h(A_i) = A_{i+1}$ et $A \subset A_0 \backslash A_1$. En particulier g fixe strictement C. Par le lemme 6.4, il existe f dans G^+ tel que $g = [h, f] = h(fh^{-1}f^{-1})$. Comme H est distingué dans G^+, il contient g, d'où le résultat. □

Le corollaire 6.5 démontre le théorème. □

7 Applications

Théorème 7.1 *Soit P un complexe polyédral pair* CAT(0), *dont la métrique est hyperbolique au sens de Gromov, dont le groupe des automorphismes est non élémentaire et d'ensemble limite égal à ∂P. Soit* $\mathrm{Aut}^+(P)$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(P)$ *engendré par les fixateurs stricts de murs propres et H un sous-groupe distingué de* $\mathrm{Aut}^+(P)$. *Alors ou bien H est contenu dans le noyau de l'action de G sur $\partial\mathcal{G}$, ou bien H est égal* à $\mathrm{Aut}^+(P)$.

Preuve D'après le théorème 4.17, l'espace à murs $(X_P, \mathcal{M}_P)$ associé à P est un espace à murs hyperbolique, et le bord de P s'identifie au bord du graphe associé à $(X_P, \mathcal{M}_P)$. D'après le théorème 5.1, le groupe des automorphismes de P (resp. le groupe engendré par les fixateurs stricts de murs propres de P) coïncide avec le groupe G des automorphismes de l'espace à murs $(X_P, \mathcal{M}_P)$ (resp. le groupe engendré par les fixateurs stricts de murs propres de $(X_P, \mathcal{M}_P)$). Par le lemme 5.9, l'espace à murs $(X_P, \mathcal{M}_P)$ vérifie la condition (M$'$). Donc G vérifie la condition (P) par le lemme 3.5. Le résultat découle alors du théorème 6.1. □

Corollaire 7.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent:*

(1) *Si P est localement compact alors H est relativement compact, ou égal* à Aut^+P.

(2) *Si le seul élément de* Aut^+P *agissant trivialement sur le bord de P est l'identité, alors* Aut^+P *est simple.*

(3) *Si P est* CAT(-1) *et tout point de P est contenu dans une droite géodésique, alors* Aut^+P *est simple.*

Preuve Si H est contenu dans le noyau de l'action sur le bord, et si P est localement compact, alors par le lemme 2.2, H est relativement compact.

Sinon, par le théorème précédent on a $H = \mathrm{Aut}^+P$, ce qui montre (1) et (2). L'assertion (3) découle de (2) par le lemme 2.2, car puisque $\mathrm{Aut}(P)$ est non élémentaire, d'ensemble limite égal à tout $\partial\mathcal{G}$, il n'y a pas de point isolé dans $\partial\mathcal{G}$. □

Le théorème 1.4 de l'introduction découle de ce corollaire et de la remarque précédant le lemme 2.2.

Corollaire 7.3 *Soit (W,S) un système de Coxeter, avec W hyperbolique au sens de Gromov. Alors le quotient, par son sous-groupe distingué localement compact formé des éléments fixant l'infini, du sous-groupe G^+ des automorphismes du graphe de Cayley de (W,S) engendré par les fixateurs stricts de murs propres, est simple. Il est non trivial (et donc non dénombrable) si et seulement si (W,S) est non rigide.*

Preuve D'après la remarque (1) de la section 4.2, le complexe polyédral $|W|_0$ est pair. Il est localement compact, et W agit discrètement avec quotient compact sur lui. Le résultat de simplicité découle du théorème précédent. La dernière assertion découle du théorème 5.12, la non trivialité de $\mathrm{Aut}^+|W|_0$ impliquant sa non dénombrabilité par le lemme 3.6. □

Le théorème 1.3 de l'introduction découle de ce corollaire, car le groupe des automorphismes du graphe de Cayley de (W,S) s'identifie avec le groupe des automorphismes polyédraux de la réalisation géométrique au sens de Davis–Moussong de (W,S) (voir section 5.1).

Pour terminer, démontrons les théorèmes 1.1 et 1.2 de l'introduction. Par le lemme 5.28, le groupe des F-automorphismes préservant le type des immeubles hyperboliques $A(k,L)$ coïncide avec le groupe engendré par les fixateurs strict de murs propres, est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}_0 A(k,L)$ et est simple par le corollaire 7.2 (3). Comme L est non rigide (par exemple si $m \geq 3$, un groupe de racine est non trivial et fixe l'étoile d'un sommet), il est non dénombrable, par le lemme 3.6. Il est évidemment fermé dans le groupe de tous les automorphismes, donc est localement compact.

Enfin, pour montrer que $\mathrm{Aut}^+A(k,L)$ est non linéaire, il suffit, par le théorème de Schur–Kaplansky (voir par exemple [18, page 154]), de montrer qu'il contient un sous-groupe de type fini, de torsion et infini. Supposons que k est multiple de 4 et que L est ou bien un graphe biparti complet $K_{p,p'}$, ou l'immeuble sphérique d'un groupe de Chevalley fini sur un corps F_q de caractéristique p différente de 2. En utilisant les méthodes de l'affirmation 2 de la proposition 5.23, il est alors possible de montrer que G contient une copie du p–groupe infini à deux générateurs τ, α de Grigorchuk–Gupta–Sidki (voir [2, page 19]).

Bibliographie

[1] **E M Andreev**, *On convex polyhedra in Lobachevskii space*, Math. USSR Sb. 12 (1970) 413–440

[2] **G Baumslag**, *Topics in Combinatorial Group Theory*, Lectures in Math. Birkhauser (1993)

[3] **W Ballmann**, **M Brin**, *Polygonal complexes and combinatorial group theory*, Geom. Dedicata 50 Série I (1994) 165-191

[4] **N Benakli**, *Polygonal complexes I: Combinatorial and geometric properties*, J. Pure Appl. Alg. 97 (1994) 247–263

[5] **N Bourbaki**, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4,5,6, Hermann, Paris (1968)

[6] **M Bourdon**, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ espace*, L'Ens. Math. 41 (1995) 63–102

[7] **M Bourdon**, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, GAFA 7 (1997) 245–268

[8] **M R Bridson**, *Geodesics and curvature in metric simplicial complexes*, dans: "Group theory from a geometrical viewpoint" (E Ghys, A Haefliger, A Verjovsky, editeurs) World Scientific (1991) 373–463

[9] **M R Bridson**, **A Haefliger**, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. 319, Springer–Verlag (1998)

[10] **K Brown**, *Buildings*, Springer–Verlag (1989)

[11] **M Burger**, **S Mozes**, *Finitely presented simple groups and products of trees*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 324 (1997) 747–752

[12] **R W Carter**, *Simple groups of Lie type*, Pure Appl, Math. 28, Wiley (1972)

[13] **C Champetier**, *L'espace des groupes de type fini*, à paraître dans Topology

[14] **R Charney**, **M Davis**, *Singular metrics of nonpositive curvature on branched covers of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 115 (1993) 929–1009

[15] **M Davis**, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Annals of Math. 117 (1983) 293–324

[16] **M Davis**, *Negative curvature and reflection groups*, to appear in Handbook of Geometric Topology

[17] **M Davis**, **T Januszkiewicz**, **R Scott**, *Nonpositive curvature of blow-ups*, to appear in Selecta Math.

[18] **J Dixon**, *The structure of linear groups*, Van Nostrand (1971)

[19] **D Gaboriau**, **F Paulin**, *Sur les immeubles hyperboliques*, prépublication 18, Univ. Orsay (Janv 1998)

[20] **E Ghys**, **P de La Harpe**, editeurs, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Prog. in Math. 83, Birkhäuser (1990)

[21] **M Gromov**, *Hyperbolic groups*, dans: "Essays in group theory", (S Gersten, editeur) MSRI Pub. 8, Springer–Verlag (1987) 75–263

[22] **A Haefliger**, *Complexes of groups and orbihedra*, dans: "Group theory from a geometrical viewpoint" (E Ghys, A Haefliger, A Verjovsky, editeurs) World Scientific (1991) 504–540

[23] **F Haglund**, *Réseaux de Coxeter–Davis et commensurateurs*, Ann. Inst. Fourier 48 (1998) 649-666

[24] **P de la Harpe**, *An invitation to Coxeter groups*, dans: "Group theory from a geometrical viewpoint", (E Ghys, A Haefliger, A Verjovsky, editeurs) World Scientific (1991) 193–253

[25] **G Moussong**, *Hyperbolic Coxeter group*, Doctoral Dissertation, Ohio State University (1988)

[26] **G Niblo**, **L Reeves**, *Groups acting on $CAT(0)$ cube complexes*, Geometry and Topology 1 (1997) 1–7

[27] **M A Ronan**, *Lectures on buildings*, Persp. Math. 7, Academic Press (1989)

[28] **M Sageev**, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complex*, Proc. London Math. Soc. 71 (1995) 585–617

[29] **J-P Serre**, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque 46, Soc. Math. France (1983)

[30] **E H Spanier**, *Algebraic topology*, Tata–McGraw–Hill (1966)

[31] **J Tits**, *Sur le groupe des automorphismes d'un arbre*, dans: "Essays on Topology (Mémoires dédiées à G de Rham)", Springer–Verlag (1970) 188–211

Laboratoire de Topologie et Dynamique URA 1169 CNRS
Université Paris-Sud
Bât. 425 (Mathématiques)
91405 ORSAY Cedex
FRANCE

Email: `haglund@math.u-psud.fr`, `Frederic.Paulin@math.u-psud.fr`

Received: 17 November 1997 Revised: 29 November 1998