ISSN 1464-8997 **551**

Geometry & Topology Monographs
Volume 1: The Epstein Birthday Schrift
Pages 551–576

Sur les espaces-temps homogènes

Abdelghani Zeghib

Abstract Here, we classify Lie groups acting isometrically on compact Lorentz manifolds, and in particular we describe the geometric structure of compact homogeneous Lorentz manifolds.

AMS Classification 57B30; 57S20

Keywords Lorentz manifold, twisted Heisenberg group, condition $(*)$

1 Introduction

Une variété homogène M est par définition munie d'une action transitive d'un groupe de Lie G, de telle façon que M s'identifie à un quotient G/H où H est le groupe d'isotropie (d'un certain point). Dans la suite on supposera toujours que l'action de G est fidèle.

En général, l'action de G préserve une certaine structure géométrique "rigide" [7]. Les plus belles de ces structures sont certainement les métriques pseudo-riemanniennes. Parmi ces dernières, on distingue "dans l'ordre" le cas riemannien et ensuite le cas lorentzien (i.e. une métrique pseudo-riemannienne de type $(1, n-1)$).

Lorsque $M = G/H$ est une variété riemannienne homogène compacte, G est nécessairement compact (on avait supposé l'action fidèle!). Quant à H, il peut être n'importe quel sous-groupe fermé (pas nécessairement discret) de G.

Il n'en est rien, lorsque M est de type lorentzien (et toujours supposée compacte). Le groupe G peut bien être non-compact, et de plus étant donné G, il n'est pas évident quels sous groupes fermés H peuvent figurer.

Notre but ici est d'essayer de comprendre, comme c'est le cas des métriques riemanniennes, la structure des variétés lorentziennes homogènes, ayant un volume fini.

1.1 Exemples

1.1.1 Cas semi-simple: $SL(2,\mathbf{R})$

Pour G semi-simple, sa forme de Killing détermine une métrique pseudo-riemannienne bi-invariante. Ainsi, elle passe aux quotients G/Γ, pour Γ discret, qui seront de plus munis d'une action à gauche isométrique de G. Cette métrique est lorentzienne exactement lorsque G est localement isomorphe à $SL(2,\mathbf{R})$.

1.1.2 Cas résoluble: Groupes de Heisenberg tordus

La discussion concernant les exemples qui suivent, se trouve en grande partie dans [9]. Il en a été également question dans [7] et [16].

L'algèbre de Heisenberg $\mathcal{HE}_d$ de dimension $2d+1$ est identifiée en tant qu'espace vectoriel à $\mathbf{R}\bigoplus\mathbf{C}^d$. Si Z (resp. $\{e_1,\dots,e_d\}$) est la base canonique de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}^d$), alors les crochets non nuls sont donnés par: $[e_k, ie_k]=Z$. En d'autres termes, si ω est la forme symplectique canonique sur $\mathbf{C}^d$, $\omega(X,Y)=\langle X, iY\rangle_0$, où $\langle\ ,\ \rangle_0$ est le produit hermitien canonique, alors $[X,Y]=\omega(X,Y)Z$.

Considérons l'algèbre résoluble $\mathcal{HE}_d^t$ (algèbre de Heisenberg tordue canonique) définie en ajoutant un élément extérieur t, vérifiant $[t,e_k]=ie_k, [t,ie_k]=-e_k$, pour $1\leq k\leq d$ et $[t,Z]=0$.

Définissons sur $\mathcal{HE}_d^t$, un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, par les lois suivantes: $\mathbf{C}^d$ est muni du produit scalaire induit par son produit hermitien canonique $\langle\ ,\ \rangle_0$ et est orthogonal au 2–plan engendré par t et Z. De plus $\langle t,t\rangle=\langle Z,Z\rangle=0$ et $\langle t,Z\rangle=1$.

Il est remarquable que ceci est un produit lorentzien (en particulier non dégénéré), qui est $Ad(\mathcal{HE}_d^t)$–invariant! (i.e. pour tout générateur u, ad_u est antisymétrique au sens de $\langle\ ,\ \rangle$).

Notons $\tilde{He}_d^t$ le groupe simplement connexe déterminé par $\mathcal{HE}_d^t$. On remarquera dans la suite qu'il admet bien des réseaux co-compacts. Comme dans le cas semi-simple, les variétés lorentziennes quotients qu'ils déterminent sont donc homogènes, et leurs groupes d'isométries contiennent des quotients de $\tilde{He}_d^t$.

En fait, on le constatera au long de ce texte, ce n'est jamais le groupe $\tilde{He}_d^t$ qui agit (fidèlement), mais un quotient, par un réseau de son centre. Pour l'expliciter, notons $\tilde{He}_d$ le groupe de Heisenberg simplement connexe et He_d son quotient par un réseau (isomorphe à $\mathbf{Z}$) de son centre (ce quotient est unique à conjugaison près). Maintenant quotienter He_d^t par un réseau central, revient à quotienter He_d par le groupe engendré par une puissance entière de $\exp(t)$. On notera He_d^t le quotient obtenu à l'aide du groupe engendré par $\exp(t)$. Tous les autres quotients sont des extensions de He_d^t par des groupes cycliques finis.

En fait on peut définir ces quotients comme produit semi-direct du cercle S^1 par He_d. Le cercle agit par rotation sur le facteur $\mathbf{C}^d$ et trivialement sur le centre $\mathbf{R}$. Le cas de He_d^t correspond à celui où l'action de S^1 est fidèle.

Considérons en général une action par automorphismes de S^1 sur l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{HE}_d$. Soit $\exp(s2\pi R)$ le groupe à un paramètre d'automorphismes ainsi détérminé sur le quotient de $\mathcal{HE}_d$ par son centre, identifié à $\mathbf{C}^d$. Il préserve la forme symplectique canonique ω sur $\mathbf{C}^d$. Mais un groupe compact de transformations symplectiques de $\mathbf{C}^d$ est conjugué à un sous-groupe de $U(d)$. Il s'ensuit que (après conjugaison) R est une application $\mathbf{C}$−linéaire diagonale (dans une base orthonormée) à valeurs propres $\lambda_1 i, \dots, \lambda_k i$, où les λ_j sont des nombres entiers (car $\exp(2\pi R) = 1$).

Definition 1.1 *Groupes de Heisenberg tordus* On appelera groupe de Heisenberg tordu tout produit semi-direct du cercle S^1 par He_d tel les entiers λ_j soient tous non nuls et de même signe (en d'autres termes les produits de valeurs propres de R sont tous non nulles et de même signe. IL est également équivalent à dire que l'application $\mathbf{C}$ linéaire symétrique iR admet des valeurs propres (réelles) non nulles de même signe).

Evidemment pour $d = 1$, on n'obtient rien d'autre que les extensions cycliques finis de He_1^t. Ces groupes peuvent en fait se définir autrement comme extensions centrales non triviales du groupe des déplacements directs du plan euclidien (appelé parfois groupe d'Euclide) par le cercle S^1.

Remarque terminologique 1.2 La terminologie ci-dessus n'est certainement pas idéale. En effet il existe, au moins pour $d = 1$, des terminologies concurentes. Par exemple, en physique, un groupe de Heisenberg tordu (pour $d = 1$) est dit groupe oscillateur [11], et dans un autre domaine d'intérêt, il s'appele groupe diamant. Apparemment, le terme, groupe de Heisenberg tordu, contient plus d'informations mathématiques.

Une variété d'exemples de variétés lorentziennes homogènes compactes s'obtient à partir de:

Proposition 1.3 (i) *Un groupe de Heisenberg tordu admet une métrique lorentzienne bi-invariante. Réciproquement si une algèbre de Lie obtenu comme produit semi-direct de S^1 par $\mathcal{HE}_d$, admet une métrique lorentzienne bi-invariante, alors cette algèbre est l'algèbre de Lie d'un groupe de Heisenberg tordu.*

(ii) *A indice fini près, il y a équivalence entre les réseaux d'un groupe de Heisenberg tordu de dimension $2d+2$ et ceux du sous-groupe He_d, ainsi que ceux de $\tilde{He}_d$ (le groupe de Heisenberg simplement connexe de dimension $2d+1$).*

Preuve (i) Cherchons les conditions que doit vérifier une telle métrique $\langle\ ,\ \rangle$. D'abord la $Ad(\mathcal{HE}_d)$ invariance de $\langle\ ,\ \rangle$ restreinte à $\mathcal{HE}_d$ entraîne que cette restriction est positive, à noyau exactement le centre.

Les conditions de $Ad(\mathcal{HE}_d)$ invariance de $\langle\ ,\ \rangle$ elle même (i.e. non restreinte) sont beaucoup plus fortes. En effet, on peut supposer que $R = ad_t$ préśerve $\mathbf{C}^d$ et considérons X, Y deux éléments de $\mathbf{C}^d$. Ecrivons la condition d'antisymétrie: $\langle ad_X t, Y\rangle + \langle t, ad_X Y\rangle = 0$. Donc: $\langle RX, Y\rangle = \langle t, Z\rangle \omega(X,Y)$ (où Z engendre le centre). Nécessairement, $\langle t, Z\rangle \neq 0$, car sinon $\langle\ ,\ \rangle$ admettra un noyau non trivial contenant Z.

On voit ainsi apparaître la condition sur les valeurs propres de R car la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $\mathbf{C}^d$ est définie positive. Si elle est satisfaite, on définira la métrique sur $\mathbf{C}^d$ par $\langle X, Y\rangle = \alpha\omega(X, R^{-1}Y)$, où $\alpha = \langle t, Z\rangle$ est une constante non nulle assurant que la métrique ainsi obtenue est positive (sur $\mathbf{C}^d$).

On vérifie alors que R restreinte à $\mathbf{C}^d$ est antisymétrique. Pour que R (non restreinte) soit antisymétrique, il suffit que la condition suivante se réalise: $\langle ad_t t, X\rangle + \langle t, ad_T X\rangle = 0$, i.e. $\langle t, RX\rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbf{C}^d$. Il résulte de la bijectivité de R sur $\mathbf{C}^d$ que t est orthogonal à $\mathbf{C}^d$. Enfin, on choisit: $\langle t, t\rangle = \beta$, un nombre réel quelconque. La métrique est ainsi complétement définie, avec deux paramètres de choix, α et β.

(ii) Soit G un groupe de Heisenberg tordu, obtenu comme produit semi-direct de S^1 par He_d. Ainsi He_d est co-compact dans G, en particulier un réseau de He_d est aussi un réseau dans G. La proposition signifie que réciproquement un réseau de G coupe He_d en un réseau et aussi qu'un réseau de $\tilde{He}_d$ se projette sur un réseau de He_d. Ce sont deux faits standard de la théorie des goupes discrets dont on peut extraire une preuve de [10] (par exemple le premier fait découle d'un énoncé général affirmant qu'un réseau d'un groupe de Lie résoluble coupe le nilradical en un réseau de ce dernier). □

Ainsi, concrètement, comme dans le cas précédent de $SL(2, \mathbf{R})$, les réseaux des groupes de Heisenberg (simplement connexes), qu'on comprend parfaitement, permettent de construire des variétés lorentziennes compactes homogènes dont le groupe d'isométries est (essentiellement) un groupe de Heisenberg tordu.

Remarquons cependant que si l'on quotiente un groupe de Heisenberg tordu par un réseau Γ contenu (pas seulement à indice fini près) dans He_d, alors on n'aura besoin que de l' $Ad(\Gamma)$–invariance de $\langle\ ,\ \rangle$. Par Zariski densité des réseaux de He_d, ceci équivaut au fait que $\langle\ ,\ \rangle$ est $ad(\mathcal{HE}_d)$–invariante.

Definition 1.4 On dira qu'une métrique lorentzienne sur l'algèbre de Lie d'un groupe de Heisenberg tordu, est essentiellement bi-invariante, si elle est $ad(\mathcal{HE}_d)$–invariante.

Remarque 1.5 D'après la preuve ci-dessus, une métrique essentiellement bi-invariante vérifie les mêmes conditions qu'une métrique bi-invariante, sauf celle de l'othogonalité de t à $\mathbf{C}^d$. Une telle métrique dépend donc des deux paramètres, α et β, ainsi que $2d$ autres paramètres donnant le produit de t avec les élements d'une ($\mathbf{R}$–) base de $\mathbf{C}^d$.

1.2 Classification

Notons que malgré son importance (du moins mathématique), en dehors des exemples de [9] signalés ci-dessus, le seul résultat sensible connu au sujet des variétés lorentziennes homogènes, est celui de [8], affirmant que les variétés lorentziennes homogènes compactes (ou plus généralement pseudo-riemanniennes) sont géodésiquement complètes. On peut aussi noter la classification par [12] des variétés lorentziennes homogènes à courbure constante, mais pas nécessiarement compactes, ainsi que le résultat de [5] affirmant (entre autres) qu'une variété lorentzienne homogène compacte et simplement connexe est de type riemannien. (On reviendra plus loin au cas non homogène, où on citera surtout [16] et [7]).

Le but de cet article est de montrer que les exemples précédents sont essentiellement les seuls:

Théorème 1.6 *Un espace-temps homogène, de volume fini, qui n'est pas de type riemannien, admet un sous-groupe normal co-compact dans son groupe d'isométries général, qui est soit un revêtement fini de $PSL(2,\mathbf{R})$, soit un groupe de Heisenberg tordu. L'algèbre de Lie de ce sous-groupe est en fait un facteur direct dans l'algèbre de tous les champs de Killing. De plus ce sous-groupe agit localement librement.*

Ce résultat nous permet entre autres de répondre à la question qu'on s'était posée précédemment: si $M = G/H$, alors quels sous-groupes d'isotropie H peuvent figurer? Il découle du théorème précèdent que H est essentiellement discret au sens que sa composante neutre est compacte. Le résultat suivant explicite complètement la structure topologique et géométrique des variétés lorentziennes homogènes.

Théorème 1.7 (Classification) *Soit M une variété lorentzienne homogène de volume fini. Supposons que M n'est pas de type riemannien (i.e. à groupe d'isométries compact). Alors:*

(i) *ou bien $Isom(M)$ contient un revêtement fini de $PSL(2, R)$. Dans ce cas M admet un revêtement isométrique $\tilde{M}$ qui est un produit métrique de $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$ muni de sa forme de Killing, par une variété riemannienne homogène compacte.*

(ii) *ou bien $Isom(M)$ contient S un groupe de Heisenberg tordu. Dans ce cas M admet un revêtement $\tilde{M}$ qui se construit de la façon suivante. Il existe une variété riemannienne homogène compacte (L, r), munie d'une action isométrique localement libre de S^1. Le cercle S^1 isomorphe au centre de S, y agit par translation et agit par suite diagonalement sur $S \times L$, muni de la métrique produit de celle de L par une métrique lorentzienne essentiellement bi-invariante sur S. Alors le revêtement $\tilde{M}$ est le quotient $S \times_{S^1} L$ de cette action. Il est muni de la métrique déduite par projection, de la métrique induite sur $TS \oplus \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est la distribution orthogonale à l'action de S^1 sur L.*

En fait $M = \tilde{M}/\Gamma$, où Γ est le graphe d'un homomorphisme ρ d'un réseau co-compact Γ_0 de S dans $Isom_{S^1}(L)$, le groupe d'isométries de L respectant l'action de S^1. De plus le centralisateur de $\rho(\Gamma_0)$ dans $Isom_{S^1}(L)$ agit transitivement sur L.

On peut par exemple prendre pour L la sphère S^3 munie d'une fibration de Hopf. Le groupe d'isométries qui la préserve est isomorphe à $S^1 \times S^3$. On prendra pour ρ un homomorphisme d'un réseau de S à valeurs dans S^1 (ce qui assurera que le centralisateur de l'image de ρ agit transitivement sur S^3). Le groupe d'isométries de la variété lorentzienne homogène compacte ainsi obtenue, sera essentiellement $S^3 \times S^1 \times S$.

Remarque 1.8 On déduit du théorème de structure ci-dessus qu'on peut changer la métrique tout en la gardant homogène, de telle façon que la métrique sur S soit bi-invariante.

Il est bien connu que sur $SL(2,\mathbf{R})$, la forme de Killing est à une constante près, la seule métrique bi-invariante. Sur un groupe de Heisenberg tordu S, il y en a beaucoup, mais elles sont toutes isométriques (pas seulement conformes!) par automorphismes dans le revêtement universel $\tilde{S}$. Ceci est lié au fait (remarquable) qu'une structure Lorentzienne bi-invariante donnée sur $\tilde{S}$, admet des transformations conformes non triviales. Elles sont en fait des homothéties, i.e. à distorsion constante.

Ainsi sur S toutes les métriques bi-invariantes sont localement isométriques. Cependant il y a un module de dimension 2 (les paramètres α et β de la preuve précédente) de telles structures globales (voir 5.6).

1.3 Ingrédients de la preuve

La finitude du volume sera utilisée, comme d'habitude, pour en déduire des propriétés de récurrence de l'action de G. Mais le plus grand intérêt de cette hypothèse pour nous ici, c'est de permettre de construire un produit scalaire L^2, sur l'algèbre de Lie de G, ayant la propriété élémentaire mais remarquable d'être bi-invariant.

En effet, plus généralement, si G est un groupe de Lie agissant sur une variété M (pas nécessairement transitivement) en préservant une métrique pseudo-riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$, alors la forme $\kappa(X,Y)=\int_M\langle X(x),Y(x)\rangle dx$ détermine une forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, qui est bi-invariante. Pour le voir, il suffit de remarquer que si ϕ^t est un groupe à paramètre de G (identifié au flot correspondant de M) et X est un élément $\mathcal{G}$ (identifié au champ de vecteurs correspondant sur M), alors $\phi^t_* X = Ad(\phi^t)X$.

Notons qu'il est aussi possible de considérer des formes du type $\kappa(X,Y) = \int_U\langle X(x),Y(x)\rangle dx$, où $U\subset M$ est un sous-ensemble G–invariant quelconque, ou plus généralement en intégrant par rapport à une mesure G–invariante quelconque. Remarquons aussi que la même construction marche lorsque G préserve un tenseur quelconque sur M, et permet ainsi de construire un tenseur "analogue" bi-invariant sur $\mathcal{G}$.

Cependant, le résultat obtenu est généralement trivial (même nul!). Ainsi, lorsque G est simple, la forme obtenue est un multiple (souvent nul) de la forme de Killing. On peut par exemple prendre $M=G$, qu'on munit d'une structure pseudo-riemannienne invariante à gauche (elle s'obtient simplement d'un produit scalaire de même signature sur $\mathcal{G}$). Ainsi G agit sur M en respectant cette structure. Lorsque G est compact la forme κ construite sur $\mathcal{G}$

sera définie positive, définie négative ou nulle, quelle que soit la signature de la structure pseudo-riemannienne de départ.

1.4 Cas lorentzien

Dans notre cas lorentzien, la forme κ sera suffisamment non triviale dès qu'il existe des champs $X \in G$ tels que $\langle X(x), X(x) \rangle$ garde un signe constant. Il se trouve, comme cela était établi dans [13] que c'est effectivement le cas pour tout champ X engendrant un groupe à paramètre ϕ^t non précompact, i.e. la fermeture dans G de $\{\phi^t / t \in \mathbf{R}\}$ n'est pas compact. C'est à ce niveau là qu'on utilise l'aspect dynamique de la finitude du volume. En fait ona:

Proposition fondamentale 1.9 [13] *Soit $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ une variété lorentzienne de volume fini. Soit X un champ de Killing sur M, déterminant un flot non précompact, alors: $\langle X(x), X(x) \rangle \geq 0$ pour tout $x \in M$. On dira que X est (partout) non temporel.*

On en déduit ce fait, qui n'entraîne pas tout à fait que κ est lorentzienne, exactement comme $\langle\ ,\ \rangle$, mais en borne la dégénérescence:

Proposition 1.10 Condition $(*)$ *Soit $\mathcal{P}$ un sous-espace vectoriel de champs de Killing tel pour l'ensemble des éléments $X \in \mathcal{P}$ déterminant des flots non précompacts, est dense dans $\mathcal{P}$. Alors la forme κ est positive sur $\mathcal{P}$ et son noyau est au plus de dimension 1 (ou en d'autres termes, l'ensemble des vecteurs isotropes de $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de dimension ≤ 1).*

1.5 Un résultat algébrique

Il se trouve que les données algébriques, fournies par κ, vérifiant la proposition précédente, suffisent largement pour comprendre le groupe G:

Théorème algébrique 1.11 *Soit G un groupe de Lie non compact dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est munie d'une forme bi-invariante κ, vérifiant l'hypothèse de non dégénérescence $(*)$ suivante:*

Condition $(*)$ *Si $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$, tel que l'ensemble des éléments $X \in \mathcal{P}$ déterminant des groupes à paramètre non précompacts est dense dans $\mathcal{P}$; alors la forme κ est positive sur $\mathcal{P}$ et son noyau est au plus de dimension 1.*

Alors $\mathcal{G}$ s'écrit comme somme directe orthogonale d'algèbres: $\mathcal{G} = \mathcal{K}+\mathcal{A}+\mathcal{S}$, où: $\mathcal{K}$ est une algèbre compacte (i.e. l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie semi-simple compact), $\mathcal{A}$ est une algèbre abélienne, et $\mathcal{S}$ est soit triviale, soit $sl(2,\mathbf{R})$, soit l'algèbre de Lie du groupe affine (des transformations de la droite), soit une algèbre de Heisenberg $\mathcal{HE}_d$, soit une algèbre de Heisenberg tordue. On a:

(i) *Lorsque $\mathcal{S}$ est triviale, κ est positive à noyau de dimension ≤ 1. Lorsque $\mathcal{S}$ est non triviale, κ est définie positive sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$.*

(i) *Lorsque $\mathcal{S}$ est l'algèbre de Lie du groupe affine, κ est positive dégénérée sur $\mathcal{S}$ et admet pour noyau exactement l'idéal déterminé par les translations.*

(i) *Lorsque $\mathcal{S}$ est une algèbre de Heisenberg, κ est positive dégénérée sur $\mathcal{S}$ et admet pour noyau exactement le centre.*

(iv) *Lorsque $\mathcal{S}$ est une algèbre de Heisenberg tordue, la forme κ est lorentzienne sur $\mathcal{S}$. Le sous-groupe de G déterminé par $\mathcal{S}$ est un groupe de Heisenberg tordu. De plus le sous-groupe abelien déterminé par $\mathcal{A}+\mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z}$ est le centre de $\mathcal{S}$, est compact.*

(v) *Lorsque $\mathcal{S} = sl(2,\mathbf{R})$, la forme κ sur $\mathcal{S}$ est lorentzienne et le sous-groupe déterminé par $\mathcal{S}$ est un revêtement fini de $PSL(2,\mathbf{R})$. De plus le sous-groupe déterminé par $\mathcal{A}$ est compact.*

1.6 Un résultat géométrique

Le théorème algébrique s'applique en particulier aux groupes de Lie connexes non compact agissant isométriquement sur une variété Lorentzienne $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ de volume fini. Certaines parties de ce théorème sont dues dans ce cas à [16] et ensuite [7]. Plus précisément, la structure algébrique de $\mathcal{G}$ est élucidée dans [16] lorsque $\mathcal{G}$ contient $SL(2,\mathbf{R})$. Il y a été également démontré que le nilradical est de degré de nilpotence ≤ 2.

Dans [7], il a été question d'améliorations géométriques de résultats de [16] (surtout dans le cas analytique). En effet, on peut, en général, améliorer le théorème algébrique précédent, par un résultat géométrique, ponctuel. Il exprime essentiellement le fait que si un champ de Killing X est non temporel au sens de κ (i.e. $\kappa(X,X) \geq 0$), c'est qu'il l'est ponctuellement au sens de $\langle\ ,\ \rangle$ (i.e. $\langle X(x), X(x)\rangle \geq 0$, pour tout $x \in M$).

Tout ce qui concerne $SL(2,\mathbf{R})$ dans les résultats suivants est démontré par [7]. Notre approche ici permet de les redémontrer.

Théorème géométrique 1.12 *Soit G un groupe de Lie connexe non compact agissant isométriquement sur une variété lorentzienne $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ de volume fini. Notons κ la forme ainsi définie sur $\mathcal{G}$.*

1) Supposons que κ est positive, alors les orbites de G sont non temporelles (i.e. la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à ces orbites est ≥ 0). Le noyau de κ, s'il n'est pas trivial est un champ de Killing (partout) de type lumière (au sens de $\langle\ ,\ \rangle$) et à orbites géodésiques.

2) Supposons que κ n'est pas positive, donc $\mathcal{G}$ contient un facteur direct $\mathcal{S}$, isomorphe à $sl(2, \mathbf{R})$ ou algèbre de Heisenberg tordue. Alors l'action de $\mathcal{S}$ est partout localement libre.

Le résultat de [7] pour $sl(2, \mathbf{R})$ est plus précis. Il affirme davantage que la distribution orthogonale (aux orbites) est intégrable (et aussi géodésique). Il s'ensuit qu' un certain revêtement est un produit tordu d'une variété riemannienne par $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$.

En fait lorsqu'un groupe isomorphe à $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$ ou à un groupe de Heisenberg tordu agit isométriquement sur une variété lorentzienne de volume fini, alors celle ci s'obtient pratiquement de la même façon que dans le cas homogène, explicité au théorème 1.7, à ceci près que L ne sera supposée ni homogène ni compacte:

Théorème 1.13 [7] *Une variété lorentzienne de volume fini munie d'une action isométrique d'un groupe localement isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$ est revêtue par un produit de $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$ par une variété riemannienne (L, r), muni d'une métrique tordue $h_{(g,x)} = f(x) k \otimes r_x$, où f est une fonction positive sur L et k est la forme de Killing de $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$.*

Ici on a un résultat de structure, un peu plus compliqué, dans le cas d'un groupe de Heisenberg tordu G , du fait que la distribution orthogonale n'est pas nécessairement intégrable. C'est en fait sa saturée par le centre de G qui l'est.

La construction est la suivante. Soit (L, r) une variété riemannienne munie d'une action isométrique localement libre de S^1. Notons $\mathcal{O}$ la distribution orthogonale aux orbites.

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des métriques lorentziennes essentiellement bi-invariantes sur $\mathcal{G}$ (1.4). Soit $\phi\colon L \to \mathcal{M}$ une application (de même classe de régularité que toutes les données). Munissons le produit $G \times L$ de la métrique tordue définie par ϕ: $h_{(g,x)} = m_x \otimes r_x$ (l'espace tangent au facteur G étant partout identifié à $\mathcal{G}$).

Le centre de G, isomorphe à S^1, y agit isométriquement par translation. On a donc une action isométrique diagonale de S^1 sur le produit $G \times L$. Notons $G \times_{S^1} L$ le quotient et munissons le de la métrique déduite par projection, de la métrique induite sur l'horisontal $\mathcal{G} \oplus \mathcal{O}$

Soit Γ un réseau de $G \times Isom_{S^1}(L)$ où $Isom_{S^1}(L)$ désigne le groupe d'isométries de L préservant l'action de S^1. On suppose que Γ agit sans point fixe sur $G \times_{S^1} L$ (ce qui sera toujours vrai pour un sous-groupe d'indice fini). Le quotient $M = \Gamma \setminus G \times_{S^1} L$ est une variété lorentzienne de volume fini munie d'une action isométrique de G.

Théorème 1.14 *Toute variété lorentzienne de volume fini, munie d'une action isométrique d'un groupe de Heisenberg tordu G est construite de la façon précédente.*

Exemple 1.15 On peut prendre pour L le groupe G lui même muni d'une métrique riemannienne invariante à droite, et de l'action de son centre. On voit sur cet exemple que $\mathcal{O}$ peut bien être non intégrable. En jouant sur Γ, qui est un réseau de $G \times G$, on peut réaliser diverses propriétés de densité des orbites de G.

La classification des algèbres de Lie de groupes agissant isométriquement sur des variétés lorentziennes compactes, a été démontrée indépendemment par S Adams et G Stuck [1]. Le présent article, ainsi que [1] sont parus simultanément (sous forme de preprints) en Mai 1995. D'autres résultats complémentaires qui précisent cette classification ont été ensuite démontrés dans [2] et [14].

2 La condition $(*)$

Rappelons brièvement dans ce qui suit les éléments de la preuve de 1.9 [13]. Le premier point est que dans un groupe de Lie la fermeture L d'un groupe à un paramètre ϕ^t est soit $\mathbf{R}$ soit un tore (compact). En effet L est un groupe abélien possédant un groupe à un paramètre dense.

Il en découle que si une sous-suite ϕ^{t_i} est précompacte (i.e. équicontinue) alors le flot ϕ^t lui même est précompact.

Le second point est un phénomène d'uniformité valable pour des suites de transformations f_i préservant une connexion. Il stipule que si la suite des dérivés $D_x f_i$ en un point x donné est équicontinue, alors la suite f_i elle même est équicontinue. Ceci découle de la définition même de la structure différentiable du groupe G d'isométries de la connexion. En effet cette structure est caractérisée par le fait que pour tout repère r_x en x, l'évaluation $e\colon G \to Rep(M)$, $e(f) = f^*(r_x)$ est un plongement propre.

Le dernier point est qu'au voisinage d'un point x, qu'on peut supposer récurrent, où le champ de Killing X générateur infinitésimal de ϕ^t est de type temps, les applications de retour, ont leurs dérivées équicontinues en x. En effet, ces dérivées respectent la métrique riemannienne (définie au voisinage de x) obtenue canoniquement à partir de la métrique lorentzienne, juste en changeant le signe le long de X. $\square$

La Proposition 1.10 découle du fait suivant:

Lemme 2.1 *Soit $\mathcal{P}$ un sous-espace vectoriel de champs de Killing tel que pour tout $X \in \mathcal{P}$ et $x \in M$, $\langle X(x), X(x)\rangle \geq 0$. Alors la forme κ est positive sur $\mathcal{P}$ et son noyau est au plus de dimension 1.*

Preuve Il découle de l'hypothèse que si $X \in \mathcal{P}$ est isotrope au sens de κ, alors $X(x)$ est isotrope au sens de $\langle\ ,\ \rangle_x$ pour tout x. Donc si $\mathcal{A}$ est un sous-espace isotrope de $\mathcal{P}$, alors: $\mathcal{A}_x = \{X(x), X \in \mathcal{A}\}$ est un sous-espace isotrope de $(T_xM, \langle\ ,\ \rangle_x)$. Il s'ensuit que: $\dim(\mathcal{A}_x) \leq 1$ pour tout x car la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ est lorentzienne.

La preuve du lemme sera achevée si l'on montre que deux champs de Killing (partout) colinéaires, sont tels que l'un est multiple constant de l'autre.

En effet soit X et Y deux tels champs et écrivons (localement) $Y = fX$ où f est une certaine fonction. Notons ∇ la connection de Levi-Civita. Alors, un Champ de Killing tel que X vérifie que: pour tout x, l'application $u \in T_xM \to \nabla_u X \in T_xM$ est antisymétrique. Ainsi $0 = \langle \nabla_u(fX), u\rangle = (u.f)\langle X, u\rangle + f\langle \nabla_u X, u\rangle = (u.f)\langle X, u\rangle$, car X et $Y = fX$ sont, tous les deux, deschamps de Killing. Il en découle que f est constante. $\square$

3 Début de la preuve du théorème algébrique

Sans le mentionner, on utilisera parfois, l'affirmation suivante, qui contient des faits classiques standards:

Fait 3.1 *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie muni d'une forme bi-invariante k. On a:*

(i) *Le noyau de k est un idéal de $\mathcal{G}$.*

(ii) *Si k est définie positive, alors $\mathcal{G}$ est somme directe k–orthogonale d'une algèbre abelienne et d'une algèbre compacte (i.e. l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie semi-simple compact).*

(iii) *Si $\mathcal{G}$ est compacte, alors k est multiple de sa forme de Killing.*

Soit maintenant $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie munie d'une forme κ comme dans le theéorème algébrique.

Lemme 3.2 *Soit $\mathcal{P}$ une sous algèbre abélienne de $\mathcal{G}$ ayant un élément X déterminant un flot non précompact. Alors la forme κ est positive sur $\mathcal{P}$ et son noyau est au plus de dimension 1.*

Preuve On applique la condition $(*)$ sachant que la fermeture du groupe déterminé par $\mathcal{P}$ est un produit d'un tore par un espace vectoriel non trivial. Tous les groupes à un paramètre sont non précompacts sauf ceux tangents au facteur torique. □

Le nilradical Le lemme 3.2 s'étend en fait aux groupes nilpotents grâce à la:

Proposition 3.3 *L'ensemble des groupes à un paramètre non précompacts d'un groupe de Lie nilpotent non compact, est dense. C'est en fait le complémentaire d'un tore maximal (qui est par ailleurs central et unique).*

Preuve Soit N un tel groupe, $\tilde{N}$ son groupe revêtement universel, et Γ le groupe fondamental de N. Alors Γ est central dans $\tilde{N}$. De plus, c'est un réseau dans un unique sous-groupe de Lie (connexe) $\tilde{L}$, également central (pour définir $\tilde{L}$, on se ramène au cas abélien, en remarquant simplement que le centre de $\tilde{N}$ est connexe, car si un élément est central, alors le groupe à paramètre (unique) qui le contient est central). La projection de $\tilde{L}$ dans N est un tore (maximal).

Ainsi N se projette sur $N/L = \tilde{N}/\tilde{L}$, qui est simplement connexe, donc ayant tous ses groupes à un paramètre non précompacts. Il s'ensuit que les groupes à un paramètre de N qui sont précompacts, sont tangents à l'algèbre de Lie de L. □

Notons N le nilradical de G, i.e. le plus grand sous groupe de Lie (connexe) normal nilpotent. On supposera dans cette section qu'il est non compact.

Corollaire 3.4 *Si le nilradical N est non compact, alors la restriction de κ à $\mathcal{N}$ est une forme positive, dont le noyau est un idéal $\mathcal{I}$ de dimension ≤ 1. De plus $\mathcal{N}$ est isomorphe à une somme directe orthogonale d'algèbres $\mathcal{N} = \mathcal{A} + \mathcal{HE}_d$, où $\mathcal{A}$ est abélienne et $\mathcal{HE}_d$ est l'algèbre de Heisenberg de dimension $2d+1$.*

L'action adjointe de G sur $\mathcal{N}/\mathcal{I}$ est à image compacte (car elle préserve une forme définie positive).

Lorsque le facteur correspondant à l'algèbre de Heisenberg est non trivial, le noyau $\mathcal{I}$ de κ est exactement son centre $\mathcal{Z}$.

Preuve On utilise 3.2 pour en déduire que κ est positive sur $\mathcal{N}$ et que $\dim\mathcal{I} \leq 1$. On remarque ensuite que l'algèbre $\mathcal{N}/\mathcal{I}$ est abélienne, car elle est nilpotente et admet une métrique définie positive bi-invariante. □

Remarque 3.5 $\mathcal{A}$ n'est pas canoniquement définie, mais la somme $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$ et le facteur de type Heisenberg $\mathcal{HE}_d$ le sont.

Proposition 3.6 (i) *Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{HE}_d \subset \mathcal{N}$ est en fait central dans $\mathcal{G}$.*

(ii) *Tout $X \in \mathcal{HE}_d \subset \mathcal{N}$ non central, engendre un groupe à un paramètre non précompact.*

(iii) *Si Y est un élément non trivial de $\mathcal{G}$ qui commute avec un élément non central de $\mathcal{N}$, alors $\kappa(Y,Y) > 0$.*

Preuve (i) Soit A un automorphisme de $\mathcal{HE}_d$ respectant κ. Supposons que A induit sur $\mathcal{Z}$ une homothétie non triviale. Alors $\mathcal{Z}$ sera le seul sous espace propre associé à une valeur propre de module $\neq 1$, car κ est définie positive sur $\mathcal{HE}_d/\mathcal{Z}$. Il existera donc un supplémentaire $\mathcal{T}$ de $\mathcal{Z}$, sur lequel A respecte une métrique définie positive (et en particulier à valeurs propres de module égale à 1). On obtient une contradiction en considérant deux éléments, X et Y de $\mathcal{T}$, vérifiant $[X,Y] = Z \in \mathcal{Z}$.

(ii) découle du fait qu'alors ad_X est nilpotent (et non trivial) et donc le groupe à un paramètre $exp(tad_X)$ est non précompact.

(iii) En effet si Y commute avec un élément non central $X \in \mathcal{HE}_d$, alors Y, X et $\mathcal{Z}$ déterminent une sous-algèbre abélienne de dimension ≥ 2, vérifiant 3.2. Il s'ensuit que $\mathcal{Z}$ est le seul espace κ isotrope de cette sous-algèbre. □

Proposition 3.7 *Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une sous-algèbre semi-simple. Alors la somme $\mathcal{G}' = \mathcal{L} + \mathcal{N}$ est orthogonale (au sens de κ) et directe (au sens d'algèbres)*

Preuve Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$ le noyau de la restriction de κ à $\mathcal{N}$. C'est un idéal de $\mathcal{G}'$ de dimension ≤ 1. Par semi-simplicité, $\mathcal{L}$ centralise $\mathcal{I}$. On peut appliquer le Fait 3.8 pour voir que $\mathcal{I}$ est orthogonale à $\mathcal{L}$ et par suite à $\mathcal{G}'$.

On peut donc en passant au quotient $\mathcal{G}'/\mathcal{I} = \mathcal{L} + \mathcal{N}/\mathcal{I}$, supposer que la forme κ est définie positive sur $\mathcal{N}$.

La proposition est bien connue lorsque κ est définie positive sur $\mathcal{G}'$ (voir 3.1. On va essayer donc de se ramener à cette situation. Par 3.4, l'action adjointe de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{N}$ est à image compacte. On peut donc supposer que $\mathcal{L}$ est compacte. De plus, quitte à traîter facteur par facteur, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est simple. Soit k la forme de Killing de $\mathcal{G}'$. Elle est triviale sur $\mathcal{N}$ car c'est le nilradical et sa restriction à $\mathcal{L}$ est un multiple non nul de la forme de Killing de $\mathcal{L}$. Ainsi, sur $\mathcal{L}$, κ est multiple de k. Il s'ensuit qu'il existe un choix d'un réel α tel que $\kappa + \alpha k$ soit définie positive sur $\mathcal{G}'$. Ainsi, on s'est ramené au cas où κ est définie positive sur $\mathcal{G}'$.

Pour montrer l'orthogonalité de la somme $\mathcal{L} + \mathcal{N}$, on utilise le fait général suivant, dont la preuve découle de la bi-invariance de κ. □

Fait 3.8 *Soit $\mathcal{L}$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$, et Y un élément de $\mathcal{G}$ centralisant $\mathcal{L}$. Alors l'application $X \in \mathcal{L} \to \kappa(X,Y) \in \mathbf{R}$ est un homomorphisme, i.e. $\kappa([X,X'],Y) = 0$, pour X, X' dans $\mathcal{L}$.*

Le radical Soit R le radical de G (i.e. le plus grand sous groupe de Lie normal résoluble) et $\mathcal{R}$ son algèbre de Lie. On supposera dans cette section qu'il est non compact. On a d'abord la constatation suivante:

Fait 3.9 *Si R est non compact, alors le nilradical N l'est également.*

Preuve En effet, s' il est compact, N sera central dans G et en particulier dans R. Ainsi l'avant dernier groupe dérivé de R contient strictement N et est nilpotent. Par naturalité, il est normal dans G, ce qui contredit la définition de N. □

La proposition 3.7 se généralise à $\mathcal{R}$:

Proposition 3.10 *Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une sous-algèbre semi-simple. Alors la somme $\mathcal{G}' = \mathcal{L} + \mathcal{R}$ est orthogonale (au sens de κ) et directe (au sens d'algèbres)*

Preuve Cela découle de 3.7 et du lemme suivant. □

Lemme 3.11 *Soit A un automorphisme semi-simple de R, trivial sur $\mathcal{N}$, alors A est trivial.*

Preuve Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathcal{N}$ invariant par A. Soit $X \in \mathcal{E}$, $Y \in \mathcal{N}$, alors $[X,Y] \in \mathcal{N}$. Donc $[X,Y] = A[X,Y] = [AX,Y]$. Autrement dit $X - AX$ centralise $\mathcal{N}$. Par maximalité de $\mathcal{N}$ en tant que sous-algèbre normale nilpotente, on déduit que l'application $X \in \mathcal{E} \to X - AX \in \mathcal{E}$ est nulle (car son image est contenue dans $\mathcal{E}$). $\square$

Facteur semi-simple

Fait 3.12 *Supposons que R est non compact. Alors on a une décomposition directe et orthogonale $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{R}$ où $\mathcal{K}$ est une sous-algèbre semi-simple compacte.*

Preuve D'après ce qui précède, il suffit simplement de montrer que le facteur semi simple $\mathcal{K}$ est compacte. Il suffit pour cela d'observer que la restriction de κ à chaque facteur de $\mathcal{K}$ est positive et non triviale. Pour cela on applique la condition $(*)$ à l'algèbre $\mathcal{K}' = \mathcal{K} + \mathbf{R}X$, où X est un élément de $\mathcal{R}$ qui détermine un groupe à un paramètre non précompact. En effet tous les groupes à un paramètre de $\mathcal{K}'$ non tangents à $\mathcal{K}$ sont non précompacts. Ainsi κ est positive sur $\mathcal{K}'$ et à noyau de dimension ≤ 1. Ce noyau intersecte trivialement $\mathcal{K}$, car sinon, il sera un idéal de dimension 1 de $\mathcal{K}$, ce qui contredit son caractère semi-simple. $\square$

4 Preuve du théorème algébrique

Ce qui précède nous amène à distinguer le cas où le radical R est compact du cas où il ne l'est pas.

4.1 Cas où le radical est compact

Le radical étant compact, il est donc abélien et on a une décomposition directe: $\mathcal{G} = \mathcal{L} + \mathcal{R}$, où $\mathcal{L}$ est semi-simple. Une application comme dans la preuve précédente de la condition $(*)$, permet de montrer que κ est définie positive sur $\mathcal{R}$.

Puisque G est non compact, $\mathcal{L}$ contient un facteur (direct) semi-simple $\mathcal{S}$ de type non compact. Ainsi tout facteur de $\mathcal{S}$ contient des vecteurs qui déterminent des groupes à un paramètre non précompacts. Soit $\mathcal{S}_1$ un tel facteur. Alors, une application comme dans la preuve précédente de la condition $(*)$, à tous les autres facteurs de $\mathcal{G}$ (qui centralisent $\mathcal{S}_1$) , permet de montrer que κ est positive, sur chacun de ces facteurs. Il s'ensuit qu'ils sont tous compacts et en particulier, par définition, que $\mathcal{S}$ est simple.

Notons $\mathcal{K}$ le facteur semi-simple compact de $\mathcal{G}$. Le fait 3.8 permet de montrer que la décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{S} + \mathcal{K} + \mathcal{R}$ est orthogonale.

Montrons à présent que l'algèbre simple de type non compact $\mathcal{S}$ est isomorphe à $sl(2, \mathbf{R})$.

Il est connu que dans tous les cas $\mathcal{S}$ contient une algèbre $\mathcal{S}'$ isomorphe à $sl(2, \mathbf{R})$. Notons $\mathcal{E}$ l'orthogonal à $\mathcal{S}'$. C'est un supplémentaire de $\mathcal{S}'$ (car ce dernier n'est pas dégénéré) qui est $ad(\mathcal{S}')$–invariant (par bi-invariance de κ).

Il est aussi connu (par algébricité des representations d'algèbres semi-simples) que pour $X \in \mathcal{S}'$, si ad_X est semi-simple (resp. nilpotent) sur $\mathcal{S}'$, alors il en va de même pour ad_X agissant sur $\mathcal{E}$. Il est facile de se convaincre que si tout élément hyperbolique (i.e. semi-simple à valeurs propres réels) $X \in \mathcal{S}'$ agit trivialement sur $\mathcal{E}$, alors toute l'action est triviale, et $\mathcal{S}'$ sera un facteur direct de $\mathcal{S}$, ce qui contredit la simplicité de $\mathcal{S}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe X, un élément hyperbolique agissant non trivialement sur $\mathcal{E}$. Il existe donc un vecteur propre $Z \in \mathcal{E}$ tel que $[X, Z] = \lambda Z$ et $\lambda \neq 0$. Il en découle que Z détermine un groupe à un paramètre non précompact (car sinon ad_Z serait semi-simple à valeurs propres imaginaires pures). Or, il existe $Y \in \mathcal{S}'$ nilpotent vérifiant $[X, Y] = Y$. On en déduit que Z est aussi vecteur propre, nécessairement trivial par nilpotence de ad_Y: $[Y, Z] = 0$. Donc Y et Z engendrent un groupe abélien contenant au moins 2 groupes à un paramètre (différents) non précompacts. Il y en a donc un ensemble dense. Ceci contredit l'hypothèse $(*)$ car Y et Z sont orthogonaux et simultanément isotropes. Ce dernier fait se voit facilement, car $\exp(ad_X)$ induit une homothétie non triviale sur chacune des directions de Y et Z.

Il ne reste à montrer du théorème algébrique dans notre cas (i.e. lorsque R est compact) que le fait que l'action se factorise en l'action, d'un revêtement fini de $PSL(2, \mathbf{R})$, ou de manière équivalente un quotient central infini de $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$. Il suffit pour cela de remarquer que $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$ ainsi que ses quotients finis, ont tous leurs groupes à un paramètres non précompacts. Ce qui impliquerait que κ est positive! $\square$

4.2 Cas où R n'est pas compact

On a alors d'après 3.12 une décomposition directe orthogonale $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{R}$, où $\mathcal{K}$ est compacte. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{R}$ se décompose comme énoncé. On peut ainsi à présent oublier $\mathcal{K}$ en supposant que $\mathcal{G}$ est résoluble.

Le nilradical $\mathcal{N}$ est non compact. Considérons la décomposition: $\mathcal{N} = \mathcal{A} + \mathcal{HE}_d$ et notons $\mathcal{Z}$ le centre de $\mathcal{HE}_d$. Rappelons (3.5) que c'est la somme $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$ (mais pas $\mathcal{A}$) qui est canoniquement définie.

4.2.1 Cas où κ n'est pas positive. Groupes de Heisenberg tordus

Soit t un élément de $\mathcal{G}$ tel que $\kappa(t,t) < 0$. Il engendre un groupe à un paramètre non précompact, que l'on peut supposer (après approximation) périodique, i.e. engendrant un groupe isomorphe au cercle S^1.

Fait 4.1 *t centralise $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$, qui par suite engendre un groupe (abélien) compact, qui est donc en plus central dans $\mathcal{G}$.*

Preuve Soit $T^s = \exp(s ad_t)$ le groupe à un paramètre défini par t. Il agit sur $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$ par transformations orthogonales (à cause de la précompacité), en particulier semi-simples, à valeurs propres de module égale à 1. Pour montrer que t centralise $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$, il suffit de montrer que toute puissance non triviale T^s n'a pas de sous-espace propre de dimension 2. Supposons par l'absurde que $\mathcal{P}$ est un tel sous-espace. C'est en particulier une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ car $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$ est abélienne. L'algèbre $\mathcal{L}$ engendrée par t et $\mathcal{P}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des déplacements eucilidien d'un plan (engendrant le groupe des translations-rotations du plan).

Tous les éléments de $\mathcal{P}$ sont nécessairement non précompacts, et donc d'après la condition $(*)$, κ est positive, non triviale sur $\mathcal{P}$. Elle est donc non dégénérée, car son noyau est un idéal propre, qui ne pourrait être que $\mathcal{P}$. En fait κ est une forme lorentzienne bi-invariante sur $\mathcal{L}$ (car on sait déjà que $\kappa(t,t) < 0$).

Il suffit maintenant de remarquer qu'une telle forme, ne peut pas exister. En effet tout groupe à un paramètre défini par un vecteur non tangent à $\mathcal{P}$ (i.e. qui ne soit pas un groupe à un paramètre de translations du plan) est conjugué à celui défini par t, car c'est un groupe de rotation autour d'un certain point. Il s'ensuit que κ est négative en dehors de $\mathcal{P}$, ce qui contredit son caractère lorentzien.

On déduit de 3.2 que $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$ détermine un groupe compact. $\square$

En fait, toujours d'après 3.2, le groupe à un paramètre déterminé par t ne commute avec aucun élément non central de $\mathcal{HE}_d$. De plus le groupe engendré par le centre de $\mathcal{HE}_d$ est compact, faute de quoi, toujours d'après 3.2, on aura $\kappa(t,t) \geq 0$.

Notons $\mathcal{S}$ l'algèbre engendrée par t et $\mathcal{HE}_d$ et S le groupe qu'elle détermine.

Un raisonnement élémentaire permet de voir que κ est lorentzienne sur $\mathcal{S}$. On commence par constater que κ est non dégénérée, car son noyau ne pourrait être que le centre, et en quotientant par ce dernier, on trouve une forme lorentzienne bi-invariante sur le produit semi-direct de S^1 agissant, sans vecteur fixe, sur $\mathbf{C}^d$. La preuve qu'on vient de donner ci-dessus, pour $d = 1$, de l'inexistence d'une telle forme, se généralise en toute dimension.

Ce qui précéde montre bien que S est un groupe de Heisenberg tordu.

Considérons l'orthogonal $\mathcal{S}^\perp$. C'est bien un supplémentaire de $\mathcal{S}$. Par bi-invariance de κ, $[X,Y] \in \mathcal{S}^\perp$ dès que $X \in \mathcal{S}$ et $Y \in \mathcal{S}^\perp$. En d'autres termes, $\mathcal{S}$ centralise le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}^\perp$. Il en résulte, puisque $\mathcal{HE}_d$ est un idéal de $\mathcal{G}$, que $[X,Y] = 0$ dès que $X \in \mathcal{HE}_d$ et $Y \in \mathcal{S}^\perp$. Autrement dit $\mathcal{S}^\perp$ centralise $\mathcal{HE}_d$.

Soit $X \in \mathcal{S}^\perp$. Il centralise $\mathcal{N} = \mathcal{A} + \mathcal{HE}_d$, car d'après le fait ci-dessus $\mathcal{A}$ est central. Il en découle que $\mathbf{R}X + \mathcal{N}$ est une algèbre nilpotente. C'est en fait un idéal de $\mathcal{G}$, car il est connu que $[\mathcal{G},\mathcal{G}] \subset \mathcal{N}$ (on avait supposé que $\mathcal{G}$ est résoluble). Par maximalité de $\mathcal{N}$, en tant qu' idéal nilpotent, on a: $X \in \mathcal{N}$.

Ainsi $\mathcal{S}^\perp$ est contenue dans le nilradical $\mathcal{N}$. On en déduit pour des raisons de dimension que $\mathcal{N} = \mathcal{S}^\perp + \mathcal{HE}_d$. Ainsi on peut prendre $\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp$. Ce qui achèvera la décomposition dans ce cas. □

4.2.2 Cas où κ est positive

Supposons que κ est positive sur $\mathcal{G}$ (supposée résoluble). Elle admettra un noyau non trivial $\mathcal{I}$, sauf si $\mathcal{G}$ est abélienne. Supposons donc dans la suite que $\mathcal{I}$ est non trivial.

D'après la condition $(*)$, si $\dim(\mathcal{I}) > 1$, alors le sous-groupe I de G qu'il détermine est précompact, i.e. $\bar{I}$ est un tore, nécessairement central. En particulier $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$. Ce qui contredit le fait (3.4) que, sur $\mathcal{N}$, la dimension du noyau de κ est ≤ 1.

Montrons que: $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$. En effet sinon, $\mathcal{I} \cap \mathcal{N} = 0$. Comme $\mathcal{I}$ et $\mathcal{N}$ sont des idéaux, il s'ensuit qu'ils se centraliseent l'un l'autre. En particulier $\mathcal{I} + \mathcal{N}$ est aussi un idéal nilpotent. Ce qui contredit la définition de $\mathcal{N}$. Maintenant, si $\mathcal{G}$ est nilpotente, elle se décompose comme dans 3.4. Ce qui démontre le théorème algébrique dans ce cas. Supposons donc que $\mathcal{G}$ n'est pas nilpotente. L'algèbre quotient est abélienne car elle admet une forme définie positive bi-invariante. Il s'ensuit que $[\mathcal{G},\mathcal{G}] \subset \mathcal{I}$, mais $\mathcal{I}$ n'est pas central, car sinon $\mathcal{G}$ sera nilpotente. On en déduit que si Y est un générateur de $\mathcal{I}$, alors le noyau de l'application $u \to [u,Y]$ admet un noyau $\mathcal{L}$ de codimension 1. Il existe X orthogonal à $\mathcal{L}$ vérifiant $[X,Y] \neq 0$. On peut en fait supposer quitte à prendre un multiple de X que: $[X,Y] = Y$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ le noyau de $T \in \mathcal{L} \to [X,T] \in \mathcal{I}$. Ainsi X et Y engendre l'algèbre de Lie du groupe affine $\mathcal{GA}$. Pour achever la preuve du théorème dans le présent cas, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre centrale (elle sera alors immédiatement un facteur direct). Comme par construction $\mathcal{A}$ est centralisé par X et Y et s'injecte dans le quotient abélien $\mathcal{G}/\mathcal{I}$, il suffit juste de montrer que $\mathcal{A}$ est bien une algèbre. Soit donc T et T' deux éléments de $\mathcal{A}$. Par l'identité de Jacobi $[X,[T,T']] = 0$. Donc $[T,T']$ est certainement un multiple trivial de Y. □

5 Preuve des Théorèmes géométriques

5.1 Caractère causal de l'action lorsque $\mathcal{G}$ ne contient ni $sl(2,\mathbf{R})$ ni une algèbre de Heisenberg tordue

Pour montrer que lorsque $\mathcal{G}$ ne contient pas $sl(2,\mathbf{R})$ ou une algèbre de Heisenberg tordue, les orbites sont non temporelles, il suffit d'appliquer 1.9, en remarquant que dans ce cas, d'après le théorème algébrique, les groupes à un paramètre non précompact sont denses.

Il s'ensuit que si X est un champ isotrope au sens de κ, alors $X(x)$ est isotrope (au sens de $\langle\ ,\ \rangle_x$) pour tout $x \in M$. Pour montrer que les orbites de X sont géodésiques, on applique le fait suivant:

Lemme 5.1 *Soit X un champ de Killing à norme constante: $\langle X(x), X(x)\rangle$ ne dépend pas de x. Alors les orbites de X sont des géodésiques affinement paramétrées: $\nabla_X X(x) = 0$, pour tout x.*

Preuve En tant que champ de Killing, X vérifie: $\langle \nabla_Y X, X\rangle + \langle Y, \nabla_X X\rangle = 0$, pour tout champ Y. Mais la constance de la norme entraîne: $\langle \nabla_Y X, X\rangle = 0$. Par conséquent: $\nabla_X X = 0$. □

5.2 Caractère localement libre des actions des groupes de Heisenberg tordus

On supposera dans la présente section et la suivante que M est compacte. En effet, on aura affaire dans les démonstrations suivantes à des parties fermées invariantes de M. La comapcité de M assurera l'existence de mesures invariantes supportées par ces parties. La finitude du volume de M ne l'entraîne à priori pas. Cependant, un peu plus d'analyse de notre situation particulière (voir [15]), dont on se permet de se passer pour ne pas encombrer davantage le texte, permet de traîter ce cas là.

Notre approche ressemble à ce niveau à celle de [7].

Soit S un groupe de Heisenberg tordu, produit semi-direct de S^1 par He_d, et soit $Z = \{\phi^s, s \in [0, \pi]\}$ son centre. Il est facile de tirer du fait que (d'après ce qui précède) les orbites du groupes de Heisenberg sont non temporelles, que les orbites de Z sont isotropes. Elles sont ainsi de plus géodésiques d'après le lemme 5.1. Il s'ensuit que Z n'admet pas de point fixe. En effet au voisinage d'un tel point, il y aura des géodésiques fermées arbitrairement petites (ce qui contredit la convexité locale des variétés munies de connexions affines).

Nous allons maintenant montrer par l'absurde que l'action de S est localement libre et ce en montrant que sinon l'action de Z ne l'est pas. En effet soit F le fermé de M des points ayant un stabilisateur S_x non discret. Notons $\mathcal{S}_x$ son algèbre de Lie. On se restreint au fermé F_k où la dimension de $\mathcal{S}_x$ est maximale égale à k (certainement $k < \dim(S)$ car sinon en particulier Z aura un point fixe). L'action de S sur F_k préserve une mesure finie μ car F_k est compact et S est résoluble. La méthode de preuve suivante est standard (voir par exemple [6]). Considérons l'application de Gauss: $Ga\colon F_k \to Gr^k(\mathcal{S})$ qui à $x \in F_k$ associe $\mathcal{S}_x$ l'algèbre de Lie de son stabilisateur. Elle est équivariante par rapport aux actions de S. Ainsi $Ga^*(\mu)$ est une mesure sur $Gr^k(\mathcal{S})$ invariante par l'action de S.

Le lemme de Furstenberg [6], s'applique aux actions des groupes algébriques. Considérons donc la restriction de l'action précédente au groupe de Heisenberg $He_d \subset S$. D'après Furstenberg, cette action se factorise sur le support de la mesure, en l'action d'un groupe compact. Mais He_d n'a aucun groupe quotient compact non trivial. Il s'ensuit que pour μ presque tout x, $\mathcal{S}_x$ est normalisée par He_d. Si $\mathcal{S}_x \cap \mathcal{HE}_d$ est non triviale, on aura un idéal non trivial de $\mathcal{HE}_d$. Il contiendra obligatoirement le centre. Lorsque $\mathcal{S}_x$ intersecte trivialement $\mathcal{HE}_d$, elle en sera un supplémentaire pour des raisons de dimension. Ainsi $\mathcal{S}_x$ sera normalisée par toute l'algèbre $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que $\mathcal{S}_x$ est un idéal. Ceci est impossible. $\square$

5.3 Caractère lorentzien des orbites de S

Il découle du fait que l'action est localement libre et du fait que les orbites de He_d sont non temporelles, qu'en tout point x, et pour tout X tangent à He_d, les vecteurs $X(x)$ sont de type espace, sauf exactement celui correspondant au centre, qui est isotrope. Pour montrer que les orbites sont lorentziennes, il suffit donc de montrer qu'elles sont non dégénérées. Or dans ce cas, le noyau de la métrique sera exactement le centre (car l'action est localement libre). L'ensemble des points à orbite dégénérée est un fermé invariant. Il supporte donc une mesure finie invariante μ. La forme L^2 associée, i.e. $\kappa(X,Y) = \int \langle X(x), Y(x) \rangle d\mu(x)$ est une forme bi-invariante sur $\mathcal{S}$, positive et à noyau exactement le centre. Ainsi le quotient de $\mathcal{S}$ par son centre admettra une métrique définie positive bi-invariante. Mais ceci n'arrive pour un groupe résoluble que s'il est abélien. □

5.4 L'orthogonal

Notons $\mathcal{O}$ la distribution orthogonale aux orbites de $\mathcal{S}$. On va montrer que $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ est intégrable (où $\mathcal{Z}$ est le champ de directions déterminé par le centre Z). En tout point x, on a une forme antisymétrique: $\omega : \mathcal{O}_x \times \mathcal{O}_x \to \mathcal{S}_x$, $\omega(A,B) =$ la partie normale du crochet $[A,B]$. L'identification canonique de $\mathcal{S}_x$ à l'algèbre de Lie $\mathcal{S}$ permet d'identifier ω à une forme à valeurs dans $\mathcal{S}$. Elle vérifie la relation d'équivariance évidente: $\omega(gA, gB) = Ad(g)\omega(A,B)$. Or la métrique sur $\mathcal{O}$ est riemannienne, et par suite, pour tous A, B vecteurs de $\mathcal{O}$, l'orbite $\{(gA, gB)/, g \in S\}$ est précompacte dans $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$. Il en découle que l'orbite de $\omega(A,B)$ par l'action adjointe de S est précompacte. On vérifie facilement que ceci n'est le cas que du centre Donc ω est à valeurs dans $\mathcal{Z}$. ce qui veut exactement dire que $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ est intégrable. □

Pour ce qui précède ainsi que ce qui suit, on peut consulter respectivement [4] et [3], où l'on traîte de situations semblables mais plus délicates.

5.5 Structure

On va transformer "canoniquement" la métrique lorentzienne $\langle\ ,\ \rangle$ de M en une métrique riemannienne $(\ ,\ )$ (qui ne sera aucunement invariante par l'action de S). On décréte que $\mathcal{O}$ reste orthogonale aux orbites et reste équipée de la même métrique. On définit la métrique sur $\mathcal{S}_x$ par $(X(x), Y(x)) = b(X,Y)$, où b est un produit scalaire défini positif quelconque (loin d'être bi-invariant) sur

$\mathcal{S}$. On prendra par exemple: $(X_i(x), X_j(x)) = \delta_{ij}$ pour une certaine base $\{X_i\}$ de $\mathcal{S}$. Le groupe S sera également équipé de la métrique invariante à droite déterminée par b. Ainsi, pour tout x, le revêtement $S \to Sx$ est isométrique (cela ne veut en aucun cas dire que S agit isométriquement sur l'orbite Sx au sens de la nouvelle métrique riemannienne).

Soit L la feuille du feuilletage $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ passant par un certain point x_0 munie de la métrique induite de $(\, , \,)$. Le centre Z y agit isométriquement.

On a une application: p: $S \times L \to M$, $p(g,x) = gx$. On vérifie que p est une submersion riemannienne dont l'espace horizontal est $\mathcal{S} + \mathcal{O}$. Plus précisément, considérons $S \times_{S^1} L$, le quotient de $S \times L$ par l'action diagonale, et munissons le de la métrique projetée de celle de $\mathcal{S} + \mathcal{O}$. Alors l'application induite π: $S \times_{S^1} L \to M$ est localement isométrique. Par un résultat bien connu sur les applications localement isométriques, π est un revêtement, car la métrique sur $S \times_{S^1} L$ est évidemment complète.

Ainsi on a: $M = \Gamma \setminus S \times_{S^1} L$, où Γ est un réseau de $S \times Isom_{S^1}(L)$. Il ne reste donc du théorème de structure 1.14, dans le cas des groupes de Heisenberg tordus, qu'à expliciter la métrique lorentzienne sur $S \times_{S^1} L$. Plus précisément il s'agit de montrer que la métrique sur S est essentiellement bi-invariante (1.4), ce qui fera l'objet de la section suivante. .

5.6 Métriques lorentziennes sur S

On voit d'après ce qui précède que la métrique lorentzienne, notons la m, le long des orbites, qui est par hypothèse invariante par l'action à gauche de S, doit également être invariante à droite par Γ_0, la projection de Γ sur S. Cette projection n'est pas nécessairement discrète, mais elle est à covolume fini, au sens qu'il existe un sous-ensemble de volume fini dont les itérés par Γ_0 couvrent S. Considérons la fermeture topologique $\bar{\Gamma_0}$. C'est un sous-groupe unimodulaire (car tous les élements de $Ad(\mathcal{S})$ sont à valeurs propres de module égale à 1). On peut facilement voir que la mesure de Haar passe en une mesure finie sur $S/\bar{\Gamma_0}$.

Elle détérmine une mesure finie sur l'orbite de la métrique m, invariante par l'action adjointe de S. Donc, d'après le lemme de Furstenberg, l'action restreinte à He_d se factorise en l'action d'un groupe compact. Comme ci-dessus, ceci entraîne que m est $Ad(He_d)$–invariante.

A titre de complément, on a le fait suivant qui montre qu'il n' y a qu'une seule géométrie lorentzienne locale sur un groupe de Heisenberg tordu S. Elle mérite certainement d' être mieux comprise.

Proposition 5.2 *Deux métriques lorentziennes bi-invariantes quelconques sur $\mathcal{S}$ sont équivalentes par un automorphisme.*

Preuve Reprenons les notations de lapreuve de 1.3. Remarquons d'abord, qu'on peut supposer, après automorphisme, que $\beta = 0$. Il suffit pour cela d'appliquer un automorphisme trivial sur $\mathcal{HE}_d$ et envoyer t sur $t + \delta Z$ pour un δ convenable.

Pour normaliser le paramètre α, on applique le groupe à paramètre d'homothéties célèbres de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{HE}_d$. Il commute avec tous les automorphismes et donc se prolonge trivialement au produit semi-direct $\mathcal{S}$. Il se définit ainsi: $t \to t$, $Z \to \exp(2t)Z$ et $X \to \exp(t)X$, pour $X \in \mathbf{C}^d$. (Ceci induit des homothéties de $\tilde{S}$ muni de la métrique donnée initialement). □

5.7 Cas de $sl(2, \mathbf{R})$

D'après le théorème algébrique, l'action de $sl(2, \mathbf{R})$ s'intégre en une action d'un revêtement fini $PSL_k(2, \mathbf{R})$ de $PSL(2, \mathbf{R})$. Montrons brièvement dans ce qui suit le théorème de structure 1.13 dû à [7].

Soit κ la forme de Killing de $sl(2, \mathbf{R})$. Montrons que si $Y \in sl(2, \mathbf{R})$ est isotrope au sens de κ, alors $Y(x)$ est isotrope au sens de $\langle \ , \ \rangle_x$ pour tout x. En effet, il est connu qu'un tel Y est caractérisé par le fait que ad_X est nilpotent (ou de manière équivalente que la matrice 2×2 et à trace 0, correspondante, est nilpotente). Il est également connu, qu'alors il existe $X \in sl(2, \mathbf{R})$ tel que $[X, Y] = -Y$. En d'autres termes si ϕ^t est le flot de X, alors $\phi^t Y = \exp(-t)Y$. En particulier la fonction $\langle Y, Y\rangle$ décroît (exponentiellement) le long des orbites de X. Cette fonction est donc constamment nulle, car ϕ^t préserve le volume.

Il en découle que pour tout x, la métrique restreinte à l'orbite de x est proportionnelle à κ: $\langle X(x), Y(x)\rangle = f(x)\kappa(X, Y)$ pour tous X, Y et x.

Il s'ensuit en particulier qu'une orbite singulière est isotrope. Elle est en particulier de dimension 1 ou 0. Si elle est de dimension 1, elle sera d'après le lemme 5.1, une géodésique (isotrope). L'action de $sl(2, \mathbf{R})$ préserve sa structure affine, ce qu'on peut facilement voir être impossible. L'orbite singulière est donc de dimension 0, i.e. un point fixe x_0 de $PSL_k(2, \mathbf{R})$. Soit ϕ^t $(t \in [0, 2\pi])$ un groupe à un paramètre de rotation de $PSL_k(2, \mathbf{R})$. Les orbites par ϕ^t des points proches de x_0 sont des courbes également proches de x_0. On montrera dans la suite que ces courbes sont de type temps, i.e. à l'intérieur du cône de lumière. Ceci est impossible, car une courbe dirigée par un champ de cônes ne peut pas se refermer localement.

Le point x_0 peut être approché par des points non singuliers car l'ensemble de ces derniers points est de mesure totale (comme pour toute action fidèle préservant le volume d'un groupe semi-simple (voir par exemple [6]). La métrique sur l'orbite d'un point non singulier x est lorentzienne, car sinon l'orbite sera isotrope, ce qui est impossible car elle est de dimension 3. De plus $X(x)$ a le même caractère causal que X, pour tout $X \in sl(2, \mathbf{R})$. Comme tout X engendrant un flot non précompact est partout non temporel, il en découle que les champs de type temps sont exactement ceux qui déterminent des flots compacts.

Enfin la même méthode de preuve que pour les groupes de Heisenberg tordus permet de conclure que l'orthogonal est cette fois intégrable. □

5.8 Variétés homogènes

Soit $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ une variété lorentzienne homogène de volume fini. Son algèbre de champs de Killing agit dessus localement transitivement. En particulier en tout point, il y a des champs de Killing ayant un caractère causal quelconque. Ceci exclut la situation décrite en 5.1. En d'autres termes, le groupe d'isométries G contient un groupe S qui est soit localement isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$, soit isomorphe à un groupe de Heisenberg tordu. Dans chacun des ces deux cas, d'après ce qui précède, M admet un revêtement qui est un produit tordu de S par une variété riemannienne L. Notre hypothèse d' homogénéité nous permet de choisir L compacte. En effet comme dans les preuves précédentes, en désignant comme toujours par $\mathcal{O}$ l'orthogonal aux orbites, on prendra pour L soit une feuille de $\mathcal{O}$ lorsque S est localement isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$, soit une feuille de $\mathcal{O} + \mathcal{Z}$ lorsque S est un groupe de Heisenberg tordu. Soit H la composante neutre du sous-groupe de G fixant (globalement) L. On déduit aisément du théorème algébrique que H est compact. Il en va de même pour L, car H agit transitivement dessus (à cause de l' homogénéité de M).

Enfin pour voir que le groupe du revêtement Γ est le graphe d'un homomorphisme d'un réseau de S, on remarque simplement que par compacité de L, Γ se projette sur un groupe discret de S. Le noyau de la projection de Γ sur S est un sous-groupe fini d'isométries de L, qu'on peut supposer trivial en passant à un quotient fini de L. □

Bibliographie

[1] **S Adams**, **G Stuck**, *The isometry group of a compact Lorentz manifold, I*, Invent. Math. 129 (1997) 239–261

[2] **S Adams**, **G Stuck**, *The isometry group of a compact Lorentz manifold, II*, Invent. Math. 129 (1997) 263–287

[3] **G Cairns**, **E Ghys**, *Totally geodesic foliations on* 4*–manifolds*, J. Diff. Geom. 23 (1986) 241–254

[4] **Y Carrière**, **E Ghys**, *Feuilletages totalement géodésiques*, An. Acad. Brasil. Ciênc 53 (1981) 427–432

[5] **G D'Ambra**, *Isometry groups of Lorentz manifolds*, Invent. Math. 92 (1988) 555–565

[6] **G D'Ambra**, **M Gromov**, *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics*, Surveys in Differential Geometry (Supplement to the Journal of Differential Geometry), 1 (1991) 19–111

[7] **M Gromov**, *Rigid transformation groups*, dans: "Géometrie différentielle ", D Bernard et Choquet-Bruhat (editeurs), Travaux encours 33, Paris, Hermann (1988)

[8] **J Marsden**, *On completeness of homogeneous pseudo-riemannian manifolds*, Ind. Univ. Math. J. 22 (1973) 1065–1066

[9] **A Medina**, **Ph Revoy**, *Les groupes oscillateures et leurs réseaux*, Manuscripta Math. 52 (1985) 81–95

[10] **M S Raghunathan**, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer–Verlag (1972)

[11] **R F Streater**, *The representations of the oscillator group*, Commun. Math. Phys. 4 (1967) 217–236

[12] **J Wolf**, *Homogeneous manifolds of constant curvature*, Comment. Math. Helv. 36 (1961) 112–147

[13] **A Zeghib**, *Killing fields in compact Lorentz* 3*–manifolds*, J. Diff. Geom. 43 (1996) 859–894

[14] **A Zeghib**, *The identity component of the isometry group of a compact Lorentz manifold*, Duke Math. Journal, (à paraître)

[15] **A Zeghib**, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part I: Foundations of Lorentz dynamics*, preprint

[16] **R Zimmer**, *On the automorphism group of a compact Lorentz manifold and other geometric manifolds*, Invent. Math. 83 (1986) 411–426

Ecole Normale Superieure de Lyon
UMPA, UMR 128 CNRS
46 Allee d'Italie, 69364 Lyon, FRANCE

Email: `zeghib@umpa.ens-lyon.fr`

Received: 15 November 1997