Владикавказский математический журнал
Июнь–сентябрь, 2001, Том 3, Выпуск 3

УДК **517.5**

ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ

М. С. Алборова

Сформулирована и доказана теорема о плотности пространства бесконечно дифференцируемых функций в анизотропных пространствах Соболева при некоторых условиях наложенных на область.

В настоящей работе изучается вопрос о плотности пространства бесконечно дифференцируемых функций в анизотропных пространствах Соболева. Мы будем рассматривать пространства $L_p^l(\Omega)$ характеризующиеся конечностью нормы:

$$\|f\|_{L_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha:l|=1} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$$

здесь Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндексы, $|\alpha : l| := \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n}$, $D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

В изотропном случае различные аспекты задачи о плотности пространства бесконечно дифференцируемых непрерывных функций в пространствах Соболева хорошо изучены в работах многих авторов, см., например, С. Л. Соболев [1], В. Г. Мазья [2], Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес [3], Дж. Полкин [4], Л. Хедберг [5].

В анизотропном случае вопрос о плотности изучался для областей, удовлетворяющих условию рога и для близкого класса областей в работах О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [6], С. В. Успенского, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкина [7], П. И. Лизоркина, В. И. Буренкова, С. К. Водопьянова и др.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндекс, $l_i > 0$.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $\mathbb{R}^n$

$$H_t(x) = (t^{\frac{l^*}{l_1}} x_1, \dots, t^{\frac{l^*}{l_n}} x_n) \quad (t \in \mathbb{R}^+), \tag{1}$$

где $\frac{1}{l^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}$, и гладкую H_t-однородную метрику, определяемую вектором $l \in \mathbb{N}^n$ по формуле

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^{2l_i}\right)^{\frac{1}{2l^*}} \tag{2}$$

непрерывную на $\mathbb{R}^n$.

Шаром с центром в точке x радиуса r называется, как обычно, множество

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < r\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что функция $f \in L_p(\Omega)$ принадлежит классу $L_p^l(\Omega)$, если функция имеет обобщенные производные $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$, $|\alpha : l| = 1$. Здесь $D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ и $|\alpha : l| = \frac{\alpha_1}{l_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{l_n}$. Для таких функций определим полунорму

$$\|f\|_{L_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha:l|=1}\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{3}$$

Пространством $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ назовем замыкание в норме (3) множества $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с носителем в Ω.

Пусть K — подмножество $\mathbb{R}^n$. Обозначим множество функций из $L_p^l(\mathbb{R}^n)$ имеющих компактные носители в K через $(L_p^l)_K$.

Пусть $e \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Емкостью множества e назовем величину:

$$\operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l) = \inf\{\|U\|_{L_p^l}^p : U \in \mathfrak{N}(e)\},$$

где $\mathfrak{N}(e) = \{U \in C_0^\infty : U = 1$ в окрестности $e\}$ (см. [8]).

Введем еще полунорму:

$$|U|_{p,l^*,B_r} = \sum_{0<|\beta:l|\leqslant 1} r^{l^*(|\beta:l|-1)}\|D^\beta U\|_{L_p(B_r)},$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$.

Приведем следующие необходимые нам в дальнейшем результаты.

Теорема [9]. *Пусть e — замкнутое подмножество шара B_r. Для всех функций $U \in C^\infty(\bar{B}_r)$ таких, что $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} U, e) > 0$ верно неравенство*

$$\|U\|_{L_q(B_r)} \leqslant C|U|_{p,l^*,B_r},$$

где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $\kappa = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i} \leqslant 1$, при $\kappa = 1$, $1 \leqslant p = q < \infty$. Константа C допускает оценку

$$C^{-p} \geqslant r^{-\frac{np}{q}}, \quad \operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l(B_{2r})).$$

Следствие 1. *Существует постоянная M такая, что*

$$\int\limits_{\rho(x,y)\leqslant\varepsilon} |D^\beta f(y)|^p dy \leqslant M\varepsilon^{pl^*(1-|\beta:l|)} \sum_{|\alpha:l|=1} \int\limits_{\rho(x,y)\leqslant 2\varepsilon} |D^\alpha f(y)|^p dy \tag{4}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и для всех $f \in L^l_p(\mathbb{R}^n)$, которые обращаются в ноль на открытом подмножестве $B_\varepsilon(x)$.

Лемма 1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Существует функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая, что $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ для любого $x \in K$, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ вне ε-окрестности K и для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ имеет место оценка*

$$|D^\alpha \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant K_\alpha \cdot \varepsilon^{-l^*|\alpha:l|}. \tag{5}$$

$\lhd$ Зафиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, отличную от нуля в шаре $\rho(x) < 1$ и тождественно равную нулю вне этого шара. Пусть $\Theta(x) = \sum_\nu \varphi(x - \nu)$, где ν — пробегает все точки с целочисленными координатами в $\mathbb{R}^n$. Очевидно $\Theta(x) > 0$. Положим $\eta_\nu(x) = \frac{\varphi(x-\nu)}{\Theta(x)}$. Имеем $\eta_\nu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_\nu(x) = 0$ при $\rho(x-\nu) \geqslant 1$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ верно $\sum_\nu \eta_\nu(x) = 1$. Пусть теперь $h = \frac{1}{2c}\varepsilon$, где c — постоянная из неравенства треугольника для выбранного ρ-расстояния. Рассмотрим систему функций $\eta_\nu(H_{h^{-1}}(x))$. Пусть $\{\nu\}$ — все векторы, для которых носитель функции $\eta_\nu(H_{h^{-1}}(x))$ пересекает множество K. Положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{\{\nu\}} \eta_\nu(H_{h^{-1}}(x)).$$

Очевидно, $\varphi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ для $x \in K$, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ для всех x, лежащих вне ε-окрестности K и

$$|D^\alpha \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{K_\alpha}{\varepsilon^{l^*|\alpha:l|}}. \ \rhd$$

Отметим, что доказательство леммы основано на схеме, предложенной в изотропном случае Ю. Г. Решетняком [10] и распространенной на анизотропный случай С. К. Водопьяновым [8].

Мы будем рассматривать области K, удовлетворяющие условию (A):

(A) Существуют $\tau > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus K$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,y) < \delta$ найдется спрямляемая дуга $\gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ длиной $l(\gamma)$, соединяющая x и y, причем $l(\gamma) \leqslant c\rho(x,y)$ и для любого $z \in \gamma$ имеют место неравенства

$$\rho(z, \partial K) > \tau\rho(x, \partial K), \quad \rho(z, \partial K) < \tau\rho(y, \partial K),$$

здесь постоянная c не зависит от x и y. Метрика ρ берется вида (2).

2. Теорема о плотности

Теорема. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, удовлетворяющий условию (A). Тогда $C_0^\infty(K)$ плотно $(L^l_p)_K$.*

◁ Используя следствие 1, мы видим, что существует постоянная M такая, что

$$\int\limits_{\rho(x,y)\leqslant\varepsilon} |D^\beta f(y)|^p dy \leqslant M\varepsilon^{pl^*(1-|\beta:l|)} \sum_{|\alpha:l|=1} \int\limits_{\rho(x,y)\leqslant 2\varepsilon} |D^\alpha f(y)|^p dy \qquad (6)$$

для всех $f \in (L^l_p)_K$, $x \in \partial K$ и достаточно малом ε.

Рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon(x)$ из леммы 1. Используя классический метод, достаточно доказать, что $D'(K) \cap L^l_p(\mathbb{R}^n)$ плотно в $(L^l_p)_K$. Пусть $f \in (L^l_p)_K$ и пусть $f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \cdot f$. Покажем, что $\{D^\alpha f_\varepsilon\}$, ограниченное множество в L_p для $0 \leqslant |\alpha : l| \leqslant 1$ и что $\{f_\varepsilon\}$ сходится к f в L_p. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{\varepsilon j}\}$ слабо сходящаяся в L^l_p к функции f. По теореме Банаха — Сакса слабо сходящаяся последовательность $\{f_{\varepsilon j}\}$ содержит подпоследовательность, свертки которой сильно сходятся к f в L^l_p.

Так как $D^\alpha f_\varepsilon = \sum \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^{\alpha-\beta}\varphi_\varepsilon \cdot D^\beta f$, то достаточно показать, что $\{D^\gamma\varphi_\varepsilon \cdot D^\beta f\}$ ограничена в L_p, $|\gamma+\beta| = |\alpha|$, $|\alpha : l| = 1$. При $\gamma = 0$, утверждение очевидно. Положим $\gamma \neq 0$. Пусть $\delta(x)$ — расстояние от точки x до K, $\delta(x) = \inf\{\rho(x,y)\ y \in K\}$. Функции $D^\gamma\varphi_\varepsilon$ имеют носители в множестве $L_\varepsilon = \{x : \delta(x) \leqslant \varepsilon\}$. Следовательно,

$$\int |D^\gamma\varphi_\varepsilon(x) D^\beta f(x)|^p dx \leqslant c_\gamma \varepsilon^{l^*|\gamma:l|} \int\limits_{L_\varepsilon} |D^\beta f|^p dx. \qquad (7)$$

Покроем $\mathbb{R}^n$ шарами $B_\varepsilon(x)$. В силу условия (A) существует постоянная N такая, что каждое $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит не более чем N шарам. Пусть $\{z_k\}$ — нумерация центров шаров, которые пересекают L_ε. Тогда для каждого k расстояние от z_k до ∂K не больше чем $2\tau\varepsilon$, таким образом найдется точка $x_k \in \partial K$ такая, что $\rho(x_k, z_k) \leqslant 2\tau\varepsilon$ и $B_{2\varepsilon}(z_k) \subset B_{3\tau C\varepsilon}(x_k)$. И, следовательно, шары $\{B_{3\tau C\varepsilon}(x_k)\}$ покрывают L_ε. Используя (6) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{L_\varepsilon} |D^\beta f|^p dx &\leqslant M \sum_k \int\limits_{\rho(x,x_k)\leqslant 3\tau C\varepsilon} |D^\beta f(x)|^p dx \\ &\leqslant M\varepsilon^{pl^*(1-|\beta:l|)} \sum_n \sum_{|\alpha:l|=1} \int\limits_{\rho(x,x_k)\leqslant 3C\tau\varepsilon} |D^\alpha f(x)|^p dx \\ &\leqslant M\varepsilon^{pl^*(1-|\beta:l|)} \|f\|_{L^l_p}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Неравенства (7) и (8) показывают, что $\|f_\varepsilon\|_{p,l} \leqslant M\|f\|_{p,l}$ для всех достаточно малых ε. Окончательно отметим, что $f - f_\varepsilon$ имеет носитель в L_ε и $\|f - f_\varepsilon\|_{p,l} < M\varepsilon^{l^*}\|f\|_{p,l}$, таким образом $f_\varepsilon \to f$ в L_p. ▷

Литература

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.—225 с.
2. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.—416 с.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М.: Мир, 1971.—371 с.
4. *Polking J. C.* Approximation in L^p by solution of eliptic partial differential equations //Amer. J. Math.—1972.—V. 94.—P. 1231–1244.
5. *Hedberg L. I.* Approximation in the mean by solution of eliptic equations // Duke Math.—1973.—V. 40, No. 1.—P. 9–16.
6. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. —М.: Наука.—1975.—408 с.
7. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.— Новосибирск: Наука 1978.
8. *Алборова М. С., Водопьянов С. К.* Устранимые особенности для ограниченных решений квазиэллиптических уравнений // Деп. в ВИНИТИ.—1987, В87-804.
9. *Алборова М. С.* Некоторые интегральные неравенства и теоремы вложения для анизотропных функциональных пространств // Деп. в ВИНИТИ, 2000, 3258-В-00.
10. *Решетняк Ю. Г.* О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 5.—С. 1109–1139.

г. Владикавказ *Статья поступила 20 сентября 2001*