Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2001, Том 3, Выпуск 4

УДК **517.549.8**

МЕТОД РОТЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. П. Хапов, М. Х. Шхануков-Лафишев

Установлена сходимость метода Роте со скоростью $O(\tau^2)$ для достаточно гладких решений первой начально краевой задачи для уравнения фильтрации в трещиновато-пористой среде.

В работах [1] и [2] сформулированы основные положения и уравнения нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых средах. В случае изотропной среды исследование течения однородной слабосжимаемой жидкости приводит к дифференциальному уравнению псевдопараболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + \chi \frac{\partial \Delta U}{\partial t} + f(x,t), \tag{1}$$

где

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2},$$

a^2, $\chi > 0$ — постоянные, зависящие от геометрии пласта и свойств фильтрующей жидкости.

В области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \equiv \{x \,|\, 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2,3\}$ для уравнения (1) рассмотрим задачу

$$U|_{\partial\omega} = 0, \quad U(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

1. Априорная оценка. Пусть существует регулярное решение задачи (1)–(2). Сначала получим для решения задачи априорную оценку в дифференциальной форме. Для этого умножим уравнение (1) скалярно на U.

$$(U_t, U) - a^2(\Delta U, U) - \chi \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta U, U \right) = (f, U). \tag{3}$$

Преобразуем с учетом граничных условий (2) каждое слагаемое выражения (3)

$$(f, U) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_{2,\Omega}^2 + \varepsilon \|U\|_{2,\Omega}^2,$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} U\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} U^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U\|^2_{2,\Omega},$$

$$\int\limits_{\Omega} \Delta U \cdot U\,dx = -\|U\|^2_{2,\Omega}, \quad U_x^2 = U_{x_1}^2 + U_{x_2}^2 + U_{x_3}^2,$$

$$\|U_x\|^2_{2,\Omega} = \int\limits_{\Omega} U_x^2\,dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\Delta U \cdot U\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U_x\|^2_{2,\Omega},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная.

Подставляя полученные выражения в тождество (3), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U\|^2_{2,\Omega} + a^2\|U_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U_x\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{2,\Omega} + \varepsilon\|U\|^2_{2,\Omega}. \tag{4}$$

Так как

$$\|U\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{l^2}{2}\|U_x\|^2_{2,\Omega}, \quad l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2,$$

то из (4) при $\varepsilon < 2a^2/l^2$ находим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U\|^2_{2,\Omega} + \left(a^2 - \frac{\varepsilon l^2}{2}\right)\|U_x\|^2_{2,\Omega} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|U\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{2,\Omega}.$$

Проинтегрируем последнее выражение по τ от 0 до t. Тогда получим

$$\|U\|^2_{2,\Omega} + \nu\|U_x\|^2_{2,Q_t} + \|U_x\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{2,Q_t} + \|U(x,0)\|^2_{2,\Omega} + \|U_x(x,0)\|^2_{2,\Omega}, \tag{5}$$

где $\|U\|^2_{2,Q_t} = \int\limits_0^t \|U\|^2_{2,Q_t}d\tau$, ν — положительная постоянная.

Из априорной оценки (5) следует единственность решения задачи (1)–(2).

2. Метод Роте. Уравнение (1) заменим дифференциально-разностным

$$y_{\bar t} = a^2(\sigma\Delta y + (1-\sigma)\Delta\breve y) + \chi\Delta y_{\bar t} + f(x,t), \tag{6}$$

где $y_{\bar t} = (y - \breve y)/\tau$, $y = y^j = y(x,t_j)$, $\breve y = y^{j-1} \cdot \tau$ — шаг сетки по времени, σ — числовой параметр.

В дальнейшем будем рассматривать только случай $\sigma = \frac{1}{2}$.

К уравнению (6) применим дополнительные условия

$$y\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad y(x,0) = \varphi(x). \tag{7}$$

Для доказательства сходимости метода Роте, получим априорную оценку для решения задачи (6), (7).

Умножим уравнение (6) скалярно на $y_{\bar{t}}$

$$(y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) - 0.5a^2(\Delta(y+\breve{y}), y_{\bar{t}}) - \chi(\Delta y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) = (f, y_{\bar{t}}). \tag{8}$$

Преобразуем каждое слагаемое (8) с учетом граничных условий (7)

$$(\Delta(y+\breve{y}), y_{\bar{t}}) = \int\limits_{\Omega_j} \Delta(y+\breve{y}) \cdot y_{\bar{t}}\, dx = -\Big(\int\limits_{\Omega_j} y_x^2 dx\Big), \tag{9}$$

где $y_x^2 = y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2 + y_{x_3}^2$, $\Omega_j = \Omega(t_j)$ — сечение Q_t плоскостью $t = t_j = j \cdot \tau$,

$$(\Delta y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) = -\int\limits_{\Omega_j} y_{x\bar{t}}^2\, dx. \tag{10}$$

Подставляя (9), (10) в соотношение (8), находим

$$\|y_{\bar{t}}\|_{2,\Omega_j}^2 + 0.5a^2\Big(\|y_x\|_{2,\Omega_j}^2\Big)_{\bar{t}} + \chi\|y_{\bar{t}}\|_{2,\Omega_j}^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{2,\Omega_j}^2 + \varepsilon\|y_{\bar{t}}\|_{2,\Omega_j}^2. \tag{11}$$

Выберем в (11) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, затем проинтегрируем полученное выражение по t от τ до T'. Тогда получим требуемую оценку

$$\begin{aligned} \sum_{t=\tau}^{T'} \|y_{\bar{t}}\|_{2,\Omega_j}^2 \tau + a^2\|y_x\|_{2,\Omega_j}^2 + \chi \sum_{t=\tau}^{T'} \|y_{x\bar{t}}(t)\|_{2,\Omega_j}^2 \tau \\ \leqslant \sum_{t=\tau}^{T'} \|f(t)\|_{2,\Omega_j}^2 \tau + a^2\|y(x,0)\|_{2,\Omega_0}^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим через $z = y - u$ и подставим $y = z + u$ в уравнение (6), тогда найдем

$$\begin{aligned} & z_t = 0.5a^2\Delta(z+\breve{z}) + \chi\Delta z_{\bar{t}} + \psi, \\ & z_0 = z_N = 0, \\ & z(x,0) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\psi = 0.5a^2\Delta(U+\breve{U}) + \chi\Delta U_{\bar{t}} + f - \Delta U_{\bar{t}} = O(\tau^2)$. Применяя оценку (12) к задаче (1)–(2)для погрешности (13) получим, что в классе достаточно гладких решений исходной задачи (1)–(2) метод Роте сходится со скоростью $O(\tau^2)$.

Литература

1. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтраций однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ.—1960.—Т. 25, вып. 5.—С. 852–864.
2. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах.—М.: Недра, 1984.

г. Нальчик *Статья поступила 26 декабря 2001 г.*