Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2001, Том 3, Выпуск 4

УДК **519.4**

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $GL_k(F)$

В. Н. Шокуев

В заметке дается описание циклических подгрупп полной линейной группы $GL_k(F)$ степени k над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль при условии, что характеристические корни матриц, порождающих эти подгруппы, являются попарно различными.

Пусть $GL_k(F)$ — полная линейная группа степени k над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль, $u \in GL_k(F)$ и рассмотрим характеристическое уравнение

$$x^k - a_1x^{k-1} - \dots - a_k = 0 \tag{1}$$

матрицы u. Согласно теореме Гамильтона — Кэли матрица u является корнем своего характеристического полинома, т. е.

$$u^k = a_1u^{k-1} + a_2u^{k-2} - \dots - a_ku^0, \tag{2}$$

где $a_k = \det(u)$, u^0 — единичная матрица (порядка k). Отсюда имеем

$$u^n = a_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} - \dots - a_ku^{n-k} \quad (n \geqslant k, n \in \mathbb{N}, a_k \neq 0), \tag{3}$$

т. е. линейное однородное рекуррентное уравнение порядка k.

Воспользуемся следующим результатом автора ([2], с. 65, теорема 10.7).

Если корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3$ уравнения (1) простые (т. е. попарно различные), то решение линейного однородного рекуррентного уравнения порядка k

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} - \dots - a_ku_{n-k} \quad (n \geqslant k, a_k \neq 0),$$

с коэффициентами a_i из алгебраически замкнутого поля характеристики нуль определяется по формуле

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \frac{u_{k-1} - s_{i1}u_{k-2} + s_{i2}u_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1}s_{i,k-1}u_0}{(\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2)\dots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\dots(\alpha_i - \alpha_k)}, \quad n \geqslant k,$$

где s_{ij} — элементарный симметрический многочлен степени j от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k$.

Применяя это к рассматриваемому случаю, приходим к следующему предложению:

Если характеристические корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ матрицы $u \in GL_k(F)$ простые, то для любого натурального числа $n \geqslant k$ элемент u^n циклической подгруппы $\langle u \rangle$ группы $GL_k(F)$ определяется формулой

$$u^n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \frac{(u^{k-1} - s_{i1}u^{k-2} + s_{i2}u^{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}s_{i,k-1}u^0)}{(\alpha_i - \alpha_1)\ldots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i - \alpha_k)}. \tag{4}$$

Чтобы найти представление для u^{-n} в виде (4) при любом натуральном $n \geqslant k$, достаточно заметить, что $u^{-n} = (u^{-1})^n$, и изложенное относительно матрицы u повторить для матрицы u^{-1} (обратной к матрице u). При этом составление характеристического уравнения матрицы u^{-1} может быть заменено на следующие выкладки: ввиду того, что $\det(u) = a_k \neq 0$ из (2) следует рекуррентное уравнение

$$\begin{gathered}(u^{-1})^n = -a_k^{-1}a_{k-1}(u^{-1})^{n-1} + a_k^{-1}a_{k-2}(u^{-1})^{n-2} - \ldots \\ -a_k^{-1}a_1(u^{-1})^{n-k+1} + a_k^{-1}u^{n-k}, \quad a_k^{-1} \neq 0,\ n \geqslant k,\end{gathered}$$

которое решаем описанным в [2] путем.

Можно воспользоваться и тем, что $u^{-n} = (u^{-1})^n$, и обращение матрицы u^n найти из формулы (4) (если вычисление u^{-n} связано с практической задачей, то предварительно должны быть вычислены матрицы $u^2, u^3, \ldots, u^{k-1}$).

Для малых значений k можно получить полное описание циклических подгрупп $\langle u \rangle$ групп $GL_k(F)$ без ограничений на характеристические корни матриц u, исходя из формулы (4); при $k = 2$ и $k = 3$ подробные выкладки содержатся в заметках автора [3, 4].

Литература

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.—496 с.
2. *Шокуев В. Н.* Гауссовы коэффициенты: Учебное пособие.—Нальчик: Изд-во КБГУ, 1988.—98 с.
3. *Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_3(F)$ // Известия КБНЦ РАН.—2001.—№ 2 (6).—С. 75–77.
4. *Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_2(F)$ // Известия КБНЦ РАН.—2001.—№ 2 (7).—С. 72–74.

г. Нальчик *Статья поступила 22 декабря 2001 г.*