Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2003, Том 5, Выпуск 2

УДК **517.55**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

Х. П. Дзебисов

В работе продолжены исследования автора по теории интегральных представлений аналитических функций двух комплексных переменных. Получены новые интегральные представления, из которых как частные случаи вытекают известные. На их основе решается задача восстановления функции в неограниченных областях двумерного комплексного пространства по значениям самой функции и ее производных, заданных на определяющих многообразиях.

Рассмотрим в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ класс областей вида (для краткости $(z) := (z_1, z_2)$)

$$G_1 = \operatorname{int} \bigcap_{0<\alpha<\omega<\beta<1} \left\{ (z) : \frac{z_1}{r_1(\omega)} e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}} \cdot e^{|z_2| \frac{\beta-\omega}{r_2(\omega)(\omega-\alpha)}} < 1 \right\}, \qquad (1)$$

для которых $r_1(\omega)$ и $r_2(\omega)$ удовлетворяют условиям: $r(\omega)$ — положительная непрерывная на сегменте $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ и непрерывно дифференцируемая на полусегменте $0 < \omega \leqslant 1$ функция, удовлетворяющая условиям $r_1(0) = 0$, $r_1'(\omega) > 0$; функции $r_1(\omega)$ и $r_2(\omega)$ связаны соотношением

$$\frac{r_2'(\omega)}{r_2(\omega)} = -\frac{\omega}{1-\omega} \cdot \frac{r_1'(\omega)}{r_1(\omega)} \cdot \frac{r_1'(\omega)}{r_1(\omega)}, \quad 0 < \omega \leqslant 1, \quad r_2(\omega) = \infty.$$

Отсюда вытекает, что в интервале $0 < \omega < 1$ функция $r_1(\omega)$ возрастает, а $r_2(\omega)$ убывает. По поводу областей G_1 имеют место следующие утверждения.

1. Граница Γ области G_1 является огибающей семейства логарифмических кривых

$$|z_2| + \frac{\omega-\alpha}{\beta-\omega} r_2(\omega) \ln |z_1| - \frac{\omega-\alpha}{\beta-\omega} r_2(\omega) \ln \left[e^{\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}} r_1(\omega) \right] = 0.$$

2. Класс областей G_1 при $\alpha \to 0$ и $\beta \leqslant 1$ совпадает с классом неограниченных полных двоякокруговых областей, границы которых $\Phi(z_1, \tilde z_1, z_2, \tilde z_2) = 0$ дважды непрерывно дифференцируемы и аналитически выпуклы [4].

3. Класс областей G_1, задаваемых условием (1) непуст. Так, например, если $\alpha \to 0$, $\beta \leqslant 1$, $r_1(\omega) = e^{-\frac{1-\omega}{\omega}}$, $r_2(\omega) = \frac{1-\omega}{\omega}$, то области $G_1 = \{(z) : \ln|z_1| + \beta|z_2| < 1\}$ и при фиксированном β называется логарифмическим гинерконусом, а в случае $\beta = 1$ — единичным логарифмическим гинерконусом.

Определение 1. Множество

$$R(\alpha,\beta)=\{(z):\,|z_1|=r_1(\omega),|z_2|=r_2(\omega),\,\alpha\leqslant\omega\leqslant\beta\}$$

назовем *определяющим трехмерным многообразием* для областей G_1.

Очевидно, что $R(\alpha,\beta)\subset G_1$ и при $\alpha\neq 0$ является ограниченной, а при $\alpha=0$ — неограниченной гиперповерхностью, причем $R(0,\beta)\subset G_1$.

В работе [5] введены интегро-дифференциальные операторы в случае звездных областей пространства $\mathbb{C}^n$ (здесь случай $n=2$):

$$L^{(k,-\widetilde{k})}_{A\widetilde{A}}[f(z)]=L^{(-\widetilde{k})}_{\widetilde{A}}[L^{(k)}_{A}[f(z)]],\quad L^{(-k,\widetilde{k})}_{A\widetilde{A}}[f(z)]=L^{(\widetilde{k})}_{\widetilde{A}}[L^{k}_{A}[f(z)]],\quad L^{(0,0)}_{A\widetilde{A}}[f(z)]=f(z),$$

$$L^{(k)}_{A}[f(z)]=L_{A_k}[L_{A_{k-1}}][\ldots[L_{A_1}[f(z)]]\ldots],\quad L_{A_j}[f(z)]=\gamma_j f(z)+\delta_1^{(j)}z_1f'_{z_1}+\delta_2^{(j)}z_2f'_{z_2}(z),$$

$$\gamma_j\geqslant 1,\quad \widetilde{\gamma}_{\widetilde{j}}\geqslant 1,\quad \delta_1^{(j)}+\delta_2^{(j)}>0,\quad \delta_1^{(\widetilde{j})}+\delta_2^{(\widetilde{j})}>0,\quad j=1,2,\ldots,k,\quad \widetilde{j}=1,2,\ldots,\widetilde{k},\tag{2}$$

$$L^{(-k)}_{A}[f(z)]=\int_0^1 d\varepsilon_1\int_0^1 d\varepsilon_2\ldots\int_0^1 d\epsilon_{k-1}\int_0^1 \varepsilon_1^{\gamma_1-1}\ldots\varepsilon_k^{\gamma_k-1}$$

$$\times f(\varepsilon_1^{\delta_1^{(1)}}\ldots\varepsilon_k^{\delta_1^{(k)}}z_1,\varepsilon_1^{\delta_2^{(1)}}\ldots\varepsilon_k^{\delta_2^{(k)}}z_2)\,d\varepsilon_k,\quad L^{(0)}_{A}[f]=L^{(0)}_{\widetilde{A}}[f]=f.$$

В [5] показано, что операторы $L^{(k_1-\widetilde{k})}_{A\widetilde{A}}[f]$ и $L^{(-k,\widetilde{k})}_{A\widetilde{A}}[f]$ являются обратными друг другу. Заметим далее, что

$$L^{(k,-\widetilde{k})}_{A\widetilde{A}}[z_1^mz_2^n]=\frac{P^{k}_{mn}}{P^{\widetilde{k}}_{mn}}z_1^mz_2^n,\tag{3}$$

$$L^{(-k,\widetilde{k})}_{A\widetilde{A}}[z_1^mz_2^n]=\frac{P^{(\widetilde{k})}_{mn}}{P^{(k)}_{mn}}z_1^mz_2^n,\tag{4}$$

$$P^{(k)}_{mn}=\prod_{j=1}^{k}(\gamma_j+\delta_1^{(j)}m+\delta_2^{(j)}n),$$

$$P^{(\widetilde{k})}_{mn}=\prod_{\widetilde{j}=1}^{\widetilde{k}}(\widetilde{\gamma}_{\widetilde{j}}+\widetilde{\delta}_1^{(\widetilde{j})}m+\widetilde{\delta}_2^{(\widetilde{j})}n).$$

Операторы

$$L^{(0,\widetilde{1})}_{A\widetilde{A}}=L^{(\widetilde{1})}_{\widetilde{A}_1}[f]=\widetilde{\gamma}_1f+\widetilde{\delta}_1z_1f'_{z_1}+\widetilde{\delta}_2z_2f'_{z_2}\quad\text{при}\quad\widetilde{\gamma}_1=\widetilde{\delta}_1=1,\quad\widetilde{\delta}_2=0,$$

и

$$L^{(-1,0)}_{A\widetilde{A}}[f(z)]=\int_0^1\varepsilon^{\gamma_1-1}f(\varepsilon^{\delta_1}z_1,\varepsilon^{\delta_2}z_2)\,d\varepsilon\quad\text{при}\quad\gamma_1=\delta_2=1,\quad\delta_1=0,$$

ввиду их особой важности для дальнейшего, обозначим соответственно через $\bar{M}^{(1)}_{1,1}[f(z)]$ и $\bar{\bar{M}}^{(-1)}_{1,1}[f(z)]$, где $\bar{M}^{(1)}_{1,1}=f(z)+z_1f'_{z_1}$,

$$\bar{\bar{M}}^{(1)}_{1,1}[f(z)]=f(z)+z_2f'_{z_2},\quad \bar{M}^{(-1)}_{1,1}=\int_0^1 f(\varepsilon z_1,z_2)\,d\varepsilon,\quad M^{(-1)}_{1,1}=\int_0^1 f(z_1,\varepsilon z_2)\,d\varepsilon.$$

Положим также

$$\bar{M}_{1,1}^{(0)}[f(z)] = \bar{\bar{M}}_{1,1}^{(0)}[f(z)] = f(z).$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области $G_1 \ni (0,0)$. Тогда, если $f(z)$ и все ее частные производные до порядка μ ($\mu \geqslant 0$) включительно непрерывны в $\bar{G}_1$ за исключением точки $(0,\infty)$ при $\alpha \to 0$, то для $k = 0,1,\dots,\mu$, $\widetilde{k} = 0,1,\dots,\mu$, $(z) \in G_1$*

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{\gamma}{16\pi^4 i} \int\limits_0^\infty e^{-\tau_1} d\tau_1 \int\limits_0^\infty e^{-\tau_2} d\tau_2 \int\limits_\alpha^\beta d\omega \int\limits_0^{2\pi} dt_1 \int\limits_0^{2\pi} dt_2 \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\eta|=1} \widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu} M_{A\widetilde{A}}^{(1,1)} \\ \times \left[L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})} \left[\frac{e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta - \widetilde{u}} \right]\right] L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})} \left[f(r_1(\omega)\eta e^{it_1}, r_2(\omega)e^{it_2}v)\right] d\eta, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\widetilde{\lambda}(\omega) = \frac{e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}}}{(\omega-\alpha)^2}$, $\widetilde{u} = \widetilde{a} z_1 e^{\widetilde{b}z_2}$, $\widetilde{a} = \frac{e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}}}{r_1(\omega)}$, $\widetilde{b} = \frac{(\beta-\omega)e^{-it}}{r_2(\omega)(\omega-\alpha)}$, $v = e^{it}$, $\widetilde{\mu} = \exp[\tau_1 e^{-it_1} + \tau_2 e^{-it_2}]$, $L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}$, $L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}$, $\bar{M}_{A\widetilde{A}}^{(1,1)}$ — *интегро-дифференциальные операторы. Интеграл* (5) *понимается как интеграл, где $\omega \in [\sigma,\beta]$ при $\sigma \to \alpha$.*

$\lhd$ Пусть точка $(z) \in G_1$. Рассмотрим замкнутую подобласть $\bar{G}_\rho(\sigma) \ni (0,0)$ области G_1, ограниченную гиперповерхностью $\{|z_1| = \rho r_1(\omega), |z_2| = r_2(\omega), |z_2| = r_2(\sigma)\}$, где $\alpha < \sigma \leqslant \omega \leqslant \beta$, $0 < \rho < 1$, $\sigma \neq 1$, σ и ρ — выбраны так, что $(z) \in G_\rho(\sigma)$. На основании формул (3) и (4), легко убедиться при $\sigma \leqslant \omega \leqslant \beta$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, что

$$\begin{gathered} \frac{\gamma}{8\pi^3} L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})} \left[\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu} e^{\widetilde{b}z_2} [z_1^m z_2^n]_{\substack{z_1 = r_1(\omega)\widetilde{u}e^{it_1} \\ z_2 = r_2(\omega)ve^{it_2}}} dt \right] \\ = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\gamma}(\omega)\widetilde{\mu} e^{\widetilde{b}z_2} \Big(r_1(\omega)\widetilde{u}e^{it_1}\Big)^m \Big(r_2(\omega)ve^{it_2}\Big)^n dt. \end{gathered}$$

Отсюда при $\alpha < \sigma < \beta$ следует

$$\begin{gathered} \frac{\gamma}{8\pi^3} \int\limits_\sigma^\beta d\omega L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})} \left[\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\lambda}(\omega) e^{\widetilde{b}z_2} \widetilde{\mu} L_{A\widetilde{A}}^{(k_1,-\widetilde{k})} [z_1^m z_2^n]_{\substack{z_1 = r_1\widetilde{u}e^{it_1} \\ z_2 = r_2 ve^{it_2}}} dt \right] \\ = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int\limits_\sigma^\beta d(\omega) \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu} e^{\widetilde{b}z_2} (r_1(\omega)\widetilde{u}e^{it_1})^m (z_2(\omega)ve^{it_2})^n dt. \end{gathered} \tag{6}$$

Проинтегрируем обе части равенства (6) по переменным τ_i и t_i ($i = 1,2$),

$$\begin{gathered} \frac{\gamma}{8\pi^3} \int\limits_0^\infty e^{-\tau_1} d\tau_1 \int\limits_0^\infty e^{\tau_2} d\tau_2 \int\limits_0^{2\pi} dt_1 \int\limits_0^{2\pi} dt_2 \int\limits_\sigma^\beta d\omega L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})} \left[\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\lambda}(\omega) e^{\widetilde{b}z_2} \mu L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})} [z_1^m z_2^n]_{\substack{z_1 = r_1\widetilde{u}e^{it_1} \\ z_2 = r_2 ve^{it_2}}} dt \right] \\ = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int\limits_0^\infty e^{-\tau_1} d\tau_1 \int\limits_0^\infty e^{-\tau_2} d\tau_2 \int\limits_0^{2\pi} dt_1 \int\limits_0^{2\pi} dt_2 \int\limits_\sigma^\beta d\omega \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\lambda}(\omega) e^{\widetilde{b}z_2} \widetilde{\mu} (r_1(\omega)\widetilde{u}e^{it_1})^m (r_2(\omega)ve^{it_2})^n dt \equiv I. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим внутренний интеграл правой части (7) и проинтегрируем его по частям

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\widetilde{b}z_2}\widetilde{u}^m v^n dt = \frac{z_1^m e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}m}}{2\pi r_1^m(\omega)}\int_0^{2\pi} e^{\frac{(\beta-\omega)z_2 e^{-it}(m+1)}{r_2(\omega)(\omega-\sigma)}} e^{int}\,dt = \frac{z_1^m z_2^n e^{-\frac{(\beta-\omega)m}{\omega-\sigma}}\left(\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}\right)^n (m+1)^n}{r_1^m(\omega) r_2^n(\omega) n!}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{\gamma\widetilde{b}_{mn}(\sigma) z_1^m z_2^n}{m+1}, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{b}_{mn}(\sigma) = \frac{(m+1)^{n+1}\gamma}{4\pi^2 n!}\int_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int_0^{2\pi}dt_1\int_0^{2\pi}dt_2\int_\sigma^\beta \widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}(m+1)} \times\left(\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}\right)^n e^{it_1 m}e^{it_2 n}d\omega.$$

Покажем, что

$$\lim_{\sigma\to\alpha}\widetilde{b}_{mn}(\sigma) = 1. \tag{9}$$

Для этого рассмотрим внутренний интеграл правой части (8) при $\sigma\to\alpha$.

$$I_1 = \lim_{\sigma\to\alpha}\frac{(m+1)^{n+1}}{n!}\gamma\int_\sigma^\beta \frac{e^{-\frac{(\beta-\omega)(m+1)}{\omega-\alpha}}\left(\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}\right)^n}{(\omega-\alpha)^2}\,d\omega. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$u = \left(\frac{\beta-\omega}{\omega-\alpha}\right)^n,\quad dv = \frac{e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}(m+1)}}{(\omega-\alpha)^2}\,dw. \tag{11}$$

Используя обозначения (11) и вычисляя интеграл под знаком предела (10) n раз по частям при $\sigma\to\alpha$, окончательно получим, что $I_1 = 1$.

Далее, непосредственным подсчетом убеждаемся, что

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} e^{t_1 m}\,dt_1\int_0^{2\pi}\widetilde{\mu}e^{t_2 n}\,dt_2 = \frac{\tau_1^m\tau_2^n}{m!n!}, \tag{12}$$

$$\int_0^\infty e^{-\tau_1}\tau_1^m\,d\tau_1\int_0^\infty \tau_2^n e^{-\tau_2}\,d\tau_2 = n!m!. \tag{13}$$

Таким образом, из соотношений $I_1 = 1$, (11) и (12) следует доказываемое равенство (9). Тогда из равенств (7) и (8) получим

$$\frac{\gamma}{8\pi^3}\int_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int_0^{2\pi}dt_1\int_0^{2\pi}dt_2\int_\sigma^\beta d\omega L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})} \times\left[\int_0^{2\pi}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}e^{\widetilde{b}z_2}L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[z_1^m z_2^n]_{\substack{z_1=r_1\widetilde{u}e^{it_1}\\ z_2=r_2ve^{it_2}}}\,dt\right] = \frac{\widetilde{b}_{mn}(\alpha)}{m+1}z_1^m z_2^n. \tag{14}$$

Для любой точки $(z) \in G_\rho(\sigma)$

$$|\widetilde{u}| \leqslant \frac{e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}}}{r_1(\omega)}|z_1|e^{|z_2|\frac{\beta-\omega}{r_2(\omega)(\omega-\sigma)}} < \rho\frac{r_1(\widetilde{\omega})}{r_1(\omega)}e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}}e^{r_2(\widetilde{\omega})\frac{\beta-\omega}{r_2(\omega)(\omega-\sigma)}}, \quad \sigma \leqslant \omega \leqslant \beta, \quad \sigma \leqslant \widetilde{\omega} \leqslant \beta.$$

Но, согласно утверждению 1

$$\frac{r_1(\widetilde{\omega})}{r_1(\omega)}e^{-\frac{\beta-\omega}{\omega-\sigma}}e^{r_2(\omega)\frac{\beta-\omega}{r_2(\omega)(\omega-\sigma)}} \leqslant 1.$$

Поэтому $|\widetilde{u}| < \rho$ и в силу этого, при любых значениях параметров t, t_1, ω, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t_1 \leqslant 2\pi$, $\sigma \leqslant \omega \leqslant \beta$, точка $(r_1(\omega)\widetilde{u}e^{it_1}, r_2(\omega)v) \in G_\rho(\sigma)$.

Так как $f(z)$ регулярна в области $G_\rho(\sigma)$, содержащей свой центр (0,0), то в этой области она может быть представлена равномерно сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{m,n=0} a_{mn}z_1^m z_2^n. \tag{15}$$

Учитывая соотношения (12) и (13), из равенства (14) получим

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{8\pi^3}\int_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int_0^{2\pi}dt_1\int_0^{2\pi}dt_2\int_\sigma^\beta d\omega L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\Bigg[\int_0^{2\pi}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}e^{\widetilde{b}z_2}L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}\\ \times[f(z)]_{\substack{z_1=r_1\widetilde{u}e^{it_1}\\ z_2=r_2ve^{it_2}}}dt\Bigg] = \sum_{m,n}^\infty\frac{a_{mn}}{m+1}\widetilde{b}_{mn}z_1^m z_2^n = \Phi_\sigma(z).\end{aligned} \tag{16}$$

Но $L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(z)]_{\substack{z_1=r_1\widetilde{u}e^{it_1}\\ z_2=r_2ve^{it_2}}}$ при произвольных фиксированных значениях параметров t, t_1 и ω $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, 0 \leqslant t_1 \leqslant 2\pi, \sigma \leqslant \omega \leqslant \beta)$ есть аналитическая функция переменной $\widetilde{u}$ в круге $|\widetilde{u}| \leqslant \rho$. Поэтому

$$L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})} = \frac{\rho}{2\pi i}\int_{|\eta|=1}\frac{L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta_1 e^{it_1}, r_2(\omega)v)]}{\eta_1-\widetilde{u}}d\eta,$$

где $\eta_1 = \rho\eta$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma(z) &= \frac{\rho\gamma}{16\pi^4 i}\int_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int_0^{2\pi}dt_1\int_0^{2\pi}dt_2\int_\sigma^\beta d\omega L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\Bigg[\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta_1-\widetilde{u}}\\ &\qquad\times L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta_1 e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]d\eta\Bigg]\\ &= \frac{\rho\gamma}{16\pi^4 i}\int_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int_0^{2\pi}dt_1\int_0^{2\pi}dt_2\int_\sigma^\beta d\omega\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\\ &\qquad\times\left[\frac{e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta_1-\widetilde{u}}\right]L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta_1 e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]d\eta.\end{aligned}$$

Действуя на обе части последнего равенства оператором $\bar{M}_{1,1}^{(1)}$ будем иметь

$$\bar{M}_{1,1}^{(1)}\Big[\Phi_\sigma(z)\Big] = f_\sigma(z) = \frac{\rho\gamma}{16\pi^4 i}\int\limits_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int\limits_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}dt_2\int\limits_\sigma^\beta d\omega\int\limits_0^{2\pi}dt$$
$$\times\int\limits_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}\bar{M}_{1,1}^{(1)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta_1-\widetilde{u}}\right]\right]L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta_1 e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]\,d\eta.$$

Оценим разность

$$I_\sigma = f_\sigma(z) - \frac{\gamma}{16\pi^4 i}\int\limits_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int\limits_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}dt_2\int\limits_\sigma^\beta \beta\,d\omega$$
$$\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}M_{1,1}^{(1)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta-\widetilde{u}}\right]\right]L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_1})]\,d\eta.$$

Для этого достаточно оценить разность

$$\widetilde{I}_\sigma = \frac{\rho}{4\pi^2 i}\int\limits_\sigma^\beta d\omega\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}\bar{M}_{1,1}^{(1)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{\widetilde{b}}z_2}{\eta_1-\widetilde{u}}\right]\right]L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta_1 e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]\,d\eta$$
$$-\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_\sigma^\beta d\omega\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}\bar{M}_{1,1}^{(1)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta-\widetilde{u}}\right]\right]L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]\,d\eta.$$

Эта оценка производится так же, как и в [6]. В результате получаем $\widetilde{I}_\rho = 0$ ($\sigma > 0$ — фиксировано), поэтому справедливо равенство

$$f_\sigma(z) = \sum_{m,n=0}^\infty a_{mn}\widetilde{b}_{mn}(\sigma)z_1^m z_2^n = \frac{\gamma}{16\pi^4 i}\int\limits_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int\limits_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_2\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}dt_2\int\limits_\sigma^\beta d\omega$$
$$\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}\bar{M}_{1,1}^{(1)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{\widetilde{b}}z_2}{\eta-\widetilde{u}}\right]\right]L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]\,d\eta.$$

Для точки $(z)\in G_1$ ряд $\sum_{m,n=0}^\infty a_{mn}z_1^m z_2^n$ абсолютно сходится. Поэтому

$$f(z) = \lim_{\sigma\to\alpha}\sum_{m,n=0}^\infty a_{mn}\widetilde{b}_{mn}(\sigma)z_1^m z_2^n = \sum_{m,n=0}^\infty a_{mn}z_1^m z_2^n$$
$$= \lim_{\sigma\to\alpha}\frac{\gamma}{4\pi^4 i}\int\limits_0^\infty e^{-\tau_1}d\tau_1\int\limits_0^\infty e^{-\tau_2}d\tau_2\int\limits_0^{2\pi}dt_1\int\limits_0^{2\pi}dt_2\int\limits_\sigma^\beta d\omega\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\eta|=1}\widetilde{\lambda}(\omega)\widetilde{\mu}\bar{M}_{1,1}^{(1)}$$
$$\times\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{\widetilde{b}z_2}}{\eta-\widetilde{u}}\right]\right]L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})]\,d\eta.\ \triangleright$$

Интегральное представление (5) выражает значение функции $f(z)$ в области G_1 через значения оператора

$$L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta e^{it_1}, r_2(\omega)ve^{it_2})],$$

заданного на определяющем многообразии $R(\alpha,\beta)$. В частности при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ из (5) будут следовать интегральные представления

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \lambda(\omega)\bar{M}_{1,1}^{(1)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{-k,\widetilde{k}}\left[\frac{e^{bz_2}}{\eta - u^*}\right]\right] L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v)]\,d\eta, \quad (17)$$

$$f(z) = f(0,0) + \sum_{\nu=1}^{2}\frac{z_\nu}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \lambda(\omega)\bar{\bar{M}}_{1,1}^{(1,-\nu)}\left[L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{bz_2}}{\eta - (2-\nu)u^*}\right]\right] \times L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f'_{z_\nu}(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v)]\,d\eta, \quad (18)$$

где

$$\lambda(\omega) = \frac{e^{-\frac{1-\omega}{\omega^2}}}{\omega^2}, \quad u^* = az_1e^{bz_2}, \quad a = \frac{e^{-\frac{1-\omega}{\omega}}}{r_1(\omega)}, \quad b = \frac{1-\omega}{r_1(\omega)\omega}e^{-it}, \quad v = e^{it}.$$

Интегральные формулы (17) и (18) были получены В. Т. Уляшевым в [6]. Отметим только следующее:

1. Пусть в формуле (17) $\widetilde{k} = 0$, $k = 1$, $L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}\left[\frac{e^{bz_2}}{\eta - u^*}\right] = L_{A_1}^{(-1)}\left[\frac{e^{bz^2}}{\eta - u^*}\right]$. Положим далее $\gamma_1 = \delta_1^{(1)} = 1$, $\delta_2^{(0)} = 0$. Тогда

$$\bar{M}_{1,1}^{(1)}\left[L_{A_1}^{(-1)}\left[\frac{e^{bz_2}}{\eta - u^*}\right]\right] = \frac{e^{bz_2}}{\eta - u^*},$$

$$L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[f(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v)] = \Phi(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v) = f(z) + z_1 f'_{z_1}(z).$$

В этом случае (17) примет вид

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda(\omega)e^{bz_2}\eta}{\eta - u^*}\Phi\big(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v\big)\,d\eta, \quad (19)$$

2. Пусть $k = \widetilde{k}$, $L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}[\varphi(z)] = L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[\varphi(z)] = \varphi(z)$. В этом случае (17) принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda(\omega)e^{bz_2}\eta}{(\eta - u^*)^2} f\big(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v\big)d\eta. \quad (20)$$

3. Пусть $k = \widetilde{k}$, $L_{A\widetilde{A}}^{(-k,\widetilde{k})}[\varphi(z)] = L_{A\widetilde{A}}^{(k,-\widetilde{k})}[\varphi(z)] = \varphi(z)$. Тогда из (18) следует

$$f(z) = f(0,0) + \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda(\omega)}{\eta}\frac{e^{bz_2}-1}{b} f'_{z_2}\big(r_1(\omega)\eta, r_2(\omega)v\big)\,d\eta + \frac{z_2}{4\pi^2 i}\int_0^1 d\omega \int_0^{2\pi} dt \int_{|\eta|=1} \frac{\lambda(\omega)e^{bz_2}}{\eta - u^*} f'_{z_1}(r_1\eta, r_2 v)\,d\eta. \quad (21)$$

Интегральные формулы (19)–(21) получили название интегральных представлений Темлякова (I, II и III рода соответственно) в случае неограниченных полных двоякокруговых областей [6].

Литература

1. *Дзебисов Х. П.* Об интегральных представлениях голоморфных функций в пространстве $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$), свойствах некоторых интегралов и их приложение к решению краевых задач / Деп. в ВИНИТИ 16.07.76, № 14687-76.—1976.
2. *Дзебисов Х. П.* Интегральные представления голоморфных функций в специальных областях пространства $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных // Межвуз. сб. трудов «Аналитические функции и их приложения».—Владикавказ: Изд-во СОГУ.—1984.—С. 28–48.
3. *Дзебисов Х. П.* Интегральные представления аналитических функций в специальных облостях пространства $\mathbb{C}^2$ и их приложения // Третья Саратовская зимняя школа «Теория функций и приближений».—1986.—С. 50–52.
4. *Гуляев А. В.* О функциях, определяемых некоторым интегралом // Ученые записки Моск. обл. пед. ин-та. им. Н. К. Крупской.—1970.—Т. 269.—С. 69–76.
5. *Баврин И. И.* Операторы и интегральные представления голоморфных функций // Сб. трудов «Теория функций, функциональный анализ и их приложения» Моск. обл. пед. ин-та. им. Н. К. Крупской.—1973.—Вып. 15 (1).—С. 3–44.
6. *Уляшев В. Т.* Интегральные представления Темлякова — Баврина для бесконечных двоякокруговых областей // Сб. трудов «Теория функций, функциональный анализ и их приложения» Моск. обл. пед. ин-та. им. Н. К. Крупской.—1973.—Вып. 15 (1).—С. 145–158.

Статья поступила 26 декабря 2002 г.

Дзебисов Хаджумар Петрович, к.ф.-м.н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН