Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2004, Том 6, Выпуск 1

УДК **517.98**

РЕШЕТОЧНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ В РЕШЕТКАХ БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

И. Г. Ганиев

Памяти Юрия Александровича Абрамовича посвящается

Дается описание линейных ограниченных операторов в решетках Банаха — Канторовича, являющихся решеточными гомоморфизмами или изоморфизмами, в виде измеримого расслоения решеточных гомоморфизмов банаховых решеток.

Решеточные гомоморфизмы и операторы, сохраняющие дизъюнктность, действующие в векторных и банаховых решетках, давно привлекают внимание исследователей (см. монографии К. Алипрантиса, О. Бёркиншо [1] и А. Г. Кусраева [2]). При этом одним из центральных вопросов является возможность аналитического описания операторов из указанного класса (см., например, работы Ю. А. Абрамовича, А. И. Векслера, А. В. Колдунова [3], Ю. А. Абрамовича [4], а также литературу, указанную в [1, 2]). Результаты об операторах, сохраняющих дизъюнктность, полученные Ю. А. Абрамовичем в [4], получили дальнейшее развитие в различных направлениях (см., например, работы П. Макполлина и А. Викстеда [5], А. Г. Кусраева [6], А. Е. Гутмана [7] и др.)

В настоящей работе дается описание линейных ограниченных операторов в решетках Банаха — Канторовича, являющихся решеточными гомоморфизмами или изоморфизмами, в виде измеримого расслоения решеточных гомоморфизмов банаховых решеток. Решетки Банаха — Канторовича были введены в [8], а представление посредством измеримого расслоения банаховых решеток получено в [9, 10], см. также [11].

Пусть $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ — пространство с конечной мерой, $L_0 = L_0(\Omega)$ алгебра классов измеримых функции на $(\Omega, \Sigma, \lambda)$. Рассмотрим векторное пространство E над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Отображение $\|\cdot\| : E \to L_0(\Omega)$ называется $L_0(\Omega)$*-значной нормой на* E, если для любых $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ имеют место соотношения:

1) $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *решеточно нормированным пространством* (РНП) над $L_0(\Omega)$. Говорят, что РНП E *d-разложимо*, если для любого $x \in E$ и для любого разложения $\|x\| = f + g$ в сумму дизъюнтных элементов найдутся такие $y, z \in E$, что $x = y + z$ и $\|y\| = f$, $\|z\| = g$.

Сеть $\{x_\alpha\}$ элементов из E называется *bo-сходящейся* к $x \in E$, если сеть $\{\|x_\alpha - x\|\}$ o-сходится к нулю в $L_0(\Omega)$.

Пространством Банаха — Канторовича (ПБК) над $L_0(\Omega)$ называется bo-полное d-разложимое РНП над $L_0(\Omega)$.

Определение 1 ([8; стр. 153]). *Решеткой Банаха — Канторовича* (РБК) называется такое ПБК $(U, \|\cdot\|)$, что U — векторная решетка, а норма $\|\cdot\|$ монотонна, т. е. из $|u_1| \leqslant |u_2|$ следует $\|u_1\| \leqslant \|u_2\|$.

Пусть X — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторую, банахову решетку $(X(\omega), \|\cdot\|_{X(\omega)})$. *Сечением* X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u(\omega) \in X(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения u.

Пусть L — некоторое множество сечений. Следуя [11], пару (X, L) назовем измеримым расслоением банаховых решеток (ИРБР) над Ω, если выполнены условия:

а) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1, c_2 \in L$, где $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \mapsto \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

б) $c_1 \vee c_2 \in L$ для любых $c_1, c_2 \in L$, где $c_1 \vee c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \mapsto c_1(\omega) \vee c_2(\omega)$;

в) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \to \|c(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

г) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в $X(\omega)$.

Вместо (X, L) будем писать просто X.

Сечение s называется *ступенчатым*, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$, где $c_i \in L$, $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$. Сечение u называется *измеримым*, если найдется такая последовательность (s_n) ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{X(\omega)} \to 0$ п. в.

Пусть $M(\Omega, X)$ — множество всех измеримых сечений. Символом $L_0(\Omega, X)$ обозначим факторизацию $M(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду. Через $\overline{u}$ обозначим класс из $L_0(\Omega, X)$, содержащий сечение u. Отметим, что функция $\omega \mapsto \|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима для любого $u \in M(\Omega, X)$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ обозначим через $\|\overline{u}\|$.

В [11; стр. 144] установлено, что $(L_0(\Omega, X), \|\cdot\|)$ является ПБК над $L_0(\Omega)$, а в [9] доказано, что $(L_0(\Omega, X), \|\cdot\|)$ — есть РБК.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ алгебра ограниченных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, $L^\infty(\Omega)$ — факторизация $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ по отношению равенства п. в. Обозначим

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, X) = \{u \in M(\Omega, X) : \|u(\omega)\|_{X(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}.$$

Элементы из $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называются *ограниченными измеримыми сечениями*. Множество классов эквивалентности существенно ограниченных сечений обозначается символом $L^\infty(\Omega, X)$. Пусть $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ лифтинг [7].

Определение 2. Отображение $l : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называется *векторнозначным лифтингом*, ассоциированным с лифтингом p, если оно удовлетворяет условиям:

а) для всех $\overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)$ выполнено $l(\overline{u}) \in \overline{u}, \mathrm{dom}(l(\overline{u})) = \Omega$;

б) $\|l(\overline{u})\|_{X(\omega)} = p(\|\overline{u}\|)(\omega)$ для всех $\overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)$;

в) если $\overline{u}, \overline{v} \in L^\infty(\Omega, X)$, то $l(\overline{u} + \overline{v}) = l(\overline{u}) + l(\overline{v})$;

г) если $\overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)$ и $e \in L^\infty(\Omega)$, то $l(e\overline{u}) = p(e) l(\overline{u})$;

д) если $\overline{u}, \overline{v} \in L^\infty(\Omega, X)$, то $l(\overline{u} \vee \overline{v}) = l(\overline{u}) \vee l(\overline{v})$;

е) множество $\{l(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 3. Решетки Банаха — Канторовича U и W называются *порядково изометрически изоморфными*, если существует изометрический модульный изоморфизм $\Phi : U \to W$, для которого $\Phi(u) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $u \geqslant 0$.

Напомним (см. [11]), что изоморфизмом ИРБР X и Y над Ω называется отображение h, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ линейную изометрию $h(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)$ так, что $h(\cdot)(u(\cdot)) \in M(\Omega, Y)$ при $u \in M(\Omega, X)$ и, наоборот, если $v \in M(\Omega, Y)$, то $v(\cdot) = h(\cdot)(u(\cdot))$ п. в. для некоторого $u \in M(\Omega, X)$.

Определение 4. ИРБР X и Y назовем *порядково изоморфными*, если X и Y изоморфны и $h(\omega)(u(\omega)) \geqslant 0$ п. в. тогда и только тогда, когда $u(\omega) \geqslant 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$.

В работах [9, 10] получена следуюшая теорема, являющаяся решеточным аналогом теоремы А. Е. Гутмана (см. [11; стр. 153]).

Теорема 1. *Для любой РБК U над $L_0(\Omega)$ существует единственное с точностью до порядкового изоморфизма ИРБР (X, L) с векторнозначным лифтингом такое, что U порядково изоморфно $L_0(\Omega, X)$.*

Пусть $U = L_0(\Omega, X), V = L_0(\Omega, Y)$ — РБК нормированные над $L_0(\Omega)$, $T : U \to V$ — $L_0(\Omega)$-ограниченное линейное отображение (т. е. существует такое $k \in L_0(\Omega)$, что $\|Tu\| \leqslant k\|u\|$ при всех $u \in U$). Если $\|Tu\| = \|u\|$, то отображение T называют *изометрией*. Линейное отображение $T : U \to V$ называется *решеточным гомоморфизмом*, если T сохраняет решеточные операции. Если, при этом T — биекция, то T называется *решеточным изоморфизмом U на V*.

Предложение 2. *Пусть дано семейство линейных ограниченных операторов $T(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)$, причем $T(\omega)$ — решеточный гомоморфизм для любого $\omega \in \Omega$ и $T(\omega)(u(\omega)) \in M(\Omega, Y)$ для любого $u \in M(\Omega, X)$ и $\|T(\cdot)\| \in L_0(\Omega)$. Тогда линейный оператор $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$, определенный равенством $T\overline{u} = \overline{T(\omega)(u(\omega))}$, является $L_0(\Omega)$-ограниченным решеточным гомоморфизмом. Если гомоморфизмы $T(\omega)$ — инъективны для почти всех $\omega \in \Omega$, то T также инъективный гомоморфизм. Если $T(\omega)$ — решеточный изоморфизм $X(\omega)$ на $Y(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, и $T^{-1}(\omega)(v(\omega)) \in M(\Omega, X)$ для всех $v \in M(\Omega, Y)$, то T является решеточным изоморфизмом.*

$\lhd$ Линейность оператора T очевидна. Из соотношения

$$\|T\overline{u}\| = \overline{\|T(\omega)(u(\omega))\|_{Y(\omega)}} \leqslant \overline{\|T(\omega)\|\|u(\omega)\|_{X(\omega)}} = \overline{\|T(\omega)\|\|u(\omega)\|_{X(\omega)}} = \overline{\|T(\omega)\|}\|\overline{u}\|$$

следует, что оператор T — $L_0(\Omega)$-ограничен.

Поскольку $T(\omega)$ решеточный гомоморфизм, то имеем, что

$$\begin{aligned} T(\overline{u} \vee \overline{v}) &= \overline{T(\omega)((u \vee v)(\omega))} = \overline{T(\omega)(u(\omega) \vee v(\omega))} \\ &= \overline{T(\omega)u(\omega) \vee T(\omega)v(\omega)} = \overline{T(\omega)u(\omega)} \vee \overline{T(\omega)v(\omega)} = T(\overline{u}) \vee T(\overline{v}), \end{aligned}$$

т. е. T является решеточным гомоморфизмом.

Пусть теперь $T(\omega)$ инъективны для почти всех $\omega \in \Omega$. Тогда если $u_1(\omega), u_2(\omega) \in M(\Omega, X)$ и $T(\overline{u_1}) = T(\overline{u_2})$, то $T(\omega)(u_1(\omega)) = T(\omega)(u_2(\omega))$ п. в. и поэтому $u_1(\omega) = u_2(\omega)$ п. в., т. е. $\overline{u_1} = \overline{u_2}$.

Пусть $T(\omega)$ — решеточный изоморфизм. По условию предложения, $u(\omega) = T^{-1}(v(\omega)) \in M(\Omega, X)$ для любого $v \in M(\Omega, Y)$. Очевидно, что $T(\overline{u}) = \overline{v}$. Поэтому T — сюръективно, т. е. T — решеточный изоморфизм. $\rhd$

Теорема 3. *Если $L_0(\Omega)$-ограниченный линейный оператор $T : U \to V$ является решеточным гомоморфизмом, то существует семейство линейных ограниченных операторов $T(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, являющихся решеточными гомоморфизмами, такое, что $T(\overline{u})(\omega) = T(\omega)(u(\omega))$ п. в.*

$\lhd$ Пусть $\|T\overline{u}\| \leqslant k\|\overline{u}\|$ для всех $\overline{u} \in U$ и некоторого $k \in L_0(\Omega)$. Определим линейный оператор $T_0 : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$ равенством $T_0\overline{u} = (1 + k)^{-1}T\overline{u}$. Тогда T_0 подпространство $L^\infty(\Omega, X)$ отображает в $L^\infty(\Omega, Y)$ и является решеточным горморфизмом из

$L^\infty(\Omega, X)$ в $L^\infty(\Omega, Y)$. Пусть l и l' векторнозначные лифтинги на $L^\infty(\Omega, X)$ и $L^\infty(\Omega, Y)$ соответственно, ассоциированные с лифтингом $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Для каждого $\omega \in \Omega$ определим линейный оператор $\varphi(\omega)$ из $\{l(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ в $\{l'(\overline{v})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, Y)\}$ равенством $\varphi(\omega)(l(\overline{u})(\omega)) = l'(T_0(\overline{u}))(\omega)$. Из соотношения

$$\begin{aligned}\big\|\varphi(\omega)\big(l(\overline{u})(\omega)\big)\big\|_{Y(\omega)} &= \big\|l'\big(T_0(\overline{u})\big)(\omega)\big\|_{Y(\omega)} = p\left(\|T_0\overline{u}\|\right)(\omega) \leqslant p\left(\frac{k}{1+k}\|\overline{u}\|\right)(\omega)\\ &= p\left(\frac{k}{1+k}\right)(\omega)p\big(\|\overline{u}\|\big)(\omega) = p\left(\frac{k}{1+k}\right)(\omega)\|l(\overline{u})(\omega)\|_{X(\omega)}\end{aligned}$$

следует, что $\varphi(\omega)$ определено корректно и ограничено. Покажем, что $\varphi(\omega)$ решеточный гомоморфизм:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega)(l(\overline{u_1})(\omega) \vee l(\overline{u_2})(\omega)) &= \varphi(\omega)(l(\overline{u_1} \vee \overline{u_2})(\omega)) = l'(T_0(\overline{u_1} \vee \overline{u_2}))(\omega)\\ &= l'(T_0(\overline{u_1}) \vee T_0(\overline{u_2}))(\omega) = l'(T_0(\overline{u_1})(\omega) \vee l'(T_0(\overline{u_2}))(\omega)\\ &= \varphi(\omega)(l(\overline{u_1})(\omega)) \vee \varphi(\omega)(l(\overline{u_2})(\omega)).\end{aligned}$$

Так как $\{l(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ и $\{l'(\overline{v})(\omega) : \overline{v} \in L^\infty(\Omega, Y)\}$ плотно в $Y(\omega)$, то $\varphi(\omega)$ однозначно продолжается до отображения $\overline{\varphi(\omega)}$ на $X(\omega)$. Поскольку операция $\vee$ непрерывна, то продолжение $\overline{\varphi(\omega)}$ будет решеточным гомоморфизмом решеток $X(\omega)$ и $Y(\omega)$.

Положим $T(\omega) = (1+k)(\omega)\overline{\varphi(\omega)}$. Тогда $T(\omega)$ — решеточный гомоморфизм из $X(\omega)$ в $Y(\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. При этом, если последовательность $l(\overline{u_n})(\omega) \in \{l(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ такова, что $l(\overline{u_n})(\omega) \to u(\omega)$, то

$$\begin{aligned}T(\omega)u(\omega) &= (1+k)(\omega)\overline{\varphi(\omega)}(u(\omega)) = (1+k)(\omega)\lim_{n\to\infty}\varphi(\omega)(l(\overline{u_n})(\omega))\\ &= (1+k)(\omega)\lim_{n\to\infty}(l'(T_0\overline{u_n})(\omega) = (1+k)(\omega)\lim_{n\to\infty}(T_0\overline{u_n})(\omega)\\ &= (1+k)(\omega)(T_0\overline{u})(\omega) = (1+k)(\omega)\frac{(T\overline{u})(\omega)}{(1+k)(\omega)} = (T\overline{u})(\omega)\end{aligned}$$

п. в. для любого $\overline{u} \in L_0(\Omega, X)$. $\rhd$

Следствие 4. *Если $L_0(\Omega)$-ограниченный линейный оператор $T : U \to U$ является изометрическим решеточным изоморфизмом, то операторы $T(\omega) : X(\omega) \to X(\omega)$, построенные по T согласно теореме 3, также являются изометрическими решеточными изоморфизмами.*

$\lhd$ Согласно теореме 3 оператор $T(\omega)$ является решеточным гомоморфизмом. Покажем, что $T(\omega)$ — изометрия. Поскольку T — изометрия, то $k = 1$ и $T_0 = \frac{1}{2}T$, поэтому

$$\|\varphi(\omega)(l(\overline{u})(\omega))\|_{X(\omega)} = \|l(T_0(\overline{u})(\omega))\|_{X(\omega)} = p(\|T_0\overline{u}\|)(\omega) = \frac{1}{2}p(\|\overline{u}\|)(\omega) = \frac{1}{2}\|l(\overline{u})(\omega)\|_{X(\omega)}.$$

Из этих равенств имеем, что если последовательность $l(\overline{u_n})(\omega) \in \{l(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ такова, что $l(\overline{u_n})(\omega) \to u(\omega)$, то

$$\|T(\omega)u(\omega)\|_{X(\omega)} = 2\lim_{n\to\infty}\|\varphi(\omega)(l(\overline{u_n})(\omega))\|_{X(\omega)} = 2\cdot\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|l(\overline{u_n})(\omega)\|_{X(\omega)} = \|u(\omega)\|_{X(\omega)},$$

т. е. $T(\omega)$ — изометрия.

Теперь покажем, что $T(\omega)$ — изоморфизм. Так как $T(\omega)$ — изометрия, то $T(\omega)$ инъективно. Пусть $u(\omega) \in X(\omega)$, а последовательность $l(\overline{u_n})(\omega) \in \{l(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ такова, что $l(\overline{u_n})(\omega) \to u(\omega)$. Тогда из сюръективности T получим, что существует $\overline{g}_n \in L^\infty(\Omega, Y)$, для которой $\overline{u_n} = T_0\overline{g_n}$ и

$$u(\omega) = \lim_{n\to\infty} l(\overline{u_n})(\omega) = \lim_{n\to\infty} l(T_0\overline{g_n})(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\omega)(l(\overline{g_n})(\omega)).$$

Из равенств

$$\|l(\overline{g}_n)(\omega) - l(\overline{g}_m)(\omega)\| = \|\varphi(\omega)(l(\overline{g}_n)(\omega)) - \varphi(\omega)(l(\overline{g}_m)(\omega))\| = \|l(\overline{u_n})(\omega) - l(\overline{u_m})(\omega)\|_{X(\omega)}$$

следует, что последовательность $\{l(\overline{g}_n)(\omega)\}$ фундаментальна. Так как $X(\omega)$ — полно, то $l(\overline{g}_n)(\omega) \to g(\omega)$ для некоторого $g(\omega) \in X(\omega)$. Поэтому

$$u(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\omega)(l(\overline{g_n})(\omega)) = \overline{\varphi}(\omega)(g(\omega)),$$

т. е. оператор $\overline{\varphi}(\omega)$ а, следовательно, и оператор $T(\omega)$ сюръективны. $\triangleright$

Автор благодарен профессору В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators.—New York: Acad. press, 1985.—367+xvi p.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
4. *Abramovich Yu. A.* Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. N. S.—1983.—V. 45, № 3.—P. 265–279.
5. *McPolin P. T. N., Wickstead A. W.* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambrige Philos. Soc.—1985.—V. 97, № 3.—P. 481–487.
6. *Кусраев А. Г.* Об аналитическом представлении мажорируемых операторов // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 294, № 5.—С. 1055–1058.
7. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector lattices and integral operators / Ed. Kutateladze S. S.—Dordretch etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
8. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука.—1985.—256 с.
9. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения банаховых решеток // Узб. мат. журн.—1998.—Т. 5.—С. 14–21.
10. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и некоммутативных L_p-пространств и их приложения: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.—Ташкент, 2002.—199 с.
11. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.

Статья поступила 30 января 2004 г.

Ганиев Иномжан Гуломжанович, д. ф.-м. н.
Узбекистан, г. Ташкент, Ташкентский институт
инженеров железнодорожного транспорта
E-mail: inam@comuz.uz