Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4

УДК **517.5**

О ВЛОЖЕНИИ И ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ[1]

Э. М. Галеев

Владимиру Михайловичу Тихомирову
с любовью

Дается кратки обзор идей и результатов, связанных с задачей В. М. Тихомирова о приближении классов функций с несколькими ограниченными производными.

В 1975 году Владимир Михайлович Тихомиров на своем спецсеминаре по теории приближений[2] в МГУ предложил для решения следующую задачу о приближении классов функций с несколькими ограниченными производными. Пусть про функцию известно, не только, как обычно, что ее какая-то r-я производная в метрике L_p ограничена ($\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p} \leqslant \beta$), а известна ограниченность ее нескольких производных в различных метриках, т. е. $\|x^{(r^i)}(\cdot)\|_{L_{p^i}} \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$. Иными словами, найти приближение пересечения классов функций $W^{\overline{r}}_{\overline{p}} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} W^{r^i}_{p^i}$ в метрике пространства L_q. В качестве функциональных классов можно рассматривать, например, классы периодических функций.

Задача о нахождении оценки сверху приближения пересечения может быть решена путем вложения класса $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}$ в класс W^{γ}_{q} и дальнейшего приближения этого класса уже в согласованной метрике L_q. Задача о вложении может быть представлена в виде экстремальной задачи:

$$\|x^{(\gamma)}(\cdot)\|_{L_q} \to \sup; \quad \|x^{(r^i)}(\cdot)\|_{L_{p^i}} \leqslant \beta_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Поставленная задача была решена автором в 1975 г. и доложена на семинаре В. М. Тихомирова вначале для классов периодических функций одной переменной, а затем для классов периодических функций нескольких переменных с дробными производными и смешанными нормами [1]. Для формулировки полученного результата дадим определения функциональных классов и дробных производных.

Пусть $\mathbf{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d-мерный тор, реализованный в виде произведения d полуинтервалов $(-\pi, \pi]$. Через $L_p = L_p(\mathbf{T}^d)$, $p = (p_1, \ldots, p_d)$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, d$, обозначим

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №02-01-39012 ГФЕН, №02-01-00386).

[2] Участниками семинара по теории приближений, кроме автора заметки, были в то время студенты и аспиранты В. М. Тихомирова: А. П. Буслаев, Динь Зунг, А. И. Камзолов, Г. Г. Магарил-Ильяев, С. В. Пухов, М. И. Стесин.

пространство функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_d)$ измеримых на $\mathbf{T}^d$, периодических по каждой переменной с периодом 2π таких, что конечна величина

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \left[\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |x(t)|^{p_1} \, dt_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right]^{p_d/p_{d-1}} dt_d \right\}^{1/p_d}.$$

Свойства пространств со смешанной нормой на $\mathbf{T}^d$ были описаны в вышедшей в 1975 г. монографии О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [2].

Функцию $x(\cdot) \in L_p(\mathbf{T}^d)$ можно разложить в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle},$$

где суммирование ведется по всем $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ — d-мерной целочисленной решетки, $\langle k,t\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} k_i t_i$.

Для упрощения формулировок будем рассматривать функции с нулевыми средними по всем аргументам, т. е. функции, коэффициенты Фурье которых x_k, имеющие хотя бы один нулевой индекс k, равны нулю:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle},$$

где $\mathring{\mathbb{Z}}^d := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \, k_j \neq 0, \; j = 1, \dots, d\}$.

Для такой функции и вектора $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(r)}(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k (ik)^r e^{i\langle k,t\rangle},$$

где $(ik)^r = (ik_1)^{r_1} \dots (ik_d)^{r_d}$, $(ik)^r = |k|^r e^{(i/2)\pi r \operatorname{sign} k}$ (для скаляров k и r).

Для векторов $p, r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$, и описанных выше функций с нулевыми средними по всем аргументам введем следующий класс функций:

$$W_p^r(\mathbf{T}^d) = \big\{ x(\cdot) : \, \|x(\cdot)\|_{W_p^r} := \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p} \leqslant 1 \big\}.$$

При формулировке вложений функциональных классов важным является множество $G = \big\{ \operatorname{conv} \{ (\frac{1}{p^i}), r^i), \; i = 1, \dots, m\} + (\nu, 0) - (\lambda, \lambda) : \, \nu, \lambda \in \mathbb{R}_+^d \big\}$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия вложения для пересечения классов функций.

Теорема 1. *Пусть $W_{\overline{p}}^{\overline{r}} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_{p^i}^{r^i}$, $\gamma, q \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{1} < q < \infty$. Тогда $W_{\overline{p}}^{\overline{r}} \subset\subset W_q^{\gamma}$ тогда и только тогда, когда $(1/q, \gamma) \in G$.*

Оценка сверху в этой теореме следует из мультипликативных неравенств. Первые неравенства подобного типа были получены О. В. Бесовым. Расширение этих неравенств дает достаточность условий вложения. Для доказательства необходимости условий вложения строится специальная функция $x(t) = a(D_{N+[N^{\gamma'}]}(t) - D_N(t))$, являющаяся некоторой разностью ядер Дирихле, принадлежащая классу $W_{\overline{p}}^{\overline{r}}$. Здесь $D_N(t) = \sum\limits_{|k|=1}^{N} e^{ikt}$ —

ядро Дирихле. Такая разность ядер Дирихле в дальнейшем использовалась для доказательства необходимости условий вложения и оценок снизу приближения как на $\mathbf{T}^d$, так и на $\mathbb{R}^d$ в работах автора, Г. Г. Магарил-Ильяева, Динь Зунга и др.

Множество G для скалярных норм видимо впервые появилось в работе Н. С. Бахвалова (1963 г.) [3], где для классов функций близких к H_p^r доказывается, что условие $(1/p, r) \in \operatorname{int} G$, является достаточным для подобного вложения пересечения.

В работе Г. Г. Магарил-Ильяева 1979 г. [4] доказывается теорема о вложениях для функций на $\mathbb{R}^d$, аналогичная теореме 1. Поскольку для вложения классов на $\mathbb{R}^d$ нет вложения по направлению $(1, 0)$, то множество G в этом случае определяется без конуса по этому направлению: $G = \left\{\operatorname{conv}\{(\frac{1}{p^i}), r^i),\ i = 1, \ldots, m\} - (\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^d_+\right\}$. В совместной работе Г. Г. Магарил-Ильяева и В. М. Тихомирова (1984 г.) [5] теорема 1 обобщается на $\mathbb{R}^d \times \mathbf{T}^m$.

Используя полученную теорему 1 о вложении можно перейти к следующему шагу и найти порядки приближения пересечения классов периодических функций с несколькими ограниченными производными оператором Фурье S_N. Для приближения пересечения классов периодических функций нескольких переменных строится оператор Фурье, зависящий от рассматриваемого класса и метрики, в которой считается приближение.

Приближение класса функций W оператором S в линейном нормированном пространстве X оценивается величиной

$$d(W, S, X) = \sup_{x \in X} \|x - Sx\|_X.$$

Сформулируем и докажем теорему о приближении класса $W_{\overline{p}}^{\overline{r}}$ в пространстве L_q суммами Фурье для векторных норм.

Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ сопоставим множество $\square_s \subset \mathring{\mathbb{Z}}^d$ по следующему правилу:

$$\square_s = \left\{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d : 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \ldots, d\right\}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k, t\rangle} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) = \sum\limits_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k, t\rangle}$. Для множества $A = \{r^i,\ i = 1, \ldots, \nu\} \subset \mathbb{R}^d$ введем оператор Фурье S_μ^A, действующий на функцию $x(\cdot) = \sum\limits_{s \in \mathbf{N}^d} \delta_s x(\cdot)$ по формуле: $S_\mu^A x(\cdot) = \sum\limits_{s \in \mathscr{S}_\mu^A} \delta_s x(\cdot)$, где $\mathscr{S}_\mu^A = \bigcap\limits_{r \in A} \mathscr{S}_\mu^r$, $\mathscr{S}_\mu^r = \{s \in \mathbb{N}^d : \langle k, t\rangle \leqslant \mu\}$. Оператор Фурье S_μ^r сопоставляет функции $x(\cdot)$ гармоники из ступенчатого гиперболического креста. Оператор Фурье S_μ^A сопоставляет функции $x(\cdot)$ гармоники из пересечения ступенчатых гиперболических крестов.

При приближении пересечения классов периодических функций многих переменных важным этапом является нахождение числа точек в логарифмически полиэдральном множестве, например, числа гармоник в операторе Фурье $\mathscr{S}_\mu^A$. Эта задача была решена Динь Зунгом в 1983 г. [6].

Теорема D1. *Пусть* $A = \{r^i,\ i = 1, \ldots, \nu\}$, $\operatorname{conv} A \bigcap \mathring{\mathbb{R}}^d_+ \neq \varnothing$, $S = \{s \in \mathbb{R}^d_+ : \langle s, r\rangle \leqslant 1, r \in A\}$. *Тогда*

$$\sum_{s \in \mu S \cap \mathbb{N}^d} 2^{\langle s, 1\rangle} \asymp \mu^l 2^{\mu M},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи: $\langle s,1\rangle \to \sup;\ s\in S.$

Для приближения класса $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}$ оператором Фурье имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $W^{\overline{r}}_{\overline{p}} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} W^{r^i}_{p^i}$, $\gamma, q\in\mathbb{R}^d$, $1<q<\infty$, $G=\bigl\{\mathrm{conv}\,\{(\frac{1}{p^i}), r^i),\ i=1,\dots,m\}+(\nu,0)-(\lambda,\lambda):\ \nu,\lambda\in\mathbb{R}^d_+\bigr\}$, $G_q=\{\gamma\in\mathbb{R}^d:\ (1/q,\gamma)\in G\}$. *Тогда множество крайних точек* $\Gamma=\{\gamma^1,\dots\gamma^\nu\}$ *множества* G_q *конечно, и*

$$d(W^{\overline{r}}_{\overline{p}}, S^\Gamma_\mu, L_q)\asymp 2^{-\mu}\ \text{при}\ \max_{i,j}\gamma^i_j>0,$$

а если $\mathrm{conv}\Gamma\bigcap\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+\neq\varnothing$, *то число гармоник в операторе Фурье* $S_N=S^\Gamma_\mu$ *при* $\mu^l2^{\mu M}=N$ *имеет порядок* N *и*

$$d(W^{\overline{r}}_{\overline{p}}, S_N, L_q)\asymp (N^{-1}\log^l N)^{1/M},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи: $\langle s,1\rangle\to\sup;\ s\in S=\{s\in\mathbb{R}^d_+:\ \langle s,\gamma\rangle\leqslant 1\ (\forall\,\gamma\in\Gamma)\}.$

Оценка сверху в этой теореме следует из вложения $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}\subset\subset W^{\overline{\gamma}}_q$ по теореме 1, приближения класса $W^{\overline{\gamma}}_q$ в пространстве L_q оператором Фурье S^Γ_μ и подсчета числа гармоник в логарифмически полиэдральном множестве по теореме D1 Динь Зунга. Для доказательства оценки снизу используется специальная функция, являющаяся некоторой разностью ядер Дирихле, принадлежащая классу $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}$ и не приближающаяся оператором Фурье S^Γ_μ.

Отметим также работу Б. С. Митягина [7], в которой были найдены приближение и порядки колмогоровских поперечников изотропных и анизотропных классов периодических функций многих переменных $W^{\overline{r}}_p=\bigcap\limits_{i=1}^{d}W^{r^i}_p$ в согласованной метрике пространства L_p, где $r^i=(0,0,\dots,0,r_i,0,\dots,0)$. Правильное приближение в этом случае дает оператор Фурье с гармониками из прямоугольных параллелипипедов и доказательство в отличие от теоремы 2 легко сводится к одномерному случаю. Аналогично и приближения этих классов в несогласованных метриках считаются путем сведения к одномерному случаю.

Сформулируем и теорему о порядках поперечников по Колмогорову класса $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}$ периодических функций одной переменной в пространстве L_q.

Теорема 3 (см. [8]). *Пусть* $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}=\bigcap\limits_{i=1}^{m}W^{r^i}_{p^i}$, $G=\bigl\{\mathrm{conv}\,\{(\frac{1}{p^i}), r^i),\ i=1,\dots,m\}+(\nu,0)-(\lambda,\lambda):\ \nu,\lambda\geqslant 0\bigr\}$, $\gamma(\xi)=\sup\{\gamma:\ (\xi,\gamma)\in G\}$. *Тогда*

$$d_N(W^{\overline{r}}_{\overline{p}}, L_q)\asymp\begin{cases} N^{-\gamma(1/q)}, & \gamma(1/q)>0, \quad 1\leqslant q\leqslant 2,\\ N^{-\gamma(1/2)}, & \gamma(1/2)>1/2, \quad 2\leqslant q\leqslant\infty.\end{cases}$$

Задача же о вычислении порядков поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $W^{\overline{r}}_{\overline{p}}$ в пространстве L_q пока решена не для всех случаев p и q.

Некоторые вопросы вложения и приближения пересечения функциональных классов сводятся путем дискретизации к вложению и приближению пересечения дискретных множеств. Дискретизации могут проводиться разными способами. Одним из наиболее естественных является дискретизация с помощью теоремы Марцинкевича — Зигмунда.

Теорема Марцинкевича — Зигмунда о дискретизации. *Между пространством тригонометрических полиномов вида* $x(t) = \sum\limits_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$ *и пространством* $\mathbb{R}^{2^{\langle s,1\rangle}}$ *устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции* $x(\cdot)$ *вектора*

$$x = \{x_m(\tau^j)\} \in \mathbb{R}^{2^{\langle s,1\rangle}}, \quad x_m(t) = \sum_{\substack{\operatorname{sign} k_l = m_l \\ l=1,\dots,d}} x_k e^{i\langle k,t\rangle}, \quad m = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau^j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_d} j_d), \quad j_i = 1, \dots, 2^{s_i - 1}, \ i = 1, \dots, d,$$

при этом для функций $x(\cdot), y(\cdot) \in \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle}, \ k \in \square_s\}$ *и числа* $p \in \mathbb{R}$ *выполняются соотношения:*

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} \asymp 2^{-\langle s,1/p\rangle} \|x\|_{l_p^{2^{\langle s,1\rangle}}}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$2^{\langle s,1/p\rangle} \|x\|_{l_p^{2^{\langle s,1\rangle}}} \ll \|x(\cdot)\|_{L_p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

и

$$\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle = 2^{-\langle x,y\rangle}.$$

Сформулированная теорема доказывается аналогично теореме Марцинкевича — Зигмунда для функций одной переменной, см. в монографию А. Зигмунда [9, Т. 2, стр. 46].

С помощью этой теоремы вложения и приближение пересечения функциональных классов сводятся к вложению и приближению пересечения дискретных множеств.

Для чисел $r \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leqslant \infty$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем множество $B_p^r := B_p^r(\mathbb{R}^n) := \big\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{l_p^n} \leqslant n^{-r}\big\}$. Как обычно, обозначим

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} & \text{при } 0 < p < \infty, \\ \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Для множества K из $\mathbb{R}^2$, $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, будем рассматривать множество $B(K) = \bigcap\limits_{(1/p,r) \in K} B_p^r$, являющееся пересечением конечномерных множеств B_p^r и $Q(K) = \operatorname{conv} K + \operatorname{cone}\{(-1,0),(1,-1)\}$.

Для вложения конечномерных множеств $B(K)$ имеет место следующая теорема вложения.

Теорема 4 (см. [10])**.** *Пусть* $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *— подмножество из* $\mathbb{R}^2$, $0 < q \leqslant \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $(1/q, \gamma) \in Q(K)$. *Тогда* $B(K) \subset B_q^\gamma$.

Используя вложение пересечения конечномерных множеств $B(K)$, оценки сверху поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ и оценки снизу поперечников множеств V_k^m, найденные Е. Д. Глускиным, находятся поперечники пересечения конечномерных множеств.

Теорема 5 (см. [8])**.** *Пусть* $K \subset [0,1] \times \mathbb{R}$ *— компакт из* $\mathbb{R}^2$, $B(K) = \bigcap\limits_{(1/p,r) \in K} B_p^r(\mathbb{R}^{2n})$, $(\xi) = \max\limits_{(\xi,r) \in Q(K)} r$. *Тогда*

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} n^{-(1/q)}, & 1 \leqslant q \leqslant 2, \\ n^{-(1/2)+1/q-1/2}, & 2 \leqslant q \leqslant \infty. \end{cases}$$

Еще одним направлением развития вопроса В. М. Тихомирова о приближении и вложении пересечения функциональных классов является вопрос о нахождении порядков норм производной ядер Дирихле с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов. Порядки производных ядер Дирихле (с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов в скалярной и векторной нормах) и Фавара (и с гармониками вне этих крестов) определены в работах автора и В. Н. Темлякова. Для ядер с гармониками из пересечения логарифмически полиэдральных множеств нормы производных в скалярной метрике были подсчитаны Динь Зунгом [10].

Теорема D2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $S \subset \mathbb{R}^d_+$ *— полиэдральное множество с непустой внутренностью,* K *— его рецессивный конус,* $\alpha \in \mathbb{R}^d$. *Тогда* $D^{(\alpha)}_{\mu S}$ *принадлежит* L_p *для любого* $\mu > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\beta = \alpha + (\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}) \in \operatorname{int} \mathbf{K^0}$. *Если* $\beta \in \operatorname{int} K^0$, *то*

$$\|D^{(\alpha)}_{\mu S}\|_p \asymp \mu^{\frac{l}{p}} 2^{\mu M},$$

где M *— решение, а* l *— размерность аффинной оболочки множества решений задачи:* $\langle s, \beta\rangle \to \sup;\ s \in S$.

Литература

1. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки.—1978.—Т. 23, № 2.—С. 197–211.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
3. *Бахвалов Н. С.* Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными // Вестник МГУ. Сер. матем., механ.—1963, № 3.—С. 7–16.
4. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Задача с промежуточной производной // Мат. заметки.—1979.—Т. 25, № 1.—С. 81–96.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О некоторых вопросах гармонического анализа на $\mathbf{T}^{n'} \times \mathbf{T}^{n''}$ // В сб.: Некоторые вопросы современного анализа.—М.: Изд-во МГУ, 1984.— С. 57–82.
6. *Динь Зунг.* Асимптотики объема и числа целых точек в одном множестве и их применения в теории приближения // Reseach Report. Ханой, 1980.—№ 5. С. 1–22.
7. *Митягин Б. С.* Приближение функций в пространствах L^p и на торе // Мат. сб.—1962.—Т. 58, № 4.—С. 397–414.
8. *Галеев Э. М.* Approximation of periodic functions of one and several variables // Constructive Theory of Functions' 87.—Sofia, 1988.—P. 138–144.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I, II.—М.: Мир, 1965.—615, 537 с.
10. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки.—1981.—Т. 29, № 5.—С. 749–760.
11. *Динь Зунг.* Приближение классов гладких функций многих переменных // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1984.—№ 10.—С. 207–226.

Статья поступила 5 ноября 2004 г.

Галеев Эльфат Михалович, д. ф.-м. н.
г. Москва, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `elfat@galeev.mccme.ru`