Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.9**

АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ — ВИНЕРА — ШВАРЦА

Ю. Ф. Коробейник

В статье рассматривается вопрос о существовании абсолютно представляющих систем экспонент в весовом пространстве Фреше $\tilde{A}(\Phi)$ функций, аналитических в выпуклой области G из $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$. При некоторых довольно общих предположениях относительно последовательности весов $\Phi = \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ доказывается обобщенная теорема Пэли — Винера — Шварца для $\tilde{A}(\Phi)$.

Введение. Основная цель работы

Пусть $p \geqslant 1$ и G — произвольная область в $\mathbb{C}^p$. Отображение $f : G \to \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ называется локально ограниченным сверху в G, если для любого компакта T области G $\sup\{f(z) : z \in T\} < +\infty$. Как обычно, символ $A(G)$ обозначает пространство Фреше всех аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на каждом компакте из G. Положим

$$A_f := \left\{ y \in A(G) : \ \|y\|_f := \sup \left[\frac{|y(z)|}{\exp f(z)} : \ z \in G \right] < +\infty \right\}$$

и обозначим символом $\tilde{A}_f$ линейное нормированное пространство, которое получается введением в A_f нормы $\|y\|_f$, $y \in A_f$.

Лемма 1. *Если $f : G \to \mathbb{R}$ локально ограничено сверху в G, то пространство $\tilde{A}_f$ полно, т. е. является банаховым пространством (B-пространством).*

$\lhd$ Доказательство проводится стандартным методом. Пусть $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$– последовательность Коши в $\tilde{A}_f$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N < \infty$ такой, что $\|y_n - y_m\|_f < \varepsilon$ при $n, m > N$. Зафиксировав любое z из G, найдем, что числовая последовательность $\{y_m(z)\}$ фундаментальна и поэтому для каждого $z \in G$ существует $y(z) = \lim\limits_{m\to\infty} y_m(z)$. Из локальной ограниченности сверху $f(z)$ и известного критерия равномерной сходимости аналитических функций внутри области G легко выводим, что последовательность $y_m(z)$ сходится к $y(z)$ равномерно внутри G и, следовательно, $y \in A(G)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ и фиксированных $z \in G$, $n > N$ в неравенстве $|y_m(z) - y_n(z)| < \varepsilon \exp f(z)$, получаем: $|y(z) - y_n(z)| \leqslant \varepsilon \exp f(z)$. Отсюда $\|y\|_f \leqslant \|y - y_m\|_f + \|y_m\|_f \leqslant \varepsilon + M_m < \infty$, для любого фиксированного $m > N$. Следовательно, $y \in \tilde{A}_f$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что для всякого $n > N$ выполняется $\|y - y_n\|_f \leqslant \varepsilon$. Поэтому $y_n \to y$ в $\tilde{A}_f$, и последнее пространство полно.

Для любых z $(z_1, \ldots, z_p)$ и α $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ из $\mathbb{C}^p$ введем обычные обозначения

$$|z|_p := \left(\sum_{k=1}^{p} |z_k|^2\right)^{1/2}, \quad \langle \alpha, z\rangle_p := \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z_k.$$

Положим еще $(\forall \alpha \in \mathbb{C}^p)$ $E_\alpha := \exp\langle \alpha, z\rangle_p$; $E := \{E_\alpha : \alpha \in \mathbb{C}^p\}$. Очевидно, что $E \subseteq A_f$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall \alpha \in \mathbb{C}^p) \ \sup_{z \in G} [\mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p - f(z)] < +\infty. \tag{1}$$

Условие (1) заведомо выполняется, если справедливо такое соотношение:

$$(\forall N < +\infty)(\exists M < +\infty)(\forall z \in G) \ \ N \cdot |z|_p - f(z) \leqslant M. \tag{2}$$

С другой стороны, если $E_0 \in A_f$, то

$$\inf\,[f(z) : z \in G] > -\infty. \tag{3}$$

Ясно, что (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3), т. е. условие (3) необходимо, а (2) достаточно для того, чтобы пространство A_f содержало все экспоненты $E_\alpha, \alpha \in \mathbb{C}^p$.

Пусть теперь G — ограниченная область в $\mathbb{C}^p$. Тогда из (3) следует (2), причем в качестве $M = M(N)$ можно взять $Nd + D$, где $d = \sup\{|z|_p : z \in G\}$, $D = \sup[-f(z) : z \in G]$. Таким образом, для ограниченной области G в $\mathbb{C}^p$ условие (3) необходимо и достаточно для того, чтобы $E \subseteq A_f$.

1.2. Пусть G — по-прежнему область в $\mathbb{C}^p$ и пусть $\tilde{\Phi} := (f_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая (по n) последовательность локально ограниченных сверху в G отображений $f_n : G \to (-\infty, +\infty)$. В силу невозрастания (по n) Φ каждая функция f_n $(n \geqslant 1)$ локально ограничена сверху в G тогда и только тогда, когда локально ограниченна сверху в G функция $f_1(z)$. Положим $A(\Phi) := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_{f_k}$; $\tilde{A}(\Phi) := \mathrm{proj}_k \tilde{A}_{f_k}$. Тогда $\tilde{A}(\Phi)$ — пространство Фреше со счетным набором норм $\|\tilde{y}\|_n := \|y\|_{f_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Заметим, что $E_\alpha \in A(\Phi)$, $\alpha \in \mathbb{C}^p$, в том и только том случае, когда условие (1) выполняется при $f = f_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Далее, для включения $E \subseteq A(\Phi)$ достаточно выполнения условий

$$(\forall N < +\infty)(\forall k \geqslant 1)(\exists M_{N,k} < +\infty)(\forall z \in G) \quad N|z|_p - f_k(z) \leqslant M_{N,k} \tag{4}$$

и необходимо, чтобы

$$\inf[f_k(z) : \ z \in G] > -\infty \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

В случае, когда область G ограничена в $\mathbb{C}^p$, условия (5) необходимы и достаточны для того, чтобы $E \subseteq A(\Phi)$.

1.3. Основное содержание данной работы составляет выяснение условий, при которых в $\tilde{A}(\Phi)$ имеется хотя бы одна абсолютно представляющая система (АПС) экспонент вида $X = (x_{\alpha_n})_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}^p$, а также связи между наличием в $\tilde{A}(\Phi)$ хотя бы одной такой АПС и возможностью определенной реализации сильного сопряженного к $\tilde{A}(\Phi)$ пространства $\left(\tilde{A}(\Phi)\right)'_\beta$ в виде внутреннего индуктивного предела весовых B-пространств целых функций (т. е. справедливостью для $\tilde{A}(\Phi)$ утверждений типа теоремы Винера — Пэли — Шварца). Определение АПС дано ниже в § 2, п. 2.1.

Всюду далее в данной статье при рассмотрении пространств $A(\Phi)$ и $\tilde{A}(\Phi)$ предполагается, что $\Phi = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность отображений $f_n : G \to (-\infty, +\infty)$, где G — область в $\mathbb{C}^p$, функция f_1 локально ограничена сверху в G, а последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (5), когда область G ограничена в $\mathbb{C}^p$, и условиям (4), когда она не ограничена в $\mathbb{C}^p$. Если все эти предположения выполнены, то будем говорить, что последовательность Φ обладает свойством (γ).

2. Некоторые предварительные сведения. Результат отрицательного характера о существовании в $\tilde{A}(\Phi)$ АПС экспонент

2.1. Приведем вначале некоторые сведения из статьи [1] и монографии [2], которые используются в дальнейшем.

Пусть H — полное отделимое локально выпуклое пространство с определяющим топологию в H набором преднорм $P = \{p\}$. Пусть, далее, $y_\alpha \in H,\ y_\alpha \neq 0,\ \alpha \in \Lambda$. Последовательность $\{y_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\alpha_n \in \Lambda,\ n \geqslant 1$, называется АПС (см. [3, 4]) в H, если для любого y из H найдется хотя бы один абсолютно сходящийся в H ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k y_{\alpha_k}$, где $c_k \in \mathbb{C},\ k \geqslant 1$, и сумма ряда равна y. Предположим, что $P = \{p_n\}_{n \in B_1}$, где B_1 — или бесконечное счетное множество, или множество, содержащее только один номер. Иначе говоря, H — или небанахово пространство Фреше, или B-пространство. Пусть, далее, $\Lambda_0 = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty},\ Y_{\Lambda_0} := \{y_{\alpha_n} : n = 1, 2, \dots\}$. Назовем, следуя [1], векторное подпространство H_0 пространства H Y_{Λ_0}-подпространством H, если

1) $\operatorname{span} Y_{\Lambda_0} \subseteq H_0$;

2) топология δ в H_0 определяется набором преднорм $\{q_n\}_{n \in B_1}$, причем $(\forall n \in B_1)$ $q_n(x) \geqslant p_n(x),\ x \in H_0$;

3) $(\forall n \in B_1)\ p_n(y_{\alpha_n}) = q_n(y_{\alpha_n})$;

4) (H_0, δ) — полное отделимое локально выпуклое пространство (которое, очевидно, будет или небанаховым пространством Фреше, или B-пространством).

Говорят [1], что H — пространство со строгой Y_{Λ_0}-топологией, если не существует ни одного собственного Y_{Λ_0}-подпространства пространства H.

Частным случаем теоремы 1 из [1] является

Теорема А. *Для того, чтобы последовательность $\{y_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ была АПС в пространстве Фреше H, необходимо и достаточно, чтобы H являлось пространством со строгой Y_{Λ_0}-топологией.*

2.2. Пусть G — выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ и f — локально ограниченное сверху отображение G в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (2), если область G неограничена, и условию (3), если она ограничена. Положим $(\forall \alpha \in \mathbb{C}^p)\ f^\star(\alpha) := \sup\limits_{z \in G} \{\operatorname{Re}\langle \alpha, z \rangle_p - f(z)\}$. Имеем

$$(\forall \alpha \in \mathbb{C}^p)(\forall z_i \in G) \quad f^\star(\alpha) \geqslant \operatorname{Re}\langle \alpha, z_i \rangle_p - f(z_i) > -\infty.$$

С другой стороны, из условия (2) (или (3)) легко вывести, что функция $f^\star(\alpha)$ локально ограничена сверху в $\mathbb{C}^p$. Кроме того, $(\forall q \in [0,1])(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^p)$

$$\begin{aligned} f^\star(q\alpha_1 + (1-q)\alpha_2) &= \sup_{z \in G} \{q \operatorname{Re}\langle \alpha_1, z \rangle_p + (1-q) \operatorname{Re}\langle \alpha_2, z \rangle_p - f(z)\} \\ &\leqslant q \sup_{z \in G} \{\operatorname{Re}\langle \alpha_1, z \rangle_p - f(z)\} + (1-q) \sup_{z \in G} \{\operatorname{Re}\langle \alpha_2, z \rangle_p - f(z)\} \\ &= q f^\star(\alpha_1) + (1-q) f^\star(\alpha_2). \end{aligned}$$

Итак, $f^\star(\alpha)$ — собственная выпуклая функция в $\mathbb{C}^p$ (т. е., см. [2], выпуклое отображение $\mathbb{C}^p$ в $\mathbb{R}$) и потому $f^\star$ непрерывна в $\mathbb{C}^p$. Пусть еще $f^{\star\star}(w) = \sup_{\alpha\in\mathbb{C}^p}[\mathrm{Re}\langle\alpha, w\rangle_p - f^\star(\alpha)]$. Как и в случае $f^\star$, находим, что $f^{\star\star}$ — выпуклая функция в $\mathbb{C}^p$. При этом

$$(\forall w \in G)(\forall\alpha \in \mathbb{C}^p) \quad f^\star(\alpha) \geqslant \mathrm{Re}\langle\alpha, w\rangle_p - f(w),$$

откуда $f(w) \geqslant \mathrm{Re}\langle\alpha, w\rangle_p - f^\star(\alpha)$ и $f(w) \geqslant \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{C}^p}[\mathrm{Re}\langle\alpha, w\rangle_p - f^\star(\alpha)] = f^{\star\star}(w)$. Кроме того, $(\forall w \in \mathbb{C}^p)$ $f^{\star\star}(w) \geqslant \mathrm{Re}\langle\alpha, w\rangle_p - f^\star(\alpha) > -\infty$. Следовательно, $f^{\star\star}$ — выпуклое отображение $\mathbb{C}^p$ в $(-\infty, +\infty]$, причем $(\forall w \in G)$ $f^{\star\star}(u) \leqslant f(w) < +\infty$.

Таким образом, $f^{\star\star}$ — собственная выпуклая функция в G и потому (см. [2]) $f^{\star\star}$ непрерывна в G.

2.3. Рассмотрим последовательность $\varPhi = (f_k)_{k=1}^\infty$ отображений выпуклой области G из $\mathbb{C}^p$ в $\mathbb{R}$ со свойством (γ). Положим для каждого $k \geqslant 1$

$$g_k(z) := f_k^{\star\star}(z); \quad \Psi := (g_k)_{k=1}^\infty; \quad A(\Psi) := \bigcap_{k=1}^\infty A_{g_k}; \quad \tilde{A}(\Psi) := \mathrm{proj}_k \tilde{A}_{g_k}.$$

В силу сделанных предположений для любого $k \geqslant 1$ имеем:

$$g_{k+1}(z) \leqslant g_k(z),\ z \in G; \quad A_{g_k} \subseteq A_{f_k}; \quad \tilde{A}_{g_k} \hookrightarrow \tilde{A}_{f_k}; \quad \tilde{A}(\Psi) \hookrightarrow \tilde{A}(\varPhi).$$

При этом $\tilde{A}_{g_k}$ и $\tilde{A}_{f_k}$ — B-пространства, а $\tilde{A}(\Psi)$ и $\tilde{A}(\varPhi)$ — пространства Фреше.

Предположим, что $A(\Psi) \neq A(\varPhi)$, т. е., что $A(\Psi)$ — собственное подпространство $A(\varPhi)$, и допустим, что в $\tilde{A}(\varPhi)$ имеется хотя бы одна АПС экспонент $E_{\Lambda_0} := (E_{\alpha_k})_{k=1}^\infty$, где $\Lambda_0 = (\alpha_k : k = 1, 2, \dots)$. Положим

$$(\forall n \geqslant 1) \;\; p_n(x) := \|\tilde{x}\|_n = \sup_{z\in G} \frac{|x(z)|}{\exp f_n(z)}; \quad q_n(x) := \sup_{z\in G} \frac{|x(z)|}{\exp g_n(z)}.$$

Тогда $(\forall x \in A(\Psi))$ $p_n(x) \leqslant q_n(x)$. В то же время для любых $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$

$$q_n(E_{\alpha_k}) = \exp\sup_{z\in G}[\mathrm{Re}\langle\alpha_k, z\rangle_p - g_n(z)] = \exp\left(f_n^{\star\star}(z)\right)^\star(\alpha_k) = \exp f_n^\star(\alpha_k) = p_n(E_{\alpha_k}).$$

Следовательно, $\tilde{A}(\Psi)$ — собственное E_{Λ_0}-подпространство пространства Фреше $\tilde{A}(\varPhi)$, и последнее не является пространством со строгой E_{Λ_0}-топологией. По теореме А E_{Λ_0} — не АПС в $\tilde{A}(\varPhi)$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 1$, G — выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ и $\varPhi = (f_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность отображений f_n области G в $\mathbb{R}$ со свойством (γ). Пусть, наконец, $A(\Psi) \neq A(\varPhi)$.*

Тогда в $\tilde{A}(\varPhi)$ нет ни одной АПС экспонент.

Из приведенного в § 4 примера следует, что обращение теоремы 1 возможно лишь при некоторых дополнительных предположениях относительно последовательности $\varPhi$.

3. О реализации сильного сопряженного к $\tilde{A}(\varPhi)$ пространства

3.1. Обратимся теперь к связи между наличием в $\tilde{A}(\varPhi)$ хотя бы одной АПС экспонент и возможностью реализации пространства $\left(\tilde{A}(\varPhi)\right)'_\beta$ в виде пространства целых функций описанной в п. 1.3 структуры.

Заметим, что эта связь в более общей ситуации исследовалась в статье [5], одним из результатов которой мы и воспользуемся.

Всюду в этом параграфе G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$. Предположим, что $O \in G$, и обозначим символом $A(\overline{G})$ пространство всех аналитических ростков (классов эквивалентности) на $\overline{G}$, с обычной топологией ν индуктивного предела ([6]).

Пусть последовательность $\Phi = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ отображений $f_n : G \to (-\infty, +\infty)$ обладает свойством (γ). Тогда, как легко проверить, $(A(\overline{G}), \nu) \hookrightarrow \tilde{A}(\Phi) \hookrightarrow A(G)$. Оценим для любого $n \geqslant 1$ величину Γ_n:

$$\Gamma_n := \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{p_n(\exp\langle t\alpha, z\rangle_p)}{p_n(\exp\langle \alpha, z\rangle_p)} = \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{\sup\{\exp[\mathrm{Re}\langle t\alpha, z\rangle_p - f_n(z)] : z \in G\}}{\sup\{\exp[\mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p - f_n(z)] : z \in G\}}$$

$$= \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \exp\{\sup[\mathrm{Re}\langle t\alpha, z\rangle_p - f_n(z) : z \in G] - \sup[\mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p - f_n(z) : z \in G]\}$$

$$\leqslant \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{t \in [0,1]} \exp\left\{\sup[\mathrm{Re}\langle t\alpha, z\rangle_p - \mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p] : z \in G\right\}$$

$$= \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{t \in [0,1]} \exp(t-1) \sup[\mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p : z \in G] = \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \sup_{t \in [0,1]} \exp(t-1) h_G(\alpha),$$

где $h_G(\alpha) := \sup_{z \in G} \mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p$ — опорная функция области G. Так как $O \in G$, то $h_G(\alpha) \geqslant 0$, $\alpha \in \mathbb{C}^p$, откуда $(t-1)h_G(\alpha) \leqslant 0$ при $t \in [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{C}^p$. Следовательно, $\Gamma_n \leqslant 1$ при $n \geqslant 1$.

Используем теперь пример, приведенный в [5] на с. 75, сразу же после предложения 3. Положим $(\forall n \geqslant 1)$ $\Psi_n(\alpha) := \exp\sup\{\mathrm{Re}\langle \alpha, z\rangle_p - f_n(z) : z \in G\} = \exp f_n^{\star}(\alpha)$. Как показано в 2.2, функция $\Psi_n = f_n^{\star}(\alpha)$ непрерывна в $\mathbb{C}^p$. Предположим, что $\tilde{A}(\Phi)$ — правильное пространство, т. е. (см. [7, с. 699]), что $\left(\tilde{A}(\Phi)\right)'_\beta$ бочечно. Введем, как в [5], пространство целых функций $(F, \mu) := \mathrm{ind}_n F_n$, где для любого $n \geqslant 1$

$$F_n := \left\{ y \in A(\mathbb{C}^p) : \sup_{\alpha \in \mathbb{C}^p} \frac{|y(\alpha)|}{p_n(\exp\langle \alpha, z\rangle_p)} < \infty \right\}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные на с. 75 работы [5] (после предложения 3 и до конца § 5), приходим к такому результату.

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, содержащая начало координат. Пусть, далее, $\Phi = \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность отображений $f_n : G \to (-\infty, +\infty)$ со свойством (γ) и такая, что $\tilde{A}(\Phi)$ — правильное пространство. Тогда равносильны следующие два утверждения:*

1) *в $\tilde{A}(\Phi)$ имеется хотя бы одна АПС вида $\{\exp\langle \delta_n, z\rangle_p\}_{n=1}^{\infty}, \delta_n \in \mathbb{C}^p,\ n = 1, 2, \ldots$;*

2) *пространство $\left(\tilde{A}(\Phi)\right)'_\beta$ топологически изоморфно пространству (F, μ).*

Замечание 1. Согласно ([7, гл. 8, § 8.4]) пространство $\tilde{A}(\Phi)$ правильно, если оно рефлексивно (в частности, монтелево) или если $\tilde{A}(\Phi)$ — B-пространство.

Замечание 2. Применяя стандартные рассуждения, легко показать, что если $(\forall n \geqslant 1)$ $\lim_{z \to \partial G} [f_n(z) - f_{n+1}(z)] = +\infty$, то $\tilde{A}(\Phi)$ — монтелевское пространство.

Замечание 3. Предположение о том, что $O \in G$, обусловлено примененным здесь методом доказательства, и от него, по-видимому, можно избавиться.

3.2. Что же касается предположения о правильности пространства $\tilde{A}(\Phi)$, то оно вызвано существом дела, в чем нас убеждает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ и $\Phi = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность отображений G в $\mathbb{R}$ со свойством (γ). Пусть, далее, пространство $(\tilde{A}(\Phi))'_\beta$ топологически изоморфно пространству (F, μ). Тогда пространство $\tilde{A}(\Phi)$ правильно.*

$\lhd$ Из предположений теоремы следует, что для любого $n \geqslant 1$ линейное нормированное пространство $F_n = \left\{ y \in A(\mathbb{C}^p) :\ \|y\|_n := \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{C}^p} \frac{|y(\alpha)|}{\exp f_n^\star(\alpha)} < \infty \right\}$ полно (по лемме 1), т. е. является B-пространством. Но тогда для каждого $n \geqslant 1$ F_n — бочечное пространство. Так как любой индуктивный предел бочечных пространств также является бочечным пространством (см., например, [7, с. 595, теорема 6.3.1]), то (F, μ) (а, следовательно, и $\tilde{A}(\varPhi))'_\beta$ — бочечное пространство. Как уже отмечалось выше, бочечность $(\tilde{A}(\varPhi))'_\beta$ равносильна правильности $\tilde{A}(\varPhi)$. $\rhd$

Непосредственно из теорем 2 и 3 вытекает следующий критерий справедливости теоремы Пэли — Винера — Шварца для пространства $\tilde{A}(\varPhi)$.

Теорема 4. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, содержащая начало координат, и $\varPhi = (f_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность отображений G в $\mathbb{R}$ со свойством (γ). Тогда равносильны такие утверждения:*

1) *пространство $(\tilde{A}(\varPhi))'_\beta$ топологически изоморфно пространству $\mathrm{ind}_n F_n$, где $(\forall n \geqslant 1)$*

$$F_n = \left\{ y \in A(\mathbb{C}^p) :\ \|y\|_n := \sup_{\alpha\in\mathbb{C}^p} \frac{|y(\alpha)|}{\exp f_n^\star(\alpha)} < +\infty \right\};$$

2) *пространство $(\tilde{A}(\varPhi))'_\beta$ бочечно и в $\tilde{A}(\varPhi)$ имеется хотя бы одна АПС экспонент.*

$\lhd$ 1) $\Rightarrow$ 2): Из 1) по теореме 3 следует правильность $\tilde{A}(\varPhi)$. Но тогда по теореме 2 из 1) вытекает наличие в $\tilde{A}(\varPhi)$ хотя бы одной АПС экспонент.

2) $\Rightarrow$ 1): Бочечность $(\tilde{A}(\varPhi))'_\beta$ равносильна правильности $\tilde{A}(\varPhi)$, и остается вновь применить (в обратном направлении) теорему 2. $\rhd$

3.3. В заключение этого параграфа отметим, что утверждение, совпадающее с теоремой 2, но с дополнительным исходным предположением $\lim\limits_{z\to\partial G} f_n(z) = +\infty$, $n \geqslant 1$, было приведено в докладе автора на Международной школе-семинаре памяти Н. В. Ефимова в 2004 году (см. [8, теорема 1]). В теореме 2 настоящей работы показывается, что это дополнительное условие на F излишне.

4. Пример

4.1. Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, $f_k(z) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. В данном случае последовательность $\varPhi_0 = \{0\}_{k=1}^\infty$ обладает свойством (γ), причем для всякого $k \geqslant 1$ $f_k^\star(\alpha) = h_G(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}^p$ (как и выше, $h_G(\alpha)$ — опорная функция области G). Далее, пространства

$$\tilde{A}(\varPhi) = \{ y \in A(G) :\ \|y\|_\infty := \sup[|y(z)| :\ z \in G] < \infty \} =: \mathcal{B}(G)$$

и

$$(F, \mu) = \left\{ v(z) \in A(\mathbb{C}^p) :\ \|v\| = \sup_{\alpha\in\mathbb{C}^p} \frac{|v(\alpha)|}{\exp h_G(\alpha)} < +\infty \right\} =: \mathcal{K}(G)$$

— банаховы. Введем еще B-пространство $AC(G)$ всех функций из $A(G)$, непрерывных на $\overline{G}$, с нормой $\|\tilde{w}\|_\infty := \max\{|w(z)| : z \in \overline{G}\} = \sup\{|w(z)| : z \in G\} =: \|w\|_\infty$. Для любых $k \geqslant 1$ и $\alpha \in \mathbb{C}^p$ имеем

$$\|\exp\langle\alpha, z\rangle_p\|_\infty = \exp\sup_{z\in G} \mathrm{Re}\langle\alpha, z\rangle_p = \exp\max_{z\in\overline{G}} \mathrm{Re}\langle\alpha, z\rangle_p = \|\widetilde{\exp\langle\alpha, z\rangle_p}\|_\infty.$$

Ясно, что $AC(G) \hookrightarrow \mathcal{B}(G)$. Если при этом $AC(G)$ — собственное подпространство $\mathcal{B}(G)$, то по теореме 1 в $\mathcal{B}(G)$ нет ни одной АПС экспонент. Далее по теореме 2 $(\mathcal{B}(G))'_\beta$ не изоморфно топологически пространству $\mathcal{K}(G)$, т. е. теорема типа Пэли — Винера — Шварца не имеет места для $\mathcal{B}(G)$ (легко убедиться в том, что теорема 2 в случае $\tilde{A}(\Phi) = \mathcal{B}(G)$ справедлива и без предположения о том, что $O \in G$).

Осталось выяснить, когда же $\mathcal{B} \setminus AC(G) \neq \varnothing$. Легко установить справедливость последнего соотношения при $p = 1$. Для этого достаточно определить функцию $g(x, y)$ на ∂G, положив ее равной нулю в какой-либо фиксированной точке $z_0 = (x_0, y_0)$ из ∂G и единице — в остальных точках ∂G. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи Дирихле в G с граничным условием $u\big|_{\partial G} = g(x, y)$. Тогда $\sup[u(x, y) : (x, y) \in G] < +\infty$. Обозначив через $v(x, y)$ гармоническую в G функцию, сопряженную с u и положив $a(z) := \exp[u(x, y) + iv(x, y)]$, получим: $a(z) \in \mathcal{B}(G) \subseteq A(G)$. Допустим, что $a(z) \in AC(G)$. Тогда $|a(z)| \in C(\overline{G})$. Но последнее включение невозможно, так как, взяв любую последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $(\forall n \geqslant 1)\ z_n \in \partial G,\ z_n \neq z_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, получим: $\lim\limits_{n} |a(z_n)| = e \neq 1 = |a(z_0)|$.

По-видимому, $AC(G)$ — собственное подпространство $\mathcal{B}(G)$ и при $p > 1$.

4.2. Можно рассмотреть и вопрос о существовании АПС экспонент в B-пространстве $AC(G)$, предполагая по-прежнему, что G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$. Как показали разными методами в своих дипломных работах, выполненных под руководством автора в Ростовском госуниверситете И. С. Шрайфель (1980/1981 учебный год) и Ха Зуй Банг (1981/1982 учебный год), при $p = 1$ в $AC(G)$ нет ни одной АПС экспонент. Случай $p > 1$ ими не рассматривался, и неясно, применимы ли к нему использованные ими методы. Представляется более перспективным, на наш взгляд, для многомерной ситуации в тех случаях, когда известно представление $(AC(G))'_\beta$, показать, что оно не изоморфно пространству $\mathcal{K}(G)$, а затем использовать теорему 2 (и здесь условие $O \in G$ излишне). Весьма вероятно, что в $AC(G)$ не имеется ни одной АПС экспонент и в случае, когда $p > 1$.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* Абсолютно представляющие семейства // Мат. заметки.—1987.—Т. 42, вып. 5.—С. 670–680.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—469 с.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, вып. 2.—С. 193–229.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Абсолютно представляющие семейства и реализация сопряженного пространства // Изв. вузов. Математика.—1990.—№ 2.—С. 68–76.
6. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Ann.—1966.—V. 63, № 1.—P. 62–88.
7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Абсолютно представляющие системы экспонент и реализация сильного сопряженного к пространству функций, аналитических в выпуклой области в $\mathbb{C}^p$, с заданным ростом вблизи границы // Тр. участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 2004.—С. 116–117.

Статья поступила 29 апреля 2005 г.

Коробейник Юрий Федорович, д.ф.-м.н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет;
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН
Email: kor@math.rsu.ru