Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.55**

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

А. Б. Секерин, Д. Е. Ломакин

Статья посвящается авторами Ю. Ф. Коробейнику в честь его юбилея. В числе многих заслуг юбиляра авторы отмечают его большой вклад в сохранение традиций и высокого уровня исследований российской математической школы в это трудное для фундаментальной науки время.

Рассматриваются свойства комплексного преобразования Радона (ПР) распределений и аналитических функционалов. В терминах ПР распределений дано необходимое и достаточное условие представимости функций разностью логарифмических потенциалов. На основе свойств ПР целых функций, рассматриваемых как распределения, описан образ ПР сопряженного пространства к пространству целых функций многих переменных.

Преобразование Радона (ПР) является объектом исследования в течение достаточно длительного периода. Свойства ПР на пространствах распределений исследовались в работах [2, 4, 5, 8–11]. Следует отметить, что, в отличие от действительного случая, ПР распределений в комплексном пространстве мало изучено. В данной работе приводится ряд новых результатов, связанных с комплексным ПР распределений и его применениями. Основным результатом первой части работы является необходимое и достаточное условие представимости функций разностью логарифмических потенциалов. Данное условие формулируется в терминах ПР распределений. Этот результат принадлежит Секерину А. Б. Во второй части работы описан образ ПР сопряженного пространства к пространству целых функций многих переменных. Этот результат установлен Ломакиным Д. Е. (за исключением предложенного Секериным А. Б. определения ПР аналитического функционала).

Введем необходимые обозначения. Для $z, w \in \mathbb{C}^n$ полагаем $\langle z, w\rangle = \sum z_j w_j$. Единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ обозначается через S^{2n-1}, $d\sigma$ — элемент площади сферы, $d\omega_{2n}$ — стандартная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, Δ — оператор Лапласа. Если X — локально компактное пространство, являющееся счетным объединением компактов, то через $C_c(X)$ будем обозначать пространство действительнозначных, непрерывных на X функций с компактным носителем. При этом будем считать, что на $C_c(X)$ задана стандартная топология индуктивного предела. Далее, зарядом на X будем называть действительнозначный, непрерывный функционал на $C_c(X)$. Известно [1], что любой заряд на X представляет собой разность положительных борелевских мер, конечных на компактах. Через $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать пространство гладких в $\mathbb{C}^n$ функций с компактным носителем.

Классическое комплексное ПР функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ задается равенством

$$[R\varphi](s,\xi) = \frac{1}{|\xi|^2} \int\limits_{\langle z, \xi/|\xi|\rangle = s/|\xi|} \varphi(z)\, d\lambda(z), \quad (s,\xi) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \setminus 0), \tag{1}$$

где $d\lambda$ — элемент площади на гиперплоскости $z : \langle z, \xi/|\xi|\rangle = s/|\xi|$.

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$ верно

$$[R\varphi](\alpha s, \alpha\xi) = |\alpha|^{-2}[R\varphi](s,\xi), \tag{2}$$

поэтому функцию $[R\varphi](s,\xi)$ мы будем отождествлять с ее сужением $[R\varphi](s,w)$ на $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, то $[R\varphi](s,w) \in \mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, где через $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ мы обозначаем пространство непрерывных по (s,w) функций $\varphi(s,w)$, принадлежащих $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ при каждом фиксированном w (будем считать, что на $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$ задана стандартная топология произведения).

Приведем определение ПР распределений, предложенное в [2, с. 171]. Рассмотрим векторное пространство M, образованное функциями вида

$$\psi(s,w) = \frac{\partial^{2n-2}[R\varphi](s,w)}{\partial s^{n-1}\partial \bar{s}^{n-1}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n). \tag{3}$$

Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$. На пространстве M определим функционал L_F:

$$(-1)^{n-1} b_n \langle L_F, \psi\rangle = \langle F, \varphi\rangle, \tag{4}$$

где ψ и φ связаны соотношением (3). Постоянная $b_n > 0$ в (4) определяется таким образом, чтобы для регулярных распределений, задаваемых основными функциями, обобщенное ПР совпадало с обычным. В силу формулы обращения для ПР [2, с. 165] функционал L_F определен корректно. *Преобразованием Радона* RF распределения F называется продолжение функционала L_F на $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Данное продолжение всегда существует, но не обязательно является распределением на $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Кроме того, в силу неединственности продолжения, ПР распределений определено неоднозначно, что является одной из основных трудностей при исследовании его свойств. Другим неудобством является также то, что в определение ПР распределений необходимо включать пространство, на которое продолжается функционал L_F. Это пространство, в свою очередь, зависит от рассматриваемой задачи.

Зададим на $[0,\infty) \times S^{2n-1}$ стандартную топологию произведения. Для множества $A \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $\hat{A}$ множество точек $(t,w) \in [0,\infty) \times S^{2n-1}$, таких, что гиперплоскость $z : \langle z, w\rangle = t$ пересекает A. В [3, с. 11] доказано, что для открытого множества Ω и компакта K в $\mathbb{C}^n$ множества $\hat{\Omega}$ и $\hat{K}$ соответственно открытое и компактное подмножества в $[0,\infty) \times S^{2n-1}$.

Пусть $u(z)$ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$. Функция $u(z)$ называется логарифмическим потенциалом, если на $[0,\infty) \times S^{2n-1}$ существует положительная мера μ, такая, что для любой области $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ верно равенство

$$u(z) = \int\limits_{\hat{\bar{\Omega}}} \ln|t - \langle z, w\rangle|\, d\mu(t,w) + H_\Omega(z),$$

где функция $H_\Omega(z)$ плюригармонична в Ω. Мера μ называется логарифмической мерой потенциала $u(z)$.

Функция $u(z)$ в $\mathbb{C}^n$ называется разностью логарифмических потенциалов, если $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_1(z)$, $u_2(z)$ — логарифмические потенциалы.

Задача представления функций разностью логарифмических потенциалов имеет самостоятельный интерес, а также важные приложения к вопросам построения мероморфных функций с заданным ростом и представления аналитических функций рядами экспонент [3]. В монографии [3] приведен ряд достаточных условий представимости функций разностью логарифмических потенциалов. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие.

Напомним, что действительнозначная функция $u(z)$ называется *δ-субгармонической*, если она равна разности субгармонических функций [7].

Теорема 1. *Пусть $u(z)$ — δ-субгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$. Для того, чтобы $u(z)$ была разностью логарифмических потенциалов, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Радона распределения $F = \Delta^n u$ имело нулевой порядок сингулярности, т. е. продолжалось до заряда на $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_1(z)$, $u_2(z)$ — логарифмические потенциалы, а μ_1 и μ_2 — их логарифмические меры. Положим $\nu = \mu_1 - \mu_2$. Из определения логарифмического потенциала следует, что для любой области $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ верно равенство

$$u(z) = \int\limits_{\hat{\hat{\Omega}}} \ln|t - \langle z, w\rangle|\, d\nu(t, w) + H_\Omega(z), \tag{5}$$

где функция $H_\Omega(z)$ плюригармонична в Ω.

Пусть $\varphi(z)$ — любая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. Имеем [3, с. 15]

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} \ln|s - \langle z, w\rangle| \Delta\varphi(z)\, d\omega_{2n}(z) = 2\pi[R\varphi](s, w), \quad (s, w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}. \tag{6}$$

Тогда для любой области $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, такой, что $\operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$, из (5) и (6) получаем

$$\langle \Delta^n u, \varphi\rangle = \langle u, \Delta^n \varphi\rangle = 2\pi \int\limits_{\hat{\hat{\Omega}}} \left[R\Delta^{n-1}\varphi\right](t, w)\, d\nu(t, w).$$

Легко показать, что из включения $\operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$ следует, что носитель сужения на $[0, \infty) \times S^{2n-1}$ функции $\left[R\Delta^{n-1}\varphi\right](s, w)$ содержится в $\hat{\hat{\Omega}}$. Поэтому верно

$$\langle \Delta^n u, \varphi\rangle = 2\pi \int\limits_{[0,\infty)\times S^{2n-1}} \left[R\Delta^{n-1}\varphi\right](t, w)\, d\nu(t, w). \tag{7}$$

Из формул, связывающих ПР функции и ее производных [2, с. 162], следует

$$\left[R\Delta^{n-1}\varphi\right](s, w) = \frac{\partial^{2n-2}[R\varphi](s, w)}{\partial s^{n-1}\partial \bar{s}^{n-1}}, \quad (s, w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}.$$

Поэтому из (7) следует, что для функционала L_F, определяемого на пространстве M по распределению $F = \Delta^n u$ равенством (4), верно

$$\langle L_F, \psi\rangle = (-1)^{n-1} b_n^{-1} 2\pi \int\limits_{[0,\infty)\times S^{2n-1}} \psi(t, w)\, d\nu(t, w), \quad \psi \in M.$$

Последнее равенство очевидно определяет непрерывное продолжение L_F на $C_c(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функционал L_F, определяемый по распределению $F = \Delta^n u$ равенством (4), продолжается до заряда μ на $C_c(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Для функции $h(t, w) \in C_c([0, \infty) \times S^{2n-1})$ определим ее продолжение на $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$ равенством $h^e(s, w) = h(|s|, e^{-i\theta} w)$, где $s \neq 0$, $\theta = \arg s$. При этом очевидно $h^e(s, w) \in C_c(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Зададим на $[0, \infty) \times S^{2n-1}$ заряд ν равенством

$$\int\limits_{[0,\infty)\times S^{2n-1}} h(t, w)\, d\nu(t, w) = \frac{(-1)^{n-1} b_n}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{C}\times S^{2n-1}} h^e(s, w)\, d\mu(s, w),$$

где число b_n то же, что и в (4). В силу (2) для преобразования Радона $[R\varphi](s, w)$ любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ и любого $\theta \in [0, 2\pi]$ верно $[R\varphi](s, w) \equiv [R\varphi](e^{i\theta} s, e^{i\theta} w)$. Поэтому

$$\int\limits_{[0,\infty)\times S^{2n-1}} [R\varphi](t, w)\, d\nu(t, w) = \frac{(-1)^{n-1} b_n}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{C}\times S^{2n-1}} [R\varphi](s, w)\, d\mu(s, w). \tag{8}$$

Представим заряд ν разностью положительных мер ν_1 и ν_2 и, используя явный вид формулы построения логарифмического потенциала по заданной мере [3, с. 54], построим логарифмические потенциалы $u_1(z)$ и $u_2(z)$ такие, что ν_1 и ν_2 — соответственно, их логарифмические меры. Пусть $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ и $\varphi(z)$ — любая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. Из определения логарифмического потенциала и из (6) следует

$$\langle \Delta^n (u_1 - u_2), \varphi \rangle = \langle u_1 - u_2, \Delta^n \varphi \rangle = 2\pi \int\limits_{[0,\infty)\times S^{2n-1}} \left[R\Delta^{n-1}\varphi \right](t, w)\, d\nu(t, w).$$

Тогда из (8) получаем

$$\langle \Delta^n (u_1 - u_2), \varphi \rangle = (-1)^{n-1} b_n \int\limits_{\mathbb{C}\times S^{2n-1}} \left[R\Delta^{n-1}\varphi \right](s, w)\, d\mu(s, w).$$

Так как в обозначениях формулы (4) мера μ задает функционал L_F, где $F = \Delta^n u$, то

$$\langle \Delta^n (u_1 - u_2), \varphi \rangle = \langle \Delta^n u, \varphi \rangle.$$

Поскольку здесь $\varphi(z)$ — любая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, то разность $h(z) = u(z) - (u_1(z) - u_2(z))$ удовлетворяет обобщенному уравнению $\Delta^n h(z) = 0$. В силу эллиптичности оператора Δ^n функция $h(z)$ почти всюду в $\mathbb{C}^n$ равна некоторой гладкой функции $H(z)$ [6, с. 81]. Далее [3, с. 64] любая гладкая функция в $\mathbb{C}^n$ — разность логарифмических потенциалов. Таким образом, доказано существование логарифмических потенциалов $v_1(z)$ и $v_2(z)$, таких что почти всюду в $\mathbb{C}^n$ верно $u(z) = v_1(z) - v_2(z)$. Так как субгармонические функции, равные почти всюду, равны тождественно, то же самое верно и для δ-субгармонических функций. Тогда всюду в $\mathbb{C}^n$ верно $u(z) = v_1(z) - v_2(z)$. $\rhd$

Рассмотрим пространство $H(\mathbb{C}^n)$ целых в $\mathbb{C}^n$ функций в стандартной топологии равномерной сходимости на компактах. Через $H'(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве $H(\mathbb{C}^n)$. Введем также пространство $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ функций вида $f(s, w), (s, w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}$, непрерывных по совокупности переменных и целых по s в $\mathbb{C}$. Топологию в $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ зададим с помощью счетного набора норм

$$\|f\|_k = \max_{|s|\leqslant k, w\in S^{2n-1}} |f(s, w)| \quad (k = 1, 2, \dots).$$

На пространстве $\mathcal{C}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, состоящем из функций, непрерывных на $\mathbb{C}\times S^{2n-1}$ рассмотрим оператор

$$[\mathcal{R}^* f](z) = \int\limits_{S^{2n-1}} f(\langle z, w\rangle, w)\, d\sigma(w).$$

Этот оператор является дуальным к ПР, т. е. для любой функции φ из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ верно [3, с. 10]

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} [\mathcal{R}^* f](z)\varphi(z)\, d\omega_{2n}(z)) = \int\limits_{\mathbb{C}\times S^{2n-1}} f(s,w)[R\varphi](s,w) d\omega_2(s)\, d\sigma(w). \tag{9}$$

Назовем *преобразованием Радона* функционала $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ линейный функционал, заданный на $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, и определяемый соотношением

$$\langle \mathcal{R}\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, \mathcal{R}^*\varphi\rangle, \tag{10}$$

где $\varphi \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$.

Теорема 2. *Функционал $\mathcal{R}\mu$, задаваемый формулой* (10), *непрерывен в топологии $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$.*

$\lhd$ Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой последовательности $\varphi_k \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, сходящейся к нулю в топологии $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, последовательность комплексных чисел $\langle \mathcal{R}\mu, \varphi_k\rangle$ сходится к нулю.

Пусть $\{\varphi_k\} \subset H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ и $\varphi_k \to 0$ в топологии $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$. Нетрудно показать, что оператор $\mathcal{R}^*$ непрерывно отображает пространство $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ в $H(\mathbb{C}^n)$. Тогда последовательность $\mathcal{R}^*\varphi_k \to 0$ в топологии $H(\mathbb{C}^n)$, а, следовательно, так как $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$, $\langle \mu, \mathcal{R}^*\varphi_k\rangle \to 0$. Из формулы (10) следует тогда, что $\langle \mathcal{R}\mu, \varphi_k\rangle \to 0$. $\rhd$

Через $H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство линейных непрерывных функционалов на $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$. Из определения следует, что оператор ПР аналитических функционалов линеен на $H'(\mathbb{C}^n)$, т. е., в силу теоремы 2, $\mathcal{R} : H'(\mathbb{C}^n) \to H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ — линейный оператор.

Пусть $\operatorname{Ker}\mathcal{R}^*$ — ядро оператора $\mathcal{R}^*$, т. е.

$$\operatorname{Ker}\mathcal{R}^* = \{\varphi \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1}) : [\mathcal{R}^*\varphi](z) \equiv 0\}.$$

Следующая теорема дает описание образа оператора $\mathcal{R}$.

Теорема 3. *Пусть $f \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$. Для того, чтобы функционал f был преобразованием Радона $\mathcal{R}\mu$ некоторого функционала $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольной функции $\varphi \in \operatorname{Ker}\mathcal{R}^*$ было выполнено условие:*

$$\langle f, \varphi\rangle = 0.$$

$\lhd$ Докажем необходимость. Пусть $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ и $f = \mathcal{R}\mu$. Тогда, по определению, для любой функции φ из $\operatorname{Ker}\mathcal{R}^*$ имеем:

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle \mathcal{R}\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, \mathcal{R}^*\varphi\rangle = 0.$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность.

Пусть дан линейный непрерывный функционал f на пространстве $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$. Пусть далее для любой функции φ из $\operatorname{Ker}\mathcal{R}^*$ верно $\langle f, \varphi\rangle = 0$. Докажем, что найдется такой функционал $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$, что $\mathcal{R}\mu = f$.

Положим для $\psi \in H(\mathbb{C}^n)$

$$\langle \mu, \psi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

где φ — любая функция из $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ такая, что $\mathcal{R}^*\varphi = \psi$. Покажем, что функционал μ определен корректно. Сначала покажем, что для любой функции $\psi \in H(\mathbb{C}^n)$ существует такая функция $\varphi \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, что $\mathcal{R}^*\varphi = \psi$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A} : H(\mathbb{C}^n) \to H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, задаваемый формулой

$$[\mathcal{A}F](s, w) = \frac{1}{2\pi i} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + jI \right) F(z) \Bigg|_{z = s\bar{w}},$$

где I — тождественный оператор. В силу теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости оператор $\mathcal{A} : H(\mathbb{C}^n) \to H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ непрерывен. В [3, с. 75] показано, что если $\varphi = \mathcal{A}\psi$, то для функции ψ справедливо равенство $\psi = \mathcal{R}^*\varphi$. Таким образом, для любой функции $\psi \in H(\mathbb{C}^n)$ существует функция $\varphi = \mathcal{A}\psi, \varphi \in H(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ такая, что $\mathcal{R}^*\varphi = \psi$ и $\langle \mu, \psi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$.

Пусть теперь для функции $\psi \in H(\mathbb{C}^n)$ существуют функции $\varphi_1, \varphi_2 \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ такие, что $\psi = \mathcal{R}^*\varphi_1$ и $\psi = \mathcal{R}^*\varphi_2$. Тогда $\mathcal{R}^*(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а, следовательно, $\varphi_1 - \varphi_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{R}^*$. Из условия теоремы следует $\langle f, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$, т. е. $\langle f, \varphi_1 \rangle = \langle f, \varphi_2 \rangle$. Поэтому значение $\langle \mu, \psi \rangle$ функционала μ определено корректно. Покажем, что функционал μ непрерывен в топологии $H(\mathbb{C}^n)$.

Пусть последовательность элементов ψ_k из $H(\mathbb{C}^n)$ сходится к нулю в топологии этого пространства. Тогда, в силу непрерывности оператора $\mathcal{A}$, последовательность $\varphi_k = \mathcal{A}\psi_k$ сходится к нулю в топологии $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Следовательно, $\langle \mu, \psi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. μ — линейный непрерывный функционал.

Покажем, что $\mathcal{R}\mu = f$. Пусть φ — любая функция из $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. По определению $\langle \mathcal{R}\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \mathcal{R}^*\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. $\triangleright$

Дадим описание ядра оператора $\mathcal{R}^*$. Рассмотрим произвольную функцию $h(s, w)$ из пространства $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Нетрудно показать, что функция $h(s, w)$ может быть представлена в виде

$$h(s, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(w) s^k,$$

где коэффициенты $c_k(w)$ непрерывны, и ряд сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$. В данных обозначениях справедлива теорема.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $h(s, w)$ из пространства $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ принадлежала ядру оператора $\mathcal{R}^*$ необходимо и достаточно, чтобы для любой сферической гармоники Y_m степени m и любого $k \geqslant m$ выполнялось*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^{2n-1}} \left(\int\limits_{0}^{2\pi} c_k(we^{i\theta}) e^{ik\theta} \, d\theta \right) Y_m(w) \, d\sigma(w) = 0.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим на $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ функционал F, задаваемый функцией $h(s, w) \in H(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Тогда для всех $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, в силу формулы (9), имеем:

$$\langle F, R\varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{C} \times S^{2n-1}} h(s, w) [R\varphi](s, w) \, d\omega_2(s) \, d\sigma(w) = \int\limits_{\mathbb{C}^n} [\mathcal{R}^* h](z) \varphi(z) \, d\omega_{2n}(z).$$

Отсюда следует, что $[\mathcal{R}^*h](z) = 0$ тогда и только тогда, когда функционал F равен нулю на подпространстве $R\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, образованном преобразованиями Радона функций из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. В [3, с. 79] доказано, что для того, чтобы функционал $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ обращался в нуль на $R\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ необходимо и достаточно, чтобы для любой сферической гармоники Y_m степени $m \geqslant 1$ функционал

$$\langle G_{Y_m}, a(s)\rangle = \left\langle F, \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(se^{i\theta})Y_m(we^{i\theta})\,d\theta\right\rangle, \quad a(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$$

задавался мерой $P_m(s,\bar{s})d\omega_2(s)$, где $P_m(s,\bar{s})$ — многочлен степени не выше $m-1$, а при $m = 0$ было $G_{Y_m} = 0$.

Согласно цитированной теореме, для произвольной функции $a(s)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ имеем:

$$\begin{aligned}\langle F_{Y_m}, a(s)\rangle &= \left\langle h, \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(se^{i\theta})Y_m(we^{i\theta})\,d\theta\right\rangle \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}}\left(\int\limits_{S^{2n-1}} h(s,w)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(se^{i\theta})Y_m(we^{i\theta})d\theta\right)d\sigma(w)\right)d\omega_2(s) \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}} P_m(s,\bar{s})a(s)\,d\omega_2(s),\end{aligned}$$

где $P_m(s,\bar{s})$ — многочлен степени не выше $m-1$.

По теореме Фубини имеем:

$$\langle F_{Y_m}, a(s)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{S^{2n-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{C}} h(s,w)a(se^{i\theta})Y_m(we^{i\theta})\,d\omega_2(s)\right)d\sigma(w)\right)d\theta.$$

Положим во внутреннем интеграле $s = \lambda e^{-i\theta}$. Тогда

$$\langle F_{Y_m}, a(s)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{S^{2n-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{C}} h(\lambda e^{-i\theta},w)a(\lambda)Y_m(we^{i\theta})\,d\omega_2(\lambda)\right)d\sigma(w)\right)d\theta.$$

Меняя порядок интегрирования и полагая $w = \xi e^{-i\theta}$, получаем

$$\langle F_{Y_m}, a(s)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{\mathbb{C}}\left(\int\limits_{S^{2n-1}} h(\lambda e^{-i\theta},\xi e^{-i\theta})a(\lambda)Y_m(\xi)\,d\sigma(\xi)\right)d\omega_2(\lambda)\right)d\theta.$$

Пусть

$$\tilde{h}(s,w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(se^{i\theta},we^{i\theta})\,d\theta.$$

Тогда, вновь меняя порядок интегрирования, получаем

$$\langle F_{Y_m}, a(s)\rangle = \int\limits_{\mathbb{C}}\left(\int\limits_{S^{2n-1}}\tilde{h}(s,w)Y_m(w)d\sigma(w)\right)a(s)d\omega_2(s) = \int\limits_{\mathbb{C}} P_m(s,\bar{s})a(s)\,d\omega_2(s).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S^{2n-1}} \tilde{h}(s,w) Y_m(w)\, d\sigma(w) = P_m(s,\bar{s}).$$

Так как функция $h(s,w)$ представляется в виде

$$h(s,w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(w) s^k,$$

то

$$\tilde{h}(s,w) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} c_k(we^{i\theta}) e^{ik\theta}\, d\theta.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^{2n-1}} \left(\int\limits_0^{2\pi} c_k(we^{i\theta}) e^{ik\theta} d\theta \right) Y_m(w)\, d\sigma(w) \right) s^k = P_m(s,\bar{s}).$$

Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда для всех $k \geqslant m$ верно

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^{2n-1}} \left(\int\limits_0^{2\pi} c_k(we^{i\theta}) e^{ik\theta}\, d\theta \right) Y_m(w)\, d\sigma(w) = 0. \ \triangleright$$

Литература

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер.—М.: Наука, 1967.—396 с.
2. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.—М.: Наука, 1962.—656 с.
3. *Секерин А. Б.* Применения преобразования Радона в теории аппроксимации.—Уфа: Башкирск. научн. центр УрО АН СССР, 1991.—192 с.
4. *Хелгасон С.* Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.—152 с.
5. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ.—М.: Мир, 1987.—736 с.
6. *Хермандер Л.* Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Мир, 1986.—456 с.
7. *Arsove M. G.* Functions, representiable as differences of subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 75, № 2.—P. 327–365.
8. *Hertle A.* Continuity of the Radon transform and its inverse on Euclidean spaces // Math. Zeitschr.—1983.—V. 184.—P. 165–192.
9. *Hertle A.* On the range of the Radon transform and its dual // Math. Ann.—1984.—V. 267, № 1.—P. 91–99.
10. *Ludwig D.* The Radon transform on Euclidean space // Comm. Pure Appl. Math.—1966.—V. 19.—P. 49–81.
11. *Sekerin A. B.* The support theorem for the complex Radon transform of distributions // Collectanea Mathematica.—2004.—V. 55, № 3—P. 243–251.

Статья поступила 7 мая 2005 г.

Секерин Алексей Борисович, д. ф.-м. н.
г. Орел, Орловский государственный университет
E-mail: `sekerin@orel.ru`

Ломакин Денис Евгеньевич
г. Орел, Орловский государственный университет
E-mail: `denislomakin@rambler.ru`