Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2005, Том 7, Выпуск 4

УДК **517.98**

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОРТОСИММЕТРИЧЕСКИХ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

А. Г. Кусраев

Семену Самсоновичу Кутателадзе
на добрую память о «встрече на Эльбе»
(24–29 июля 2005 года, Дрезден)

Если в векторной решетке зафиксировать положительно определенный биморфизм, то все регулярные ортосимметрические билинейные операторы представимы как суперпозиции линейных регулярных операторов с этим биморфизмом.

Цель настоящей заметки — установить один общий результат о представлении ортосимметрических билинейных операторов в векторных решетках: если зафиксировать положительно определенный биморфизм, то все регулярные ортосимметрические билинейные операторы представимы как суперпозиции линейных регулярных операторов с этим биморфизмом. Этот факт обобщает теорему 1 из [6] и лемму 4 из [7], но основан на ином подходе. Используются терминология и обозначения из [1]. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются архимедовыми.

Возьмем векторные решетки E и F. Билинейный оператор $b:\ E\times E\to F$ называют *ортосимметрическим*, если $x\perp y$ влечет $b(x,y)=0$ для любых $x,y\in E$, см. [3, 5, 6]. Для положительного билинейного оператора b ($b(x,y)\geqslant 0$ при $x,y\in E_+$) в силу неравенства $|b(x,y)|\leqslant b(|x|,|y|)$ ортосимметричность равносильна справедливости импликации $x\wedge y=0\to b(x,y)=0$ для всех $x,y\in E$. Скажем, что оператор b *положительно полуопределен*, если $b(x,x)\geqslant 0$ для всех $x\in E$. Если же, сверх того, из $b(x,x)=0$ следует $x=0$, то b будем называть *положительно определенным.* Множество всех ортосимметрических регулярных билинейных операторов из $E\times E$ и F обозначим символом $BL_{or}(E,E;F)$. Пусть $L_r(E,F)$ — пространство всех регулярных линейных операторов из E в F. Ясно, что $BL_{or}(E,E;G)$ и $L_r(E,F)$ — упорядоченные векторные пространства, в каждом из которых конусом положительных элементов служит множество положительных операторов. Теперь мы сможем сформулировать основной результат настоящей заметки.

Теорема. *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G полна относительно сходимости с регулятором. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ E\times E\to F$ — положительно определенный решеточный биморфизм, причем подрешетка в F, порожденная множеством $\{\langle x,y\rangle:\ x,y\in E\}$, совпадает с F. Тогда для любого ортосимметрического регулярного билинейного оператора $b:\ E\times E\to G$ — существует и притом единственный регулярный линейный оператор $\Phi:=\Phi_b:F\to G$ такой, что*

$$b(x,y)=\Phi_b(\langle x,y\rangle)\quad (x,y\in E).$$

Сопоставление $b \mapsto \Phi_b$ осуществляет изоморфизм упорядоченных векторных пространств $BL_{or}(E,E;G)$ и $L_r(F,G)$.

Доказательству предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Решеточный биморфизм $b : E \times E \to F$ ортосимметричен в том и только том случае, если он положительно полуопределен. В этом случае $b(x,y) = b(y,x)$ для всех $x, y \in E$.*

$\triangleleft$ Пусть b — положительно полуопределенный решеточный биморфизм. Возьмем $x, y \in E$ и положим $\alpha := b(x,x)$, $\beta := b(y,y)$ и $\gamma := b(x,y) + b(y,x)$. В силу положительной полуопределенности $\alpha + \beta - \gamma = b(x-y, x-y) \geqslant 0$. Если $x \wedge y = 0$, то $b(x,y) \geqslant 0$ и, поскольку $b(x,\cdot)$ и $b(\cdot,x)$ — решеточные гомоморфизмы, можем написать $\alpha \wedge b(x,y) = b(x, x \wedge y) = 0$ и $\alpha \wedge b(y,x) = b(x \wedge y, x) = 0$. Тем самым, $\alpha \perp \gamma$ и аналогично $\beta \perp \gamma$. Но тогда $(\alpha + \beta) \perp \gamma$, и из неравенства $\alpha + \beta - \gamma \geqslant 0$ вытекает $\gamma = 0$, стало быть, $b(x,y) = b(y,x) = 0$. Обратное верно для любого положительного b, так как из ортосимметричности b вытекает $b(x,x) = b(x^+,x^+) + b(x^-,x^-)$. Последнее утверждение леммы следует из [6; следствие 2]. $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть Q — компактное хаусдорово топологическое пространство и E — равномерно плотная подрешетка в $C(Q)$. Пусть G — векторная решетка, а $\widehat{G}$ — ее порядковое пополнение. Для любого положительного ортосимметрического билинейного оператора $b : E \times E \to G$ существует и притом единственная положительная счетно аддитивная квазирегулярная борелевская мера на $Q \times Q$ со значениями в $\widehat{G}$ такая, что*

$$b(x,y) = \int\limits_{Q\times Q} x(s)y(t)\,d\mu(s,t) \quad (x,y \in E)$$

и $\mu(Q \times Q \setminus \Delta) = 0$, где $\Delta := \{(q,q) : q \in Q\}$ — диагональ $Q \times Q$.

$\triangleleft$ Существование меры μ, обеспечивающей указанное представление, показано в [2; предложение 1.7]. Используя лемму Урысона [4; теорема 1.5.10], можно показать, что $\mu(K) = 0$ для любого компакта $K \subset Q \times Q \setminus \Delta$, см. [9; пример 2.3]. Так как $Q \times Q \setminus \Delta$ открыто, то остается заметить, что в силу квазирегулярности μ имеем $\mu(Q \times Q \setminus \Delta) = \sup\{\mu(K) : K \subset Q \times Q\ \Delta,\ K \text{ — компакт}\} = 0$. $\triangleright$

Лемма 3. *Пусть линейный положительный оператор $T : E \,\bar{\otimes}\, E \to G$ таков, что билинейный оператор $T\bar{\otimes} : E \times E \to G$ ортосимметричен. Если $Tu > 0$ для некоторого $0 \leqslant u \in E \,\bar{\otimes}\, E$, то существует элемент $e \in E$ такой, что $0 < e \otimes e \leqslant u$.*

$\triangleleft$ В силу свойств тензорного произведения $E \,\bar{\otimes}\, E$ (см. [8; пункт (iii) теоремы 4.2]) существует $e_0 \in E_+$, для которого $u \leqslant e_0 \otimes e_0$. Пусть E_0 — порядковый идеал в E, порожденный элементом e_0. Тогда $E_0 \,\bar{\otimes}\, E_0$ — подрешетка в $E \,\bar{\otimes}\, E$, порожденная множеством $E_0 \otimes E_0$ (см. [8; следствие 4.5]), и если T_0 — ограничение оператора T на $E_0 \otimes E_0$, то билинейный оператор $b_0 := T_0\bar{\otimes} : E_0 \times E_0 \to G$ положителен и ортосимметричен. В силу теоремы Крейнов — Какутани E_0 можно считать равномерно плотной подрешеткой решетки $C(Q)$ для некоторого компактного хаусдорфова пространства Q, причем E_0 содержит константы и разделяет точки. В силу леммы 2 существует счетно аддитивная положительная квазирегулярная борелевская мера μ со значениями в порядковом пополнении $\widehat{G}$ такая, что

$$b_0(x,y) = \int\limits_{Q\times Q} x(s)y(t)\,d\mu(s,t) \quad (x,y \in E_0).$$

Более того, $\mu(Q \times Q \setminus \Delta) = 0$. Если функция $u \in E_0 \mathbin{\bar\otimes} E_0$ обращается в нуль на Δ, то

$$Tu = \int\limits_{Q\times Q} u\,d\mu = \int\limits_{Q\times Q\setminus\Delta} u\,d\mu + \int\limits_{\Delta} u\,d\mu = 0,$$

что противоречит условию $Tu > 0$. Тем самым, $u(q,q) > 0$ для некоторого $q \in Q$. Подберем $\varepsilon > 0$ так, что открытое множество $\{(p,p') \in Q \times Q : u(p,p') > \varepsilon\}$ содержало в себе прямоугольник $V \times V$ для некоторой открытой окрестности V точки q. По лемме Урысона [4; теорема 1.5.10] существует непрерывная функция $x : Q \to [0,1]$ такая, что $x(q) = 1$ и $x(p) = 0$ для всех $p \notin V$. Ясно, что $\varepsilon x \otimes x \leqslant u$. Так как E_0 равномерно плотна в $C(Q)$, то можно подобрать такую функцию $e_1 \in E_0$, что $|e_1 - \varepsilon x + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{1}| \leqslant \frac{3}{4}\mathbb{1}$. Тогда $\varepsilon(x - \frac{3}{4}\mathbb{1}) \leqslant e_1 \leqslant \varepsilon(x - \frac{1}{4}\mathbb{1}) \leqslant \varepsilon x$ и для $e := e_1^+ \in E_0$ будет $0 < e \leqslant \varepsilon x$, так как $e_1(q) = \frac{1}{4} = e(q)$. Тем самым, $0 < e \otimes e \leqslant u$. $\rhd$

Приступим теперь к доказательству сформулированной теоремы.

$\lhd$ По теореме Д. Фремлина [8; пункт (i) теоремы 4.2] существует решеточный гомоморфизм $\phi : E \mathbin{\bar\otimes} E \to F$ такой, что $\langle\cdot,\cdot\rangle = \phi\,\bar\otimes$. Так как $\phi(E \mathbin{\bar\otimes} E)$ — подрешетка в F и содержит все элементы вида $\langle x, y\rangle$, то $F = \phi(E \mathbin{\bar\otimes} E)$. Возьмем ортосимметрический положительный билинейный оператор $b : E \times E \to G$. В силу свойств тензорного произведения по Д. Фремлину [8; теорема 5.3] существует и притом единственный положительный оператор $T : E \mathbin{\bar\otimes} E \to G$, для которого $T\bar\otimes = b$. Если подберем линейный оператор $\Phi : F \to G$, для которого $T = \Phi \circ \phi$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \times E \arrow[dd, "\bar\otimes"'] \arrow[dr, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] \arrow[drr, "b"] & & \\
& F \arrow[r, dashed, "\Phi"] & G \\
E \mathbin{\bar\otimes} E \arrow[ur, "\phi"] \arrow[urr, "T"'] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. В частности, $b = \Phi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle$. Если $f \in F_+$, то в силу сюръективности ϕ имеем $f = \phi(u)$ для некоторого $0 \leqslant u \in E \mathbin{\bar\otimes} E$, поэтому $\Phi(f) = Tu \geqslant 0$, т. е. Φ положителен. Единственность Φ вытекает из равенства $\Phi \circ \phi = T$. Итак, для существования Φ с указанными свойствами достаточно установить, что $\ker(\phi) \subset \ker(T)$. Так как ϕ — решеточный гомоморфизм, то $u \in \ker(\phi)$ в том и только в том случае, если $|u| \in \ker(\phi)$, поэтому можно ограничиться случаем положительного $u \in E \mathbin{\bar\otimes} E$. Если $0 \leqslant u \notin \ker(T)$, то по лемме 3 можно подобрать $0 < e \in E$ так, что $e \otimes e \leqslant u$. Но тогда $0 = \phi(u) \geqslant \phi(e \otimes e) = \langle e, e\rangle$, что противоречит положительной определенности $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Итак, $\ker(\phi) \subset \ker(T)$, что и требовалось.

Если теперь b — ортосимметрический регулярный билинейный оператор, то $b = b_1 - b_2$ для некоторых $0 \leqslant b_1, b_2 \in BL_{or}(E, E; G)$. Согласно доказанному существует пара положительных операторов $\Phi_1, \Phi_2 \in L_r(F, G)$ такая, что $b_k = \Phi_k \circ \langle\cdot,\cdot\rangle$. Для $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$ будет $\Phi \in L_r(F, G)$ и $b = \Phi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle$. Единственность Φ видна из того, что $\Phi \circ \phi = T_1 - T_2$, где положительные операторы $T_1, T_2 \in L_r(E \mathbin{\bar\otimes} E, G)$ однозначно определяются равенствами $T_k\bar\otimes = b_k$ $(k = 1, 2)$. $\rhd$

Пусть L обозначает линейную оболочку множества $\{\langle x, y\rangle : x, y \in E\}$, а векторную решетку $F := \phi(E \,\bar{\otimes}\, E)$ обозначим символом $\langle E\rangle$.

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *L плотно в $\langle E\rangle$ в том смысле, что для любых $u \in \langle E\rangle$ и $\varepsilon > 0$ существуют $e_0 \in E$ и $v \in L$ такие, что $|u - v| \leqslant \varepsilon\langle e_0, e_0\rangle$;*

(2) *если $0 < u \in \langle E\rangle$, то существует элемент $0 < e \in E$, для которого $\langle e, e\rangle \leqslant u$.*

$\triangleleft$ Утверждение (1) следует из [8; пункт (iii) теоремы 4.2], а (2) из леммы 3. $\triangleright$

Следствие 2. *Пусть A — точная f-алгебра, E — произвольная векторная подрешетка в A, F — произвольная векторная подрешетка в A, порожденная множеством $\{xy : x, y \in E\}$, G — (r)-полная векторная решетка. Тогда для любого положительного ортосимметрического билинейного оператора $b : E \times E \to G$ существует единственный положительный оператор $\Phi_b : F \to G$ такой, что $b(x, y) = \Phi_b(xy)$ $(x, y \in E)$.*

$\triangleleft$ Умножение в точной f-алгебре является положительно определенным решеточным биморфизмом. Поэтому достаточно взять в основной теореме $\langle x, y\rangle := xy$ $(x, y \in E)$. $\triangleright$

Можно убрать требование (r)-полноты G из условия следствия 2, но тогда Φ_b можно определить только на линейной оболочке L множества произведений $\{xy : x, y \in E\}$, см. [7; лемма 4]. Если же E (r)-полна, то F совпадает с L, см. [7; лемма 8].

Пусть P и Q — экстремальные компакты, σ — непрерывное отображение открыто-замкнутого множества $P_0 \subset P$ в Q, причем считаем, что $\sigma(P_0)$ плотно в Q. Пусть E — подрешетка в $C_\infty(P)$ и для $e \in E$ обозначим символом $\sigma^* e$ функцию из $C_\infty(P)$ определяемую как $e(\sigma(p))$ при $p \in P_0$ и обращающуюся в нуль на $P \setminus P_0$. Зафиксируем слабую порядковую единицу $w \in C_\infty(P)$ и обозначим буквой F подрешетку в $C_\infty(P)$, порожденную множеством $\{w\sigma^*(e)\sigma^*(f) : e, f \in E\}$.

Следствие 3. *Для любого регулярного ортосимметрического оператора $b : E \times E \to G$ существует единственный регулярный линейный оператор $\Phi_b : F \to G$ такой, что*

$$b(e, f) = \Phi_b(w\sigma^*(e)\sigma^*(f)) \quad (e, f \in E).$$

Сопоставление $b \mapsto \Phi_b$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $BL_{or}(E, E; G)$ и $L_r(F, G)$.

$\triangleleft$ Нужно применить основную теорему к биморфизму $\langle e, f\rangle := w\sigma^*(e)\sigma^*(f)$. Положительная определенность обеспечивается тем, что $\sigma(P_0)$ плотно в Q и w обращается в нуль лишь на нигде не плотном множестве. $\triangleright$

Литература

1. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—519 с.
2. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 59–70.
3. *Кусраев А. Г., Шотаев Г. Н.* Билинейные мажорируемые операторы / В кн.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 241–262.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.—М.: Мир, 1986.—751 с.
5. *Buskes G. J. H. M.* Five theorems in the theory of Riesz spaces // In: Circumspice.—Nijmegen: Katholieke Universiteit Nijmegen, 2001.—P. 3–10.
6. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Almost f-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity.—2000.—V. 4.—P. 227–231.

7. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Almost f-algebras: structure and Dedekind completion // Positivity.—2000.—V. 4.—P. 227–231.
8. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—V. 94.—P. 777–798.
9. *van Gaans O. W.* The Riesz part of a positive bilinear from // In: Circumspice.—Nijmegen: Katholieke Universiteit Nijmegen, 2001.—P. 19–30.

Статья поступила 16 сентября 2005 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН и РСО-А
E-mail: `kusraev@alanianet.ru`