Владикавказский математический журнал
апрель–июнь, 2007, Том 9, Выпуск 2

УДК **512.552.32+514.146.7**

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ АРГУНОВА — ГЛИСОНА

И. А. Хубежты

Получено полное описание бесконечной плоскости Фано, представляющее собой положительное решение проблемы Аргунова — Глисона.

Ключевые слова: Плоскость Фано, альтернативное тело, конфигурационная теорема, проблема Аргунова — Глисона.

Введение

Паппову плоскость изучали Штаудт, Штейнер, Шаль, Гильберт, Глаголев, Гуревич и др. Дезаргову плоскость впервые описал Гильберт в [1]. Проективную плоскость, в которой выполняется проективно малая теорема Дезарга $D_{10} \Leftrightarrow L_{10}$, изучали Руфь Муфанг [10], Скорняков [11], и др. (эти плоскости называются муфанговыми). Проективную плоскость, в которой проективно выполняется конфигурационная теорема Фано 7_3, изучал Глисон [6]. Он доказал, что конечная плоскость Фано дезаргова и, следовательно, паппова. Бесконечную плоскость Фано изучали Глисон, Рашевский [10], Скорняков [11], Аргунов [2]. Аргуновым и Глисоном была поставлена следующая проблема: «Не дезаргова ли бесконечная плоскость Фано?». В настоящей работе получено полное описание бесконечной плоскости Фано и, следовательно, решение проблемы Аргунова — Глисона.

1. Необходимые сведения

Определение 1.1 [3]. Классическая алгебраическая система $A(+,\cdot)$, в которой имеют место аксиомы

(1) $A(+)$ — абелева группа,

(2) $A(\cdot)\backslash\{0\}$ есть IP-лупа,

(3) $(a+b)c = ac+bc$ (a,b,c),

(4) $a(b+c) = ab+ac$ (a,b,c),

называется *альтернативным телом.*

Теорема 1.1 (Линник) [4]. *Всякое альтернативное тело характеристики 2 ассоциативно.*

Конфигурационная теорема Фано 1.1 (7_3) [6]. *Пусть для точек* $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}$ *общего положения выполняются инциденции:* $\bar{6} = [\bar{1},\bar{4}] \cap [\bar{2},\bar{3}]$, $\bar{5} = [\bar{1},\bar{2}] \cap [\bar{3},\bar{4}]$, $\bar{7} = [\bar{1},\bar{3}] \cap [\bar{2},\bar{4}]$. *Тогда будет выполняться и инциденция* $(\bar{5},\bar{6},\bar{7})$.

Определение 1.2. Проективная плоскость, в которой проективно выполняется теорема 7_3, называется *плоскостью Фано.*

Определение 1.3 [2, 7]. Конфигурационная теорема K_1, содержащая все инциденции теоремы K_2 и еще хотя бы одну дополнительную инциденцию каких-то элементов K_2 в плоскости G_p^* характеристики p, называется частным случаем теоремы K_2, в плоскости G_p^*. Конфигурационные теоремы K и R в плоскости G_p^* называются *эквивалентными проективно-алгебраически*, если они или их частные случаи K_i и R_i соответственно даже при отсутствии R и K или одной из них в плоскости G_p^* в своем исходном виде, имеют одну и ту же совокупность локальных алгебраических эквивалентов.

Определение 1.4 [7]. Совокупность всех общих и ограниченных квазитождеств теоремы K и ее следствий K_i в плоскости G_p^*, называется проективным алгебраическим эквивалентом теоремы K в тернаре плоскости G_p^*.

Определение 1.5 [7]. Классическая алгебраическая система $A(+,\cdot)$, в которой выполняются следующие условия:

1) $A(+)$ — абелева группа,

2) $A(\cdot)\backslash\{0\}$ — лупа,

3) $a(b+1)=ab+a$ $(\forall\ a,\, b,)$

4) $(a+1)b=ab+b$ $(\forall\ a,\, b)$,

5) уравнения $x=bx+c$ и $ta=tb+c$, $a\neq b$, однозначно разрешимы относительно x и t называется *слабо-дистрибутивным телом.*

2. Решение проблемы Аргунова — Глисона

В бесконечной плоскости Фано имеют место, кроме 7_3, нижеследующие конфигурационные теоремы, геометризующие характеристику 2.

Конфигурационная теорема 2.1 (D_8^*) [7]. *Если для точек* $(\bar3,\bar6,\bar1'),\bar2',\bar4$ *бесконечной плоскости Фано выполняются следующие инциденции:*

$$[\bar1',\bar3]\cap[\bar4,\bar2']=\bar2,\ \bar3'=[\bar6,\bar2']\cap[\bar3,\bar4],\ \bar5=[\bar2',\bar3]\cap[\bar1',\bar3'],\ \bar1=[\bar1',\bar4]\cap[\bar2',\bar5],\ \bar7=[\bar1',\bar2']\cap[\bar1,\bar2],$$

то будут выполняться и инциденции $(\bar5,\bar6,\bar7)$ *и* $(\bar3,\bar3',\bar7)$.

Очевидно, что $D_8^*=D(8;10,10)\neq D_8$ в плоскости Фано содержит замыкающиеся конфигурации $7_3^1\{\bar1\bar2\bar3\bar4\}$, $7_3^2\{\bar1'\bar2'\bar3'\bar3\}$, $7_3^3\{\bar1'\bar2'\bar3\bar4\}$, $7_3^4\{\bar1\bar1'\bar2\bar2'\}$, $7_3^5\{\bar1'\bar3\bar5\bar7\}$ и что $D_8^* = 7_3\{\bar1'\bar2'\bar3'\bar3\}\cup\{\bar4,\bar2,\bar1\}=\{\bar1',\bar2',\bar3',\bar3,\bar5,\bar6,\bar7,\bar4\}$. $\bar2=[\bar4,\bar2']\cap[\bar6,\bar3]$, $\bar1=[\bar4,\bar1']\cap[\bar2',\bar3]\cap[\bar7,\bar2]\}$.

Поскольку D_8^* содержит все инциденции D_9 (рис. 3) и инциденцию $(\bar7,\bar3,\bar4)$, то она есть частный случай D_9 в плоскости Фано.

Теорема 2.2 [7]**.** *В плоскости Фано* G_2^* *из* 7_3 *следует* D_8^*.

Конфигурационная теорема 2.3 (L_8^*) [7]. (A) *Пусть в плоскости Фано для точек* $\bar7,\bar4,\bar2',\bar3,\bar1$ (*рис. 2*), *выполняются инциденции:*

$$\bar1'=[\bar4,\bar1]\cap[\bar2',\bar3],\ \bar3'=[\bar4,\bar3]\cap[\bar2',\bar7],\ \bar5=[\bar1',\bar2']\cap[\bar4,\bar7],$$
$$\bar6=[\bar4,\bar7]\cap[\bar1',\bar3'],\ \bar2=[\bar3,\bar7]\cap[\bar4,\bar2'].$$

Тогда будут выполняться инциденции $(\bar1,\bar3,\bar6)$ *и* $(\bar1,\bar2,\bar5,\bar3')$, *другими словами,* (A'): *пусть для точек* $(\bar5,\bar3,\bar1'),\bar4,\bar2$ *имеют место инциденции* $[\bar5,\bar3]\cap[\bar4,\bar2]=\bar2'$, $[\bar5,\bar2]\cap[\bar4,\bar1']=\bar1$, $[\bar5,\bar4]\cap[\bar2,\bar3]=\bar7$, $[\bar2',\bar7]\cap[\bar3,\bar4]=\bar3'$, $[\bar1,\bar3]\cap[\bar1',\bar3']=\bar6$. *Тогда будут иметь место и инциденции* $(\bar4,\bar5,\bar6)$ *и* $(\bar1,\bar2,\bar3')$.

Теорема L_8^* содержит все инциденции $L_9(\bar1\bar2\bar3;\bar1'\bar2'\bar3')$ (рис. 4) и инциденцию $(\bar1,\bar2,\bar3')$, и поэтому, она есть частный случай L_9.

Связи между L_8^* и 7_3 выясняет следующая

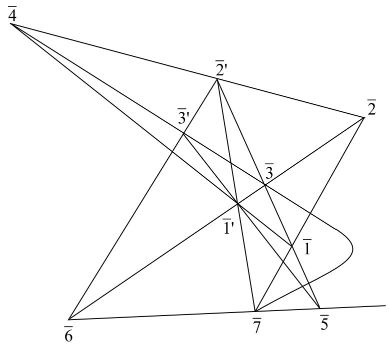

Рис. 1. (D_8^*)

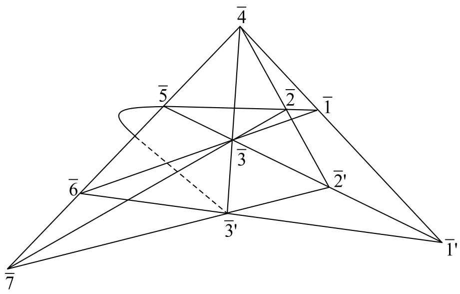

Рис. 2. (L_8^*)

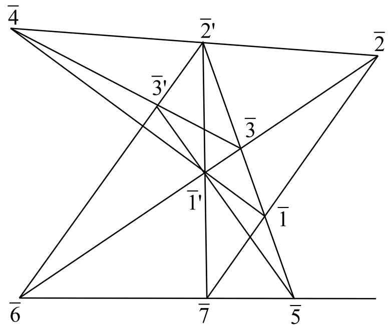

Рис. 3. (D_9)

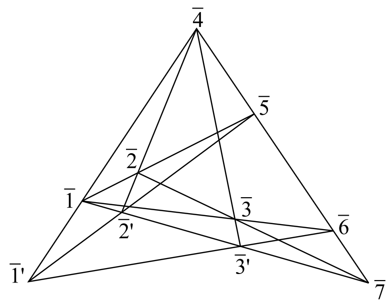

Рис. 4. (L_9)

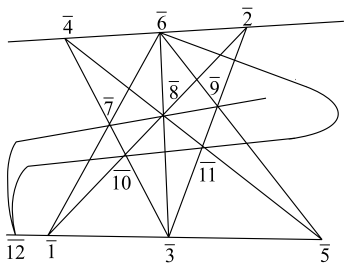

Рис. 5. (Π_7^*)

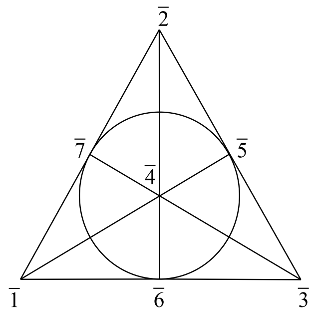

Рис. 6. (7_3)

Теорема 2.4 [7]**.** *В плоскости Фано из 7_3 следует L_8^*.*

Теорема 2.5. *Теорема D_8^* проективно эквивалентна теореме L_8^*.*

Сформулирована необходимая для дальнейшего исследования, конфигурационная теорема с двумя замыкающими инциденциями, содержащая пары перспективных трехвершинников.

Конфигурационная теорема 2.6 (Π_7^*) (рис. 5). *Пусть в плоскости Фано заданы точки $\bar 1, \bar 3, (\bar 2, \bar 4, \bar 6)$ и выполняются инциденции:* $\bar 7 = [\bar 1, \bar 6] \cap [\bar 3, \bar 4]$, $\bar 8 = [\bar 1, \bar 2] \cap [\bar 3, \bar 6]$, $\bar 5 = [\bar 4, \bar 8] \cap [\bar 1, \bar 3]$, $\bar 9 = [\bar 5, \bar 6] \cap [\bar 2, \bar 3]$, $\bar 9 = [\bar 5, \bar 6] \cap [\bar 2, \bar 3]$, $\overline{10} = [\bar 3, \bar 4] \cap [\bar 1, \bar 2]$, $\overline{11} = [\bar 2, \bar 3] \cap [\bar 4, \bar 5]$, $\overline{12} = [\overline{10}, \overline{11}] \cap [\bar 1, \bar 3]$. *Тогда выполняются и инциденции* $(\overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \bar 6)$ *и* $(\bar 8, \bar 9, \bar 7, \overline{12})$.

Теорема 2.7 [7]**.** *В плоскости Фано из D_8^* следует Π_7^* проективно.*

Нахождению аксиоматики тернара бесконечной плоскости Фано посвящена следующая основная теорема.

Теорема 2.8. *Некоторыми квазитождествами теоремы 7_3 являются:*

1) $a + (a + k) = k,\ q + (c + p) = c + (p + q)\ (\forall c, p, q)$;

2) $a + b = b + a\ (\forall a, b)$;

2′) $a + (b + c) = (a + b) + c\ (\forall a, b, c)$;

3) $a \cdot m \circ am = am + am = 0$ $(\forall a, m)$;
4) $a \cdot m \circ b = d \iff a \cdot m \circ d = b$ $(\forall a, b, d, m)$;
5) $q \cdot n \circ q = qn + q$ $(\forall q, n)$;
6) $a \cdot m \circ (am + am \cdot m) = am \cdot m$ $(\forall a, m)$;
7) $a(r + 1) = ar + a$ $(\forall a, r)$;
8) $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ $(\forall a \neq 0)$;
9) $1 \cdot q \circ q = 1 \cdot c \circ q$ $(\forall c, q)$;

10) $\begin{cases} (1)\, s \cdot p \circ (s + ac) = s + s \cdot p \circ ac \ (\forall s, p, c, a); \\ (2)\, p \cdot f \circ (c \cdot f \circ d) = c \cdot f \circ (p \cdot f \circ d) \ (\forall p, f, d, c) \\ (3)\, aq \cdot k \circ (aq \cdot q \circ ac) = aq \cdot q \circ (aq \cdot k \circ ac) \ (\forall a, q, k, c); \end{cases}$

11) $a \cdot m \circ b = am + b$ $(\forall a, m, b)$;
12) $a(k + ak) = ak + a \cdot ak$ $(\forall a, k)$;
13) $a \cdot a^{-1}c = c$ $(\forall a \neq 0, c)$;
14) $a(a^{-1}c + c) = c + ac$;
15) $ca \cdot a^{-1} = c$ $(\forall a \neq 0, c)$;
15′) $ca \cdot (a^{-1} + c) = c + ca \cdot c; a(a^{-1} + b) = 1 + ab$;
16) $(a + 1)k = ak + k$ $(\forall a, k)$;
17) $(d + dt)t = dt + dt \cdot t$ $(\forall d, t)$;
18) $a^{-1}(ab + (b + c)) + a^{-1}(ac + (b + c)) = b + c$;
19) $a(c + d + (a + 1)^{-1}(c + ad)) = ac + ad + a \cdot (a + 1)^{-1}(c + ad)$,
$a \cdot (a + 1)^{-1}b = a(a + 1)^{-1} \cdot b = (1 + (a + 1)^{-1})b,\ a(a + 1)^{-1} = (a + 1)^{-1}a$,
$b(a + 1)^{-1} \cdot a = ba \cdot (a + 1)^{-1} = b \cdot (a + 1)^{-1}a = b \cdot (a + 1)^{-1}a = b(1 + (a + 1)^{-1})$;
20) $a(d + m) = ad + am$ $(\forall a, d,\ m = \varphi(a, d))$;
21) $(m + d)a = ma + da$ $(\forall a, d,\ m = \varphi(a, d))$;
22) $(a + b)c = ac + bc$ $(\forall a, b, c)$;
23) $a(b + c) = ab + ac$ $(\forall a, b, c)$;
24) $a \cdot bc = ab \cdot c$.

$\lhd$ $7_3 \Rightarrow$ 1)–17) доказаны в работах [7, 8]. Приведем ключевые моменты этих доказательств.

1): Следует из $\Pi_7^* : \{\bar{5} = (0, c + p),\ \bar{3} = (\infty),\ \bar{1} = (0, p + q),\ \bar{2} = (q, p + q),\ \bar{4} = (c, c + p)\}$ (рис. 5).

2): Следует из $\Pi_7^* :\ \{\bar{1} = (0, a),\ \bar{2} = (a, a),\ \bar{3} = (\infty),\ \bar{4} = (b, b),\ \bar{5} = (0, b)\}$ (рис. 5).

2′): следует из 1) и 2).

3): Следует из $L_8^* : \{\bar{7} = (m), \bar{4} = (\infty), \bar{3} = (0, am),\ \bar{2}' = (a, am), \bar{1} = (am, am + am)\}$ (рис. 2).

4): Следует из $7_3\{(a, d), (0, d), (\infty), (m)\}$.

5): Следует из $7_3\{0, cn), (1), (\infty), (c, 0)\}$.

6): Следует из $L_8^*\{\bar{4} = (\infty),\ \bar{1} = (0, 0),\ \bar{7} = (0),\ \bar{3}' = (am, am),\ \bar{2} = (a, (am) \cdot m)\}$.

7): Следует из $L_8^*\{\bar{7} = (0, 0),\ \bar{4} = (\infty),\ \bar{2}' = (ar, ar), \bar{3} = (a, ar), \bar{1} = (r + 1)\}$.

8): Следует из $\{\bar{3} = (a, 1),\ \bar{7} = (0, 0), \bar{2}' = (1, 1), \bar{4} = (\infty),\ \bar{1} = (a^{-1} + 1)\}$, где a^{-1} есть решение уравнения $xa = 1$.

9): Следует из $7_3\{(0, 0), (\infty), (q), (1, c)\}$.

10): (1) Следует из $7_3\{A = (0, ac), B = (1),\ C = (\rho),\ D = (0, s \cdot \rho \circ (s + ac))\},\ \{\rho \neq 1\}$.

10): (2) Следует из $7_3\{(\infty), (b, d), (p, d), (f)\},\ b \neq p$.

10): (3) Следует из $7_3\{(0, ac), (\infty), (k), (aq, aq \cdot q \circ ac)\}$.

11): Следует из $D_8^*\{\bar{1} = (0, p), \bar{1}' = (\infty), \bar{2} = (1), \bar{2}' = (aq, aq \cdot q \circ p),\ \bar{3}' = (a, aq \cdot q \circ p)\}$.

12): Следует из $L_8^*\{\bar{7} = (0, 0),\ \bar{4} = (\infty),\ \bar{1} = (q),\ \bar{2}' = (1, ak),\ \bar{3} = (a, ak)\}$ (рис. 2).

13), 14): Следуют из L_8^* $\{\bar{7} = (0, 0), \bar{4} = (\infty), \bar{2}' = (1, c), \bar{1} = (a^{-1}c + c),\ \bar{3} = (a, c)\}$.

15), 15′): Следуют из L_8^* $\{\bar 3=(ca,c),\bar 7=(0,0),\bar 2'=(1,c),\bar 4=(\infty),\bar 1=(a^{-1}+c)\}$.

16): Следует из $L_8^*\{\bar 7=(\infty),\ \bar 4=(0),\bar 1=(a+1,0),\bar 2=(1,am),\ \bar 3'=(a,m)\}$.

17): Следует из $L_8^*\{\bar 4=(0),\bar 7=(\infty),\bar 2=(d,am),\bar 3'=(ac,ac),\bar 1'=(0,0)\}$.

Докажем теперь соотношения: $7_3\Rightarrow$ 18)–24).

18): $7_3\{\bar p=(0,l),\bar 4=(\infty),\bar 2'=(\bar 1,c),\bar 3'=(a,ac)\}$, $(*)$

$A=[\bar p,\bar 4]\cap[\bar 3',\bar 2']=[x=0]\cap[y=xc]=(0,0)$, $B=[\bar p,\bar 2']\cap[\bar 4,\bar 3']=[y=xf+l]\cap[x=a]$, $\bar 2'\,I\Leftrightarrow c=f+l,\ f=c+l,\ B=(a,a(c+l)+l)$, $C=[\bar p,\bar 3']\cap[\bar 4,\bar 2']=[y=xs+l]\cap[x=1]=(1,s+l)$, $\bar 3'\,I\Leftrightarrow ac=as+l,\ s=a^{-1}(ac+l)$, $C=(1,a^{-1}(ac+l)+l)$, $(A,B,C)\Leftrightarrow B\,I\,[A,C]=[y=x(a^{-1}(ac+l)+l)]\Leftrightarrow$

$$a^{-1}(a(c+l)+l)=a^{-1}(ac+l)+l, \tag{18.1}$$

$a(a(c+ac+as)+as+ac)=a^{-1}\cdot as+as+ac$, $a(c+ac+as)+as+ac=a(s+as+ac)$, $ac+l=as,\ l=as+ac$,

$$a(s+as+ac)+a(c+as+ac)=as+ac. \tag{18.2}$$

Если в (18.1) заменим l на $l+c$, то получим:

$$a^{-1}(al+l+c)+a^{-1}(ac+l+c)=l+c. \tag{18.3}$$

Доказано соотношение $7_3\Rightarrow$ 18).

19): Пусть образующие точки 7_3 имеют следующие координаты: $\bar P=(0,c+(1+a)^{-1}(c+ad))=(0,t_0)$, $\bar 4(\infty)$, $\bar 2'=(1,c)$, $\bar 3'=(a,ac)$. Тогда получим:

$7_3\{\bar P,\bar 4,\bar 2',\bar 3'\}\Rightarrow\bar 7=[\bar 4,\bar P]\cap[\bar 2',\bar 3']=[x=0]\cap[y=xc]=(0,0)$,

$\bar 2=[\bar 4,\bar 2']\cap[\bar P,\bar 3']=[x=1]\cap[y=xf+t_0]=(1,f+t_0)$,

$\bar 3'\,I\Leftrightarrow ac=af+t_0\Rightarrow f=a^{-1}(ac+t_0)$, $\bar 2=(1,a^{-1}(ac+t_0)+t_0)$,

$[\bar 2,\bar 7]=[y=x(a^{-1}(ac+t_0)+t_0)]$,

$\bar 3=[\bar 4,\bar 3']\cap[\bar P,\bar 2']=[x=a]\cap[y=x\rho+t_0]=(a,a\rho+t_0)$,

$\bar 3=(a,a(c+t_0)+t_0)$,

$$(\bar 2,\bar 3,\bar 7)\Leftrightarrow a(c+t_0)+t_0=a(a^{-1}(ac+t_0)+t_0), \tag{19.1}$$

$$\begin{aligned} a(c+t_0)+t_0&=a(1+a)^{-1}(c+ad)+c+(a+1)^{-1}(c+ad)=\\ &=c+(a+1)\cdot(1+a)^{-1}(c+ad)=c+c+ad=ad, \end{aligned} \tag{19.2}$$

$\bar 3=(a,ad)$.

Очевидны следующие выкладки: $a\cdot(1+a)^{-1}(c+ad)=((a+1)+1)\cdot(1+a)^{-1}(c+ad)=(c+ad)+(1+a)^{-1}(c+ad)=(1+(1+a)^{-1}(c+ad)=((a+1)(a+1)^{-1}+(1+a)^{-1}(c+ad)=a(1+a)^{-1}\cdot(c+ad)$.

Следовательно, получено следующее равенство:

$$a(1+a)^{-1}(c+ad)=a(1+a)^{-1}\cdot(c+ad). \tag{19.3}$$

Продолжая алгебраизацию всех других инциденций 7_3, получаем:

$\bar 2\,I\,[\bar 3,\bar 7]=[y=xd]\Leftrightarrow a^{-1}(ac+t_0)+t_0=d\Rightarrow\bar 2=(1,d)$,

$a(c+t_0)+t_0=ad,a^{-1}(ac+t_0)+t_0=d\Rightarrow a(c+t_0)+a^{-1}(ac+t_0)=ad+d\Leftrightarrow a\cdot(1+a)^{-1}(c+ad)+a^{-1}(ac+c+(1+a)^{-1}(c+ad))=ad+d\Leftrightarrow a(1+a)^{-1}(c+ad)+ad+d=(1+(1+a)^{-1})(c+ad)+d+ad=c+ad+(1+a)^{-1}(c+ad)+d+ad=c+d+(1+a)^{-1}(c+ad)\Leftrightarrow a^{-1}(ac+c+(1+a)^{-1}(c+ad))=c+d+(1+a)^{-1}(c+ad)$,

$$a(c+d+(1+a)^{-1}(c+ad)) = ac+c+(1+a)^{-1}(c+ad) =$$
$$ac+c+(c+ad)+a(1+a)^{-1}(c+ad) \Rightarrow a(c+d+(1+a)^{-1}(c+ad)) = \tag{19.4}$$
$$= ac+ad+a\cdot(1+a)^{-1}(c+ad).$$

Доказано: $7_3 \Rightarrow 19)$.

20): $L_8^*\{\bar 4 = (\infty),\ \bar 7 = (0,0), \bar 3' = (a, ac), \bar 2 = (1, b+c), \bar 1 = (b)\} \Rightarrow \bar 5 = [1,2]\cap[\bar 4, \bar 7] = [y = xb+t]\cap[x=0] = (0,t)$;

$\bar 2\, I \Leftrightarrow b+c = b+t \Rightarrow t = c,\ \bar 2' = [\bar 3', \bar 7]\cap[\bar 4, \bar 2] = [y = xc]\cap[x=1] = (1,c)$,

$\bar 1' = [\bar 2', \bar 5]\cap[\bar 4, \bar 1] = [y = xf+c]\cap l_\infty = (f),\ \bar 2'\, I \Leftrightarrow c = f+c \Rightarrow f = 0, \bar 1' = (0)$,

$\bar 3 = [\bar 4, \bar 3']\cap[\bar 5, \bar 1'] = [x=a]\cap[y=c] = (a,c)$,

$\bar 6 = [\bar 1', \bar 3']\cap[\bar 4, \bar 7] = [y = ac]\cap[x=0] = (0, ac)$,

$\bar 6\, I\, [\bar 1, \bar 3] = [y = xb+t'],\ \bar 3\, \mathrm{I} \Leftrightarrow c = ab+t' \Rightarrow ac = ab+c$,

$(a+1)c = ab \Rightarrow c = (1+a)^{-1}\cdot ab = \varphi(a,b)$,

$(\bar 2, \bar 3, \bar 7) \Leftrightarrow \bar 3\, I\, [\bar 2, \bar 7] = [y = x(b+c)] \Leftrightarrow c = a(b+c)$,

$a^{-1}c = b+c \Rightarrow c = (1+a^{-1})^{-1}b = \varphi(a,b) = (1+a)^{-1}a\cdot b$,

$(\bar 1, \bar 2, \bar 5, \bar 3') \Leftrightarrow \bar 3'\, I\, [\bar 1, \bar 2, \bar 5] = [y = xb+c] \Leftrightarrow ac = ab+c \Rightarrow c = ab+ac,\ c = (1+a)^{-1}ab = \varphi(a,b)$.

Таким образом, из L_8^* следует квазитождество $a(b+c) = ab+ac$, где $c = \varphi(a,b)$ и потому оно есть правый слабый дистрибутивный закон.

21) Пусть образующие точки L_8^* имеют следующие координаты: $\{\bar 4 = (0),\ \bar 7 = (\infty), \bar 2' = (a, am), \bar 3 = (a+b, a), \bar 1' = (0,0)\}$. Тогда, следуя таблице инциденций, соответствущей данному набору образующих точек, получаем:

$\bar 5 = [\bar 4, \bar 7]\cap[\bar 1', \bar 2'] = l_\infty \cap [y = xm] = (m)$,

$\bar 2 = [\bar 7, \bar 3]\cap[\bar 4, \bar 2'] = [x = a+b]\cap[y = am] = (a+b, am)$,

$\bar 3' = [\bar 7, \bar 2']\cap[\bar 4, \bar 3] = [x=a]\cap[y=a] = (a,a)$,

$\bar 1 = [\bar 2, \bar 5]\cap[\bar 1', \bar 4] = [y = xm+t]\cap[y=0] = (x_1, 0)$.

$\bar 2\, I [\bar 2, \bar 5]\ \Leftrightarrow am = (a+b)m+t \Rightarrow t = am+(a+b)m,\ 0 = xm+t \Rightarrow x = tm^{-1}$.

$\bar 1 = ((am+(a+b)m)m^{-1}, 0) = (x_1, 0)$,

$\bar 6 = [\bar 1', \bar 3']\cap[\bar 4, \bar 7] = [y = x]\cap l_\infty = (1)\, I\, [\bar 1, \bar 3, \bar 6] = [y = x+t']$,

$\bar 3 I [\bar 1, \bar 6]\ \Leftrightarrow a = a+b+t' \Rightarrow t' = b$,

$\bar 1\, I [\bar 1, \bar 6]\ \Leftrightarrow 0 = x_1+t' \Rightarrow t' = x_1 \Leftrightarrow b = (am+(a+b)m)m^{-1} \Leftrightarrow bm = am+(a+b)m, (*)$

$(\bar 1, \bar 2, \bar 5, \bar 3') \Leftrightarrow [\bar 1, \bar 2, \bar 5]\, I\, \bar 3' \Leftrightarrow [y = xm+am+(a+b)m] \Leftrightarrow a = am+(a+b)m+am \Leftrightarrow a = (a+b)m$,

$(\bar 1', \bar 2', \bar 3, \bar 5) \Leftrightarrow [\bar 1', \bar 2', \bar 5]\, I\, \bar 3 \Leftrightarrow [y = xm]\, I\, \bar 3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = (a+b)m \Rightarrow am^{-1} = a+b,\ a(1+m^{-1}) = b, \\ a = b(1+m^{-1})^{-1} = b\cdot(1+m)^{-1}m \\ (a+b)m = am+bm = a,\ am+a = bm,\ a(m+1) = bm, \end{cases}$$

$a = bm\cdot(m+1)^{-1} = b(1+(m+1)^{-1}) = b(1+m)^{-1}m$.

Следовательно, $(b+a)m = bm+am$ не есть общий дистрибутивный закон, и тем самым доказана импликация $L_8^* \Rightarrow 21)$.

22): Новый набор образующих точек L_8^*, имеющих координаты $\bar 7 = (\infty),\ \bar 4 = (0),\ \bar 1 = (ba+b, 0),\ \bar 2 = (b, ba\cdot m), \bar 3' = (ba, bm)$, приводит к получению квазитождества $(p+q)k = pk+qk,\ \forall p, q, k$.

В самом деле произведя алгебраизацию всех инциденций L_8^*, получаем:

$\bar 2' = [\bar 7, \bar 3']\cap[\bar 4, \bar 2] = [x = ba]\cap[y = ba\cdot m] = (ba, ba\cdot m)$.

$\bar{5} = [\bar{4}, \bar{7}] \cap [\bar{2}, \bar{1}, \bar{3}'] = l_\infty \cap [y = xf + t] = (f)$,

$$\left.\begin{array}{l} \bar{2}\, I \Leftrightarrow ba \cdot m = bf + t \\ \bar{3}'\, I \Leftrightarrow bm = ba \cdot f + t \end{array}\right| \Rightarrow ba \cdot m + bm = ba \cdot f + bf \Rightarrow m = f, \bar{5} = (m),$$

$\bar{1}\, I \Leftrightarrow 0 = (ba + b)f + t \Rightarrow t = (ba + b)f = (ba + b)m) \Rightarrow bm + ba \cdot m = (b + ba)m.(***)$
$(p + b)m = (b \cdot b^{-1}p + b)m = (b \cdot b^{-1}p) \cdot m + bm = pm + bm;$
$\bar{1}' = [\bar{5}, \bar{2}'] \cap [\bar{4}, \bar{1}] = [y = xm + t'] \cap [y = 0]$,
$\bar{2}'\, I \Leftrightarrow ba \cdot m = ba \cdot m + t' \Rightarrow t' = 0,\ \bar{1}' = (0, 0)$,
$\bar{3} = [\bar{5}, \bar{2}'] \cap [\bar{4}, \bar{3}'] \cap [\bar{7}, \bar{2}] = [y = xm] \cap [y = bm] \cap x = b] = (b, bm)$,
$\bar{6} = [\bar{4}, \bar{7}] \cap [\bar{1}', \bar{3}'] = l_\infty \cap [y = xs] = (s)$,
$\bar{3}'\, I \Leftrightarrow bm = ba \cdot s \Rightarrow s = (ba)^{-1}(bm) = \varphi(a, b, m),\ \forall a, b, m$,
$\bar{6}\, I[\bar{1}, \bar{3}] = [y = xs + r]$,

$$\left.\begin{array}{l} \bar{1}\, I \Leftrightarrow 0 = (ba + b)s + r \\ \bar{3}\, I \Leftrightarrow bm = bs + r \end{array}\right| bm = bs + (ba + b)s \Leftrightarrow$$

$(ba + b)s = ba \cdot s + bs,\ \forall a, b, m,\ s = \varphi(a, b \cdot m) \Leftrightarrow (***)$.

Итак, из L_8^* следует 22).

23): Опираясь на 1)–22), в [7, 8, 9] было доказано, что в левой IPVW-системе характеристики 2 из $a(b + 1) = ab + a$ следует $a(b + c) = ab + ac$, $\forall a, b, c$. Следовательно, из 7_3 следует 23).

24): Опираясь на теорему Линника 1.2 и 1)–23), заключаем, что тернар бесконечной плоскости Фано представляет собой альтернативное, и следовательно, ассоциативное тело характеристики 2.

Доказана импликация $7_3 \Rightarrow 24)$, а затем и теорема 2.8. $\triangleright$

Тем самым получено положительное решение проблемы Аргунова — Глисона: из вышеизложенного следует, что всякая проективная плоскость Фано дезаргова.

Литература

1. *Гильберт Д.* Основания геометрии.—М.: ГИТТЛ, 1948.—492 с.
2. *Аргунов Б. И., Емельченков Е. П.* Проективные и аффинные плоскости и их обобщения // Сб. науч. статей «Геометрия инцидентностных структур и дифференциальных уравнений».—Смоленск, 1981.—С. 3–30.
3. *Мальцев А.И .* Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.—392 с.
4. *Линник Ю. В.* Кватернионы и числа Кэлли // Успехи мат. наук.—1949.—Т 4, вып. 5.—С. 49–65.
5. *Рашевский П. К.* Проективная геометрия с новыми конфигурационными аксиомами // Мат. сб.—1940.—Т. 8, № 50.—С. 183–203.
6. *Gleason A. M.* Finite Fano planes // Amer. J. Math.—1956.—V. 78.—P. 797–807.
7. *Хубежты И. А.* О некоторых классах алгебр и плоскостей.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2005.
8. *Хубежты И. А.* О бесконечной плоскости Фано // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2005.—№ 11.—С. 69–77.
9. *Хубежты И. А.* Некоторое ослабление условий альтернативности $\mathrm{IP_0VW}$-системы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2004.—№ 4.—С. 13–17.
10. *Moufang R.* Die Sehnittpunktsatze des projektiven speziallen Funfeckchetzen in ihrer Anhandigkeit voneinander // Math. Ann.—1935.—№ 106.—P. 755–795.
11. *Скорняков Л. А.* Проективные плоскости // Успехи мат. наук.—1951.—Т. 6, вып. 6.—С. 112–154.

Статья поступила 29 сентября 2006 г.

Хубежты Исидор Антонович, д. ф.-м. н.
Северо-Осетинский государственный университет,
Владикавказ, 362015, РОССИЯ