Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2007, Том 9, Выпуск 3

УДК **517.982.257, 517.982.276**

КВАЗИДИАГОНАЛЬНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ СТЕПЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ КЁТЕ ВТОРОГО РОДА

П. А. Чалов

Исследуется проблема существования квазидиагональных изоморфизмов для степенных пространств Кёте второго рода. Введена система многопрямоугольных характеристик $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Эквивалентность таких систем характеристик для двух пространств означает, что каждая характеристика одной системы оценивается через соответствующую характеристику другой системы. Показано, что система характеристик $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ является полным квазидиагональным инвариантом на классе степенных пространств Кёте второго рода.

Ключевые слова: степенные пространства Кёте второго рода, многопрямоугольные характеристики, Квазидиагональный изоморфизм.

Пространством Кёте, определяемым матрицей Кёте $A=(a_{i,p})_{i,p\in\mathbb{N}}$, называют пространство Фреше

$$K(A):=\left\{x=(\xi_i):|x|_p:=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|\,a_{i,p}<\infty,\quad p\in\mathbb{N}\right\}$$

с топологией, задаваемой системой преднорм $\{|x|_p : p\in\mathbb{N}\}$ (см., например, [1, 2]); символом $e=(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ обозначают *канонический базис* этого пространства.

Следуя 3, 4, *степенным пространством Кёте второго рода* будем называть пространство Кёте вида:

$$F(\lambda,a):=K(\exp(\varphi_p(\lambda_i)a_i)),\tag{1}$$

где $a=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $a_i>1$, и $\lambda=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\lambda_i\geqslant 1$, — числовые последовательности, а $\varphi_p:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_+$, $p\in\mathbb{N}$ — функция, заданная равенством

$$\varphi_p(\xi)=\min\left\{p-\frac{1}{p},\xi-\frac{1}{p}\right\}.$$

Далее будем предполагать, что $F(\lambda,a)$ — монтелевское пространство, то есть $a_i\to\infty$. Оператор $T:K(A)\to K(\widetilde{A})$ называется *квазидиагональным*, если $Te_i=t_ie_{\sigma(i)}$, где (t_i) — числовая последовательность, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$; при этом, если T является изоморфизмом (изоморфным вложением), будем говорить, что $K(A)$ *квазидиагонально изоморфно* (*квазидиагонально вкладывается в*) $K(\widetilde{A})$ и писать $K(A)\overset{\text{кд}}{\simeq}K(\widetilde{A})$ ($K(A)\overset{\text{кд}}{\hookrightarrow}K(\widetilde{A})$ соответственно).

Введем характеристики приспособленные для исследования степенных пространств $F(\lambda, a)$. Пусть $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $b_i \geqslant a_i > 1$, $m \in \mathbb{N}$. На множестве четверок m-мерных векторов

$$\tau = (\tau_k),\ t = (t_k),\ \sigma = (\sigma_k),\ s = (s_k) \in \mathbb{R}_+^m \tag{2}$$

определим считающую функцию последовательностей a и b:

$$\mu_m^{(a,b)}(\tau, t; \sigma, s) = \left| \bigcup_{k=1}^{m} \{i : \tau_k < a_i \leqslant t_k,\ \sigma_k < b_i \leqslant s_k\} \right| = \left| \left\{ i : (a_i, b_i) \in \bigcup_{k=1}^{m} P_k \right\} \right|, \tag{3}$$

где $P_k := (\tau_k, t_k] \times (\sigma_k, s_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Подобные характеристики были рассмотрены нами впервые для семейств гильбертовых пространств [5–7].

Функцию (3) называют *m-прямоугольной характеристикой пары* a, b. Будем также писать μ_m^X вместо $\mu_m^{(a,b)}$, если $b = (b_i) = (\lambda_i a_i)$ и $X = F(\lambda, a)$.

Пусть $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $b_i \geqslant a_i > 1$, $\tilde{a} = (\tilde{a}_i)$ и $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)$, $\tilde{b}_i \geqslant \tilde{a}_i > 1$. Назовем *системы функций* $\left(\mu_m^{(a,b)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ *и* $\left(\mu_m^{(\tilde{a},\tilde{b})}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ *эквивалентными* (кратко будем писать $\left(\mu_m^{(a,b)}\right) \approx \left(\mu_m^{(\tilde{a},\tilde{b})}\right)$), если существуют постоянная $\alpha > 0$ и неубывающая функция $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, обеспечивающие следующие оценки:

$$\mu_m^{(a,b)}(\tau, t; \sigma, s) \leqslant \mu_m^{(\tilde{a},\tilde{b})}\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t; \sigma - \alpha t, s + \alpha t\right), \tag{4}$$

$$\mu_m^{(\tilde{a},\tilde{b})}(\tau, t; \sigma, s) \leqslant \mu_m^{(a,b)}\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t; \sigma - \alpha t, s + \alpha t\right) \tag{5}$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$ и всех параметров (2) таких, что

$$s_k \leqslant \Phi(\tau_k), \quad \text{или} \quad \sigma_k \leqslant \Phi(\tau_k), \quad s_k = +\infty. \tag{6}$$

Здесь дана характеризация квазидиагональных изоморфизмов пространств (1) в инвариантной форме, а именно, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $X = F(\lambda, a)$ и $\tilde{X} = F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ — монтелевские пространства. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $X \overset{\text{кд}}{\simeq} \tilde{X}$;

(b) $\left(\mu_m^X\right) \approx \left(\mu_m^{(\tilde{X})}\right)$.

Но прежде приведем несколько известных фактов, которые понадобятся при доказательстве этой теоремы.

Пространства

$$E_\alpha(a) := K\left(\exp(\alpha_p a_i)\right),$$

где $a = (a_i)$, $a_i \geqslant 1$, $\alpha_p \uparrow \alpha(-\infty < \alpha \leqslant +\infty)$, введенные А. Гротендиком [8, II, с. 122], называют *степенными пространствами Кёте конечного типа*, если $\alpha < \infty$, или *бесконечного типа*, если $\alpha = \infty$ [4] (в другой терминологии, *центрами шкал Рисса* [9], либо *пространствами степенных рядов* [10]). Так как при $\alpha < \infty$ пространства $E_\alpha(a)$ изоморфны между собой, обычно рассматривают только $E_0(a)$ и $E_\infty(a)$.

Предложение 1 [9, предложение 18]**.** *Пусть $a = (a_i)$, $a_i \nearrow \infty$, $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_i)$, $\widetilde{a}_i \nearrow \infty$ и $\nu = 0, \infty$. Тогда $E_0(a) \not\simeq E_\infty(\widetilde{a})$ и*

$$E_\nu(a) \simeq E_\nu(\widetilde{a}) \iff a_i \asymp \widetilde{a}_i, \text{ т. е. } \exists L > 1 : \frac{a_i}{L} \leqslant \tilde{a}_{\rho(i)} \leqslant La_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для пространств (1) справедливо следующее утверждение.

Предложение 2 [3, 4]**.** *Пусть $I := \{i_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел и X_I — базисное подпространство монтелевского пространства $F(\lambda, a)$, натянутое на множество $\{e_i : i \in I\}$, т. е. $X_I := \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in I\}$. Для пространства X_I имеется три возможности:*

(i) $X_I \simeq E_0(b) \quad (\Longleftrightarrow\ \sup\{\lambda_{i_s} : s \in \mathbb{N}\} < \infty)$;

(ii) $X_I \simeq E_\infty(b) \quad (\Longleftrightarrow\ \lim\limits_{s\to\infty} \lambda_{i_s} = \infty)$;

(iii) $X_I \not\simeq E_\alpha(b) \quad (\Longleftrightarrow\ \varliminf\limits_{s\to\infty} \lambda_{i_s} < \infty,\ \sup\{\lambda_{i_s} : s \in \mathbb{N}\} = \infty)$,

где $b = (b_s)_{s\in\mathbb{N}}$, $b_s = a_{i_s}$, $s \in \mathbb{N}$.

Сформулируем для пространств Кёте утверждение, которое в неявном виде было доказано в [11] для пространств Фреше.

Предложение 3 (см., например, [4, лемма 1.1])**.** *Если имеют место квазидиагональные вложения $K(A) \overset{\text{кд}}{\hookrightarrow} K(\widetilde{A})$ и $K(\widetilde{A}) \overset{\text{кд}}{\hookrightarrow} K(A)$, то $K(A) \overset{\text{кд}}{\simeq} K(\widetilde{A})$.*

В [4, лемма 2.3] В. П. Захарюта доказал критерий квазидиагонального изоморфизма степенных пространств Кёте второго рода, который положен в основу доказательства теоремы 1. Сформулируем этот критерий в несколько модифицированном виде.

Лемма 1. *Пусть $a_i \to \infty$. Для того чтобы $F(\lambda, a) \overset{\text{кд}}{\simeq} F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$, необходимо и достаточно, чтобы существовали биективное отображение $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, положительная постоянная $\Delta < \infty$ и возрастающая функция $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\gamma(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$, такие, что*

(i) *последовательности (a_i) и $(\tilde{a}_{\rho(i)})$ слабо эквивалентны, т. е. $\frac{a_i}{L} \leqslant \tilde{a}_{\rho(i)} \leqslant La_i$, $i \in \mathbb{N}$, с некоторой постоянной $L > 1$;*

(ii) *выполняется оценка $g^{-1}(\lambda_i) \leqslant \tilde{\lambda}_{\rho(i)} \leqslant g(\lambda_i)$, $i \in \mathbb{N}$, с некоторой возрастающей функцией $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такой, что $g(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$;*

(iii) *неравенство $\left|\lambda_i - \tilde{\lambda}_{\rho(i)} \frac{\tilde{a}_{\rho(i)}}{a_i}\right| \leqslant \Delta$ выполняется для $\lambda_i \leqslant \gamma(a_i)$, $i \in \mathbb{N}$.*

◁ Пусть выполнены условия (i)–(iii). Непосредственная проверка показывает, что оператор $T : F(\lambda, a) \to F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$, задаваемый формулой $Te_i = t_i\, e_{\rho(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, с

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_i > \gamma(a_i), \\ \exp\left(\lambda_i a_i - \tilde{\lambda}_{\rho(i)} \tilde{a}_{\rho(i)}\right), & \text{если } \lambda_i \leqslant \gamma(a_i), \end{cases}$$

является искомым квазидиагональным изоморфизмом.

Пусть теперь существует квазидиагональный изоморфизм $Te_i = t_i e_{\rho(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, пространства $F(\lambda, a)$ на пространство $F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$. Ввиду непрерывности операторов T и T^{-1}, по любому $p \in \mathbb{N}$ найдутся $q = q(p)$, $r = r(p)$, $p < q < r$, и $C = C(p)$, такие что справедлива оценка:

$$\frac{1}{C} \exp\left(\varphi_p(\lambda_i)\, a_i\right) \leqslant |t_i|\, \exp\left(\varphi_q(\tilde{\lambda}_{\rho(i)})\, \tilde{a}_{\rho(i)}\right) \leqslant C \exp\left(\varphi_r(\lambda_i)\right) a_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Возьмем такую же оценку для другой тройки $p' < q' < r'$ с $p' > r$. Из этих оценок выводим:

$$\begin{aligned} -\ln(C_p C_{p'}) + (\varphi_{p'}(\lambda_i) - \varphi_r(\lambda_i)) a_i &\leqslant \left(\varphi_{q'}(\tilde{\lambda}_{\rho(i)}) - \varphi_q(\tilde{\lambda}_{\rho(i)})\right) \tilde{a}_{\rho(i)} \\ &\leqslant (\varphi_{r'}(\lambda_i) - \varphi_p(\lambda_i)) a_i + \ln(C_p C_{p'}). \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда сразу следует утверждение (i) с некоторой константой L. Вместе с (7) это дает также оценку (которая понадобится ниже)

$$\left|\frac{\ln |t_i|}{a_i}\right| \leqslant M, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

с некоторой постоянной M.

Теперь докажем утверждение (ii). По предложению 1 для любого $l < \infty$ как базисное подпространство X_l, натянутое на множество $\{e_i : \lambda_i \leqslant l\}$, так и его изоморфный образ, оба имеют конечный тип. Поэтому, в соответствии с предложением 2, имеем $\tilde{l} := \sup\{\tilde{\lambda}_{\rho(i)} : \lambda_i \leqslant l\} < \infty$. Отсюда следует утверждение (ii).

Чтобы доказать (iii), возьмем любое $l < \infty$, $\tilde{l}$ как выше и рассмотрим (7) с $p > \max\{l, \tilde{l}\}$. Тогда, учитывая (i), получим оценку

$$\left|\frac{\ln|t_i|}{a_i} - \left(\lambda_i - \tilde{\lambda}_{\rho(i)}\frac{\tilde{a}_{\rho(i)}}{a_i}\right)\right| \leqslant \frac{L}{q} + \frac{\ln C}{a_i} \text{ при } \lambda_i \leqslant l. \tag{10}$$

Правая часть этого неравенства не превосходит $L+1$, если $a_i \geqslant \psi(l)$. При этом можно считать, что функция ψ возрастает и $\psi(\xi) \to \infty$ когда $\xi \to \infty$. Комбинируя оценки (9), (10), заключаем, что (iii) выполняется с $\Delta = M + L + 1$ и $\gamma(x) := \psi^{-1}(x)$. $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 1. Пусть выполняется утверждение (a). Докажем, что тогда справедливо и утверждение (b), т. е. выполняются оценки (4) и (5) при каждом $m \in \mathbb{N}$ с (не зависящими от m) постоянной $\alpha = \Delta$ и функцией

$$\Phi(\xi) := \frac{\xi}{L} g^{-1}(\gamma(\xi)), \quad \xi \geqslant 0, \tag{11}$$

где L и g определяются условиями (i) и (ii) леммы 1.

Возьмем произвольный набор параметров (2), удовлетворяющий условию (6), любой номер $k = 1, 2, \ldots, m$ и номер $i \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\tau_k < a_i \leqslant t_k, \quad \sigma_k < b_i \leqslant s_k. \tag{12}$$

Тогда, согласно утверждению (i) леммы 1, получаем оценку

$$\frac{\tau_k}{L} < \tilde{a}_{\rho(i)} \leqslant L t_k. \tag{13}$$

Пусть $s_k \leqslant \Phi(\tau_k)$. Тогда из (12) выводим оценку $b_i \leqslant s_k \leqslant \Phi(\tau_k) < \Phi(a_i) \leqslant a_i \gamma(a_i)$. Поэтому $\lambda_i \leqslant \gamma(a_i)$. Отсюда и утверждения (iii) леммы 1 получаем $|b_i - \tilde{b}_{\rho(i)}| \leqslant \Delta a_i \leqslant \Delta t_k$. Благодаря этому имеем:

$$\sigma_k - \Delta t_k < \tilde{b}_{\rho(i)} \leqslant s_k + \Delta t_k. \tag{14}$$

Пусть теперь $s_k = +\infty$, но $\sigma_k \leqslant \Phi(\tau_k)$. Если $\lambda_i \leqslant \gamma(a_i)$, из утверждения (iii) леммы 1 следует, что $\sigma_k - \Delta t_k < \tilde{b}_{\rho(i)}$. Если же $\lambda_i > \gamma(a_i)$, из утверждения (ii) леммы 1 выводим оценку $\tilde{\lambda}_{\rho(i)} \geqslant g^{-1}(\lambda_i) \geqslant g^{-1}(\gamma(a_i))$. Поэтому, учитывая (i) леммы 1, получаем

$$\tilde{b}_{\rho(i)} = \tilde{\lambda}_{\rho(i)} \tilde{a}_{\rho(i)} \geqslant \frac{a_i}{L} g^{-1}(\gamma(a_i)) = \Phi(a_i) > \Phi(\tau_k) \geqslant \sigma_k > \sigma_k - \Delta t_k.$$

Таким образом, снова приходим к (14) (естественно полагая, что $\infty + const = \infty$). Итак, для всякого $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего условию (12) при некотором $k = 1, \ldots, m$, число $\rho(i)$ удовлетворяет условию (14). Поскольку отображение биективно, выводим отсюда неравенство (4) с Φ и $\alpha = \Delta$ не зависящими от m. Ввиду симметрии справедливо и неравенство (5). Тем самым, условие (b) доказано.

Пусть теперь справедливо утверждение (b). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим число

$$n_k := \sup\left\{n : n\alpha^k \leqslant \Phi\left(\alpha^{k-1}\right)\right\},$$

где α, Φ — постоянная и функция из определения эквивалентности систем $\left(\mu_m^X\right)$ и $\left(\mu_m^{\tilde X}\right)$. Для $n = 1, \ldots, n_k + 1$ введем в рассмотрение множества $N_{k,n}$, $M_{k,n}$, полагая

$$N_{k,n} := \left\{ i : \alpha^{k-1} < a_i \leqslant \alpha^k, \quad (n-1)\alpha^k < b_i \leqslant n\alpha^k \right\},$$
$$M_{k,n} := \left\{ i : \alpha^{k-2} < \tilde a_i \leqslant \alpha^{k+1},\ (n-1)\alpha^k - \alpha^{k+1} < \tilde b_i \leqslant n\alpha^k + \alpha^{k+1} \right\},$$

если $n \leqslant n_k$, и

$$N_{k,n_k+1} := \left\{ i : \alpha^{k-1} < a_i \leqslant \alpha^k, \quad n_k\alpha^k < b_i \right\},$$
$$M_{k,n_k+1} := \left\{ i : \alpha^{k-2} < \tilde a_i \leqslant \alpha^{k+1},\ n_k\alpha^k - \alpha^{k+1} < \tilde b_i \right\}.$$

По предположению, для каждого конечного множества L пар (k,n), справедлива оценка

$$\left| \bigcup_{(k,n)\in L} N_{k,n} \right| \leqslant \left| \bigcup_{(k,n)\in L} M_{k,n} \right|. \tag{15}$$

Следовательно, по теореме Холла–Кенига о различных представителях [12] найдется инъективное отображение $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что

$$\rho(N_{k,n}) \subset M_{k,n}, \quad n = 1, 2, \ldots, n_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Определим последовательность (r_i), полагая

$$r_i = \begin{cases} \exp(b_i - \tilde b_{\rho(i)}), & \text{если } i \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n=1}^{n_k} N_{k,n}, \\ 1 & \text{для остальных } i. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что оператор $T : X \to \tilde X$, заданный равенством $Te_i = r_i e_{\rho(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, осуществляет квазидиагональное вложение X в $\tilde X$. В силу симметрии условий имеем также $\tilde X \overset{\text{кд}}{\hookrightarrow} X$. По предложению 3 получаем $X \overset{\text{кд}}{\simeq} \tilde X$. $\triangleright$

Таким образом доказано, что система характеристик $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ является полным квазидиагональным инвариантом на классе степенных пространств Кёте второго рода.

Автор искренне благодарен В. П. Захарюте за постановку задачи и ряд полезных советов при подготовке статьи.

Литература

1. *Meise M., Vogt D.* Introduction to Fuctional Analysis.—New York: Oxford Univ. Press, 1997.—437 p.
2. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Кёте.—Ростов-на-Дону: изд-во Ростовского гос. ун-та, 1983.—144 с.
3. *Захарюта В. П.* Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте // Тр. VII зимней школы по мат. программированию и смежным вопросам. Дрогобыч, 1974.—М.: ЦЭМИ.—1976.—С. 101–126.
4. *Zahariuta V. P.* Linear topological invariants and their application to generalized power spaces // Turkish J. Math.—1996.—V. 20, № 2.—P. 237–289.
5. *Чалов П. А.* Квазиэквивалентность базисов в семействах гильбертовых пространств // Актуальные вопросы математического анализа.—Ростов-на-Дону: изд-во Ростовского гос. ун-та.—1978.—С. 167–173.

6. *Чалов П. А.* Линейные топологические инварианты на классе семейств гильбертовых пространств.—Ростов-на-Дону, 1980.—28 с.—Деп. в ВИНИТИ, № 4853–80.
7. *Захарюта В. П., Чалов П. А.* Конечные семейства ℓ_p-пространств и многопрямоугольные характеристики // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 3.—С. 538–549.
8. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires // Mem. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 16.—P. 1–174.
9. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук.—1961.—Т. 16, вып. 4(100).—С. 63–132.
10. *Pietsch A.* Nukleare Lokalkonvexe Räume.—Berlin: Akademie-Verlag, 1965.—217 p.
11. *Митягин Б. С.* Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math.—1971.—Т. 37, № 2.—P. 111–137.
12. *Холл М.* Комбинаторика.—М.: Мир, 1970.—258 р.

Статья поступила 30 ноября 2006 г.

Чалов Пётр Афанасьевич
Ростовский государственный университет
Ростов-на-Дону, 344090, RUSSIA
E-mail: `chalov@math.rsu.ru`