Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2007, Том 9, Выпуск 4

УДК **532.546+551.212**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАПОЛНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ МАГМОЙ[1]

А. А. Радионов

Решается задача о заполнении образовавшейся над магматической камерой вертикальной трещины с учетом наличия газовой подушки. Рассматриваются зависимость этого процесса от двух параметров — массы газа в газовой подушке и вязкости расплава. Показана возможность реализации колебательных режимов течения расплава в трещине.

Ключевые слова: математическое моделирование, магматический расплав, заполнение трещины.

Образование даек и увеличение их длины рассмотрено в работе [9]. Там предполагается, что раскрывающаяся трещина мгновенно заполняется магмой. В действительности, особенно при наличии микротрещин в породе, время раскрытия относительно большой трещины может быть существенно меньше, чем время заполнения ее магмой. При этом происходит дегазация магмы и пустующую область трещины заполняет газ, наличие которого может значительно повлиять на движение магмы. В настоящей работе решается задача о заполнении вертикальной трещины с учетом наличия газовой подушки, и рассматриваются возможные режимы этого процесса.

Рассматривается влияние двух параметров — начальной массы газа в газовой подушке и вязкости магматического расплава, изменение которых определяет условия, при которых вероятно дальнейшее растрескивание земной коры и продвижение магмы к поверхности земли.

1. Математическая модель

Рассматривался поднимающийся вертикально столб магматического расплава, заполняющий уже существующую трещину, и вводилась вертикальная координата z меняющаяся от 0 до 1 внутри этого столба. Она связана с вертикальной координатой Z меняющейся от 0 до высоты трещины, начало которой совпадало с точкой сопряжения трещины и магматической камеры, следующим соотношением:

$$Z = h(t)z,$$

[1]Работа выполнена в рамках темы «Математическое моделирование геофизических процессов вулканических центров Центрального Кавказа», программа фундаментальных исследований ОНЗ РАН «развитие технологий мониторинга, экосистемное моделирование и прогнозирование при изучении природных ресурсов в условиях аридного климата».

где $h(t)$ — высота столба магмы. При таком преобразовании координат частная производная по времени от функции $f(t, Z(t))$ принимает вид:

$$\frac{\partial f(t, Z(t))}{\partial t} = \frac{\partial f(t, z)}{\partial t} + \frac{z}{h(t)} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \frac{dh(t)}{dt},$$

а производная по координате от этой функции:

$$\frac{\partial f(t, Z(t))}{\partial Z} = \frac{1}{h(t)} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}.$$

Уравнение движения приводилось к безразмерному виду. Для этого были введены следующие безразмерные переменные (штрихом отмечены размерные переменные, нулем — их масштабы).

Для плотности $\rho = \frac{\rho'}{\rho'_0}$, ρ'_0 — начальная плотность магмы. Для вертикальной координаты $z = \frac{z'}{z'_0}$, где z'_0 — высота трещины, d'_0 — характерная ширина трещины. Для давления газа и магмы соответственно $p_g = \frac{p'_g}{p'_0}$, $p = \frac{p'}{p'_0}$, где p'_0 — литостатическое давление на глубине залегания камеры. Для вязкости расплава $\mu = \frac{\mu'}{\mu'_0}$, μ'_0 — вязкость исходной магмы ($\mu'_0 \approx 10^{4{,}5} \div 10^{5{,}5}$ Па·с) [1, 3, 7]; для скорости $V_h = \frac{V'_h}{V'_{h_0}}$, $V'_{h_0} = \frac{\mu'_0}{z'_0}$ — масштаб скорости; для времени $t = \frac{t'}{t'_0}$, где $t'_0 = \frac{{z'_0}^2}{\mu'_0}$ — масштаб времени. Масштабной величиной массы газа m'_0, которая находится в образовавшейся трещине, принималась масса растворенных летучих в магматическом расплаве, занимающем объем равный одной трети объема трещины.

Скорость поднимающегося столба магмы V_h находилась из решения уравнения переноса импульса, записанного для столба магматического расплава (все величины, кроме безразмерных параметров, зависят только от времени t):

$$\frac{dV_h}{dt} + \frac{(V_h)^2}{h} = -Eu\frac{\Delta p}{h} - Eg - \lambda Ar V_h, \tag{1}$$

с начальным условием $V_h = 0$.

Решение определяют следующие безразмерные параметры:

$$\mathrm{Eu} = \frac{{p'}_0 {z'}_0^2}{{\rho'}_0 {\mu'}_0^2}, \quad \mathrm{Eg} = \frac{g' {z'}_0^3}{{\mu'}_0^2}, \quad \mathrm{Ar} = \frac{{z'}_0^2}{{\rho'}_0 {d'}_0},$$

где g' — ускорение свободного падения, $\delta p = p_{gt} - p_0$ перепад давления между газом, находящимся над столбом магматического расплава и давлением в магматическом очаге, λ — безразмерная величина, зависящая от формы трещины, в случае цилиндрической трещины $\lambda = 8$. Давление газа p_{gt} над столбом магмы зависит от высоты $h(t)$ и находится из выражения, полученного из уравнения состояния Менделеева — Клайперона

$$p_{gt} = \frac{m'_0 R' T'_0}{\pi {d'_0}^2 z'_0 p'_0} \frac{m}{1 - h},$$

где m — масса газа, выделившаяся при дегазации магмы в момент образования трещины. Предполагалось, что трещину заполняют пары воды с характеристиками, взятыми при температуре 1250°C и давлении 120 МПа.

Высота $h(t)$ столба магмы находилась интегрированием по времени полученной из уравнения (1) скорости подъема V_h, с начальным условием $h = 0{,}01$.

Процесс подъема расплава ввиду большой скорости можно считать адиабатическим. Температура магматического расплава меняется при этом из-за его дегазации и кристаллизации. Массовое содержание растворенной газообразной фазы $c(p, T)$ зависит от давления, которое в момент образования трещины скачкообразно падает от значения давления в магматической камере практически до нуля. Предполагалось, что магматический расплав дегазируется не только в приповерхностном слое, но и в достаточно большом объеме внутри очага, прилегающем к поверхности под образовавшейся трещиной [1, 2, 4]. При изменении температуры расплава во время подъема происходит также выделение твердой фазы в виде кристаллов, что, несомненно, влияет на температуру расплава и, соответственно, на его вязкость [4]. Однако в первом приближении можно предполагать температуру и, следовательно, вязкость поднимающегося расплава неизменными, и решать изотермическую задачу. Такая ситуация может быть связана с незначительными перепадами температуры и содержания летучих по высоте столба магмы в трещине.

Уравнение (1) решалось численно методом конечных разностей, использовалась схема Рунге — Кутта второго порядка точности. В расчетах изучалось поступление магматического расплава в цилиндрическую трещину, образовавшуюся в верхней части магматической камеры на глубине 4000 м. Применялась центральная схема второго порядка точности по времени с простыми итерациями Ньютона [6].

Магматический расплав рассматривался как ньютоновская жидкость, плотность и вязкость полагались постоянными и выбирались в интервале условий $T = 600° - 1000°$C и $p = 100 - 400$ МПа. Плотность магматического расплава принималась равной $\rho'_0 = 2200$ (кг/м^3), вязкость исходной магмы $\mu'_0 \approx 10^{4{,}5} \div 10^{5{,}5}$ (Па·с), начальное содержание летучих ($c_0 = 0{,}05$). Трещина предполагалась заполненной газовой фазой, температура которой равняется температуре магмы. Расчет начинался в момент, когда расплав уже заполнил 1% высоты образовавшейся трещины. Высота трещины принималась равной $z'_0 = 100$ м, а радиус $d'_0 = 20$ м. Масса газа m в трещине над поднимающимся столбом магматического расплава считалась неизменной и равной начальной массе газа, выделившейся при дегазации магмы в момент образования трещины. Вторым параметром, входящим в безразмерные комплексы уравнения (1), является вязкость магматического расплава $\mu(p, T)$, которая принималась неизменной и равной вязкости расплава в момент образования трещины.

На нижней границе расчетной области, через которую расплав втекает в нее, давление задавалось постоянным. Безразмерное значение давления p_0 на нижней границе принималось в 1,3 раза большим литостатического.

2. Результаты расчетов

Столб магмы в трещине, почти заполнив ее, совершает затухающие колебания с амплитудой и частотой, зависящими от массы газа в газовой подушке над магмой. Газовая подушка не исчезает и давление газа в ней колеблется. При малой массе газа m эти колебания имеют бóльшую амплитуду, чем при больших значениях этой массы. Характерная зависимость давления, отнесенного к литостатическому, от времени представлена на рис. 1 (время измеряется в секундах). Видно, что давление в верхней части трещины при заполнении ее магмой может значительно превысить литостатическое. Это происходит в момент максимального сближения магмы с верхней границей трещины. Газовая фаза сжимается, и энергия этого сжатия компенсирует кинетическую энергию движения столба магматического расплава. В результате расплав, не достигая верхней границы трещины, останавливается и совершает затухающие колебания. Сила, действующая на элемент поверхности расплава со стороны газовой подушки, в равной степени приложена также и к верхней границе трещины. Такие пульсации давления в газовой подушке, вероятно, фиксируются на поверхности земли в виде упругих волн. При значительной величине давления в газовой подушке возможно дальнейшее растрескивание земной коры и продвижение трещины к поверхности земли. После затухания колебаний давление в газовой подушке стабилизируется и устанавливается значение, уравновешивающее совместно с весом столба магмы давление в магматическом очаге.

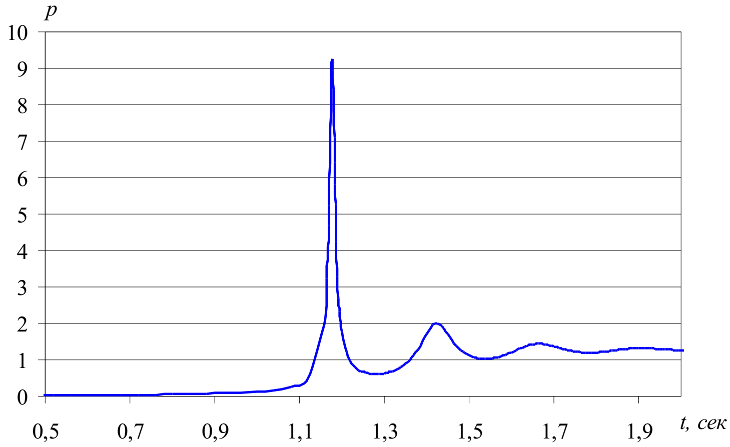

Рис. 1. Изменение давления в газовой подушке с течением времени после образования трещины при $m = 1,8$ и вязкости расплава $\mu_0' = 10^5$. Время выражено в секундах.

На рис. 2 приведена зависимость максимального давления в газовой подушке от массы газа в ней, а на рис. 3 — зависимость частоты колебаний давления в газовой подушке от этой массы. Чем меньше начальная масса газа над магмой, тем большее превышение давления над литостатическим наблюдается в газовой подушке и с ростом начальной массы газа частота колебаний увеличивается. При $m <$ 1,2 и вязкости расплава $\mu_0' = 10^5$ максимальная амплитуда колебаний давления может превышать литостатическое давление в несколько тысяч раз. По всей вероятности такие пульсации давления в трещинах в реальных условиях не наблюдаются в связи с большей чувствительностью малого количества газа в газовой подушке к форме верхней границы трещины. В этой связи следует заметить, что рис. 2 отражает зависимость максимально возможной амплитуды колебаний давления в газовой подушке, и при наличии неровностей на верхней границе эта амплитуда будет значительно меньше. При $m <$ 0,3 колебаний давления не возникает. Это связано с тем, что такой массы газа недостаточно для остановки движущегося столба магматического расплава. С ростом вязкости время достижения магматическим расплавом верхней границы трещины увеличивается, а амплитуда пульсаций давления уменьшается. При значениях вязкости $\mu_0' > 10^6$ трение о стенки трещины слишком велико и колебаний давления в газовой подушке не возникает.

В результате вычислительных экспериментов можно сделать вывод о том, что одним из возможных механизмов извержений может являться дальнейшее раскрытие образующихся над магматической камерой трещин при наличии газовой подушки. Вероятность продолжения растрескивания возрастает при незначительной дегазации и относительно маленькой вязкости магматического расплава. Таким образом, наиболее опасными с точки зрения дальнейшего продвижения к поверхности земли следует признать маловязкие магматические расплавы.

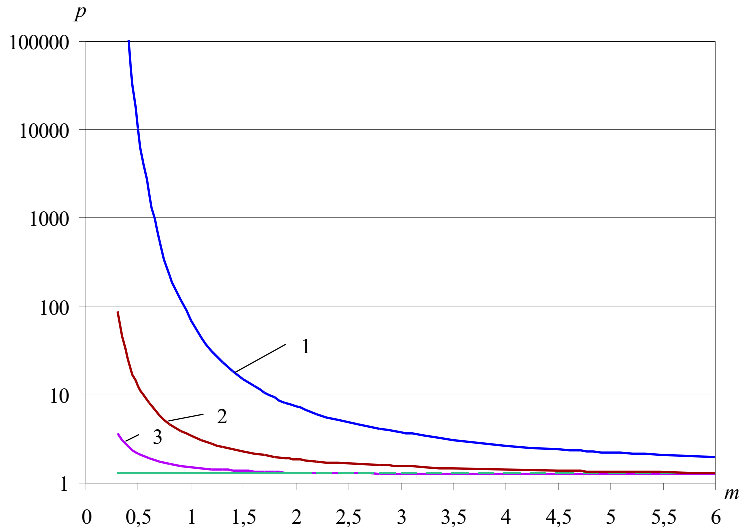

Рис. 2. Зависимость максимального давления в газовой подушке от массы газа. Приведенные кривые соответствуют: 1 — вязкость расплава $\mu_0' = 10^5$, 2 — вязкость расплава $\mu_0' = 10^{5,25}$, 3 — вязкость расплава $\mu_0' = 10^{5,5}$. Горизонтальная линия соответствует давлению в магматической камере.

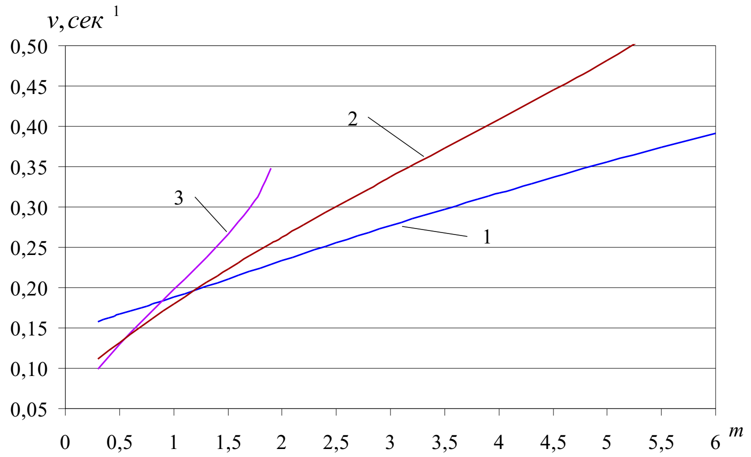

Рис. 3. Зависимость частоты колебаний газовой подушки от массы газа. Приведенные кривые соответствуют: 1 — вязкость расплава $\mu_0' = 10^5$, 2 — вязкость расплава $\mu_0' = 10^{5,25}$, 3 — вязкость расплава $\mu_0' = 10^{5,5}$ (в последнем случае при $m > 2$ колебания не наблюдаются). Частота выражена в размерном виде 1/сек.

Дальнейшее развитие представленной математической модели возможно посредством более последовательного учета изменения вязкости расплава, которая в процессе подъема магмы меняется в связи с изменением массовой концентрации растворенных летучих и кристаллизации расплава. Дегазация расплава и образование газовой подушки происходит не мгновенно, это обстоятельство также необходимо учитывать. Возможно также, что некоторое влияние на процесс заполнения трещины окажет ее геометрическая форма.

Литература

1. *Melnik O., Sparks R. S.* Nonlinear dynamics of lava dome extrusion // Nature.—1999.—V. 402.—P. 37–41.
2. *Ритман А.* Вулканы и их деятельность.—М.: Мир, 1964.—440 с.
3. *Чернов А. А.* Об одной модели затвердевания магмы в процессе эксплозивного вулканического извержения // Прикл. механика и тех. физика.—2003.—Т. 44, № 5.—С. 79–89.
4. *Dufek J., Bergantz G. W.* Transient two-dimensional dynamics in the upper conduit of a rhyolitic eruption: A comparison of closure models for the granular stress // J. of Volcanology and Geothermal Research.—2005.—V. 143.—P. 113–132.
5. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред.—М.: Наука, 1987.—824 с.
6. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики.—М.: УРСС, 2004.—423 с.
7. *Lyakhovsky V., Hurwitz S., Navon O.* Bubble growth in rhyolitic melts: experimental and numerical investigation // Bull Volcanol.—1996.—V. 58.—P. 19–32.
8. *Lensky N. G., Lyakhovsky V., Navon O.* Radial variations of melt viscosity around growing bubbles and gas overpressure in vesiculating magmas // Earth and Planetary Science Letters.—2001.—V. 186.—P. 1–6.
9. *Meriaux C., Jaupart G.* Simple fluid dynamic models of volcanic rift zones // Earth and Planetary Science Letters.—1995.—V. 136.—P. 223–240.

Статья поступила 13 января 2007

Радионов Анатолий Анатольевич, к. т. н.
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Владикавказ, 362027, РОССИЯ
E-mail: aar200772@mail.ru