Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 2, С. 21–29

УДК **513.881**

О КЛАССАХ ПРОСТРАНСТВ КЁТЕ, В КОТОРЫХ КАЖДОЕ ДОПОЛНЯЕМОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО ИМЕЕТ БАЗИС[1]

В. П. Кондаков, А. И. Ефимов

Исследуются классы пространств Кёте, аналогичных в определенном смысле известным пространствам L_f, определяемым функциями Драгилева. Показывается, что в пространствах из отдельных классов, а также в декартовых произведениях некоторых классов каждое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно подходящеиму координатному (базисному) подпространству. В частности, декартовы произведения пространств Кёте — Фреше из разных классов L_f типа 0 и 1 обладают этим свойством.

Ключевые слова: пространства Кёте, базисы, дополняемые подпространства.

В работах [1, 2] приводятся классы пространств Кёте, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно подходящему координатному подпространству. В [3] модификацией приемов работы [4] показано, что в декартовых произведениях пространств из выделенных классов при дополнительных предположениях относительно сомножителей дополняемые подпространства также имеют базисы и изоморфны произведениям координатных подпространств сомножителей.

В настоящей работе результаты работы [2] дополняются описанием класса пространств Кёте с упомянутым свойством дополняемых подпространств (доказанным в [2]). Затем излагается обобщение результатов из [4] о существовании базисов в дополняемых подпространствах декартовых произведений пространств Кёте E, F в каждом из которых дополняемые подпространства имеют базисы, и все непрерывные линейные отображения из E в F компактны. Это является ослаблением условий на сомножители, налагавшихся в [3, 4].

Определение 1 [2]. Будем говорить, что правильная матрица Кёте $([a_r(n)])$ определяется последовательностью весовых функций с упорядоченностью парных композиций с обратными функциями, если выполнено условие

$$\exists\, r(1)\ \ \forall\, r(2)\ \ \exists\, r(3) \quad C>0, \quad a_{r(2)}\left(a^{-1}_{r(1)}(t)\right) \leqslant C a_{r(3)}\left(a^{-1}_{r(2)}(t)\right).$$

Для краткости будем называть такие матрицы *матрицами Кёте со свойством* (s_1).

В частности, любое пространство класса $(f)_0$ определяется канонической матрицей (из определения) со свойством (s_1).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а.

Определение 2 [2]. Будем говорить, что правильная матрица Кёте $[a_r(n)]$ определяется последовательностью весовых функций с обратной упорядоченностью парных композиций с обратными функциями, если выполнено условие

$$\forall\, r(1)\ \ \exists\, r(2)\ \ \forall\, r(3)\ \ \exists\, C(r(3)) > 0,$$
$$a_{r(3)}\left(a_{r(2)}^{-1}(t)\right) < C(r(3))a_{r(2)}\left(a_{r(1)}^{-1}(t)\right) \quad \forall\, t.$$

Для краткости будем называть такие матрицы Кёте *матрицами Кёте со свойством* (s_2).

Определение 3 [2]. Будем говорить, что правильная матрица Кёте $[a_r(n)]$ обладает свойством $(\widetilde{s}_2)$, если выполнено условие

$$\forall\, r(1)\quad \exists\, r(2),\quad \exists\, C(r(2)) > 0\quad \forall\, r(3)$$
$$a_{r(3)}(a_{r(2)}^{-1}(t)) < C(r(2))a_{r(2)}(a_{r(1)}^{-1}(t))\quad \forall\, t.$$

Пространство Кёте из класса $(f)_1$ обладает свойством $(\widetilde{s}_2)$. Заметим, что классы пространств Кёте, соответствующих матрицам со свойствами (s_1) и $(\widetilde{s}_2)$, могут пересекаться.

Предложение 1 [2]**.** *Пусть* $E = l_2\left([a_r(n)], \left(l_2^{M(n)}\right)\right)$ *— блочное счетно-гильбертово пространство Кёте, где* $M(n) \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *класса* (d_1), *определенное правильной матрицей* $[a_r(n)]$ *со свойством* $(\widetilde{s}_2)$. *Тогда произвольное дополняемое подпространство* F *в* E *изоморфно некоторому координатному подпространству в* E *вида* $E = l_2\left([a_r(m(n))], \left(l_2^{L(n)}\right)\right)$, *где* $(m(n))$ *— последовательность натуральных чисел без повторений и* $L(n) \leqslant M(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 2 [2]**.** *Пусть* $E = l_2\left([a_r(n)], \left(l_2^{M(n)}\right)\right)$ *— блочное счетно-гильбертово пространство Кёте, где* $M(n) \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *класса* $(\widetilde{d}_2)$, *определенное правильной матрицей* $[a_r(n)]$ *со свойством* (s_1) *(упорядоченности парных композиций с обратными функциями). Тогда произвольное дополняемое подпространство* F *в* E *изоморфно некоторому координатному подпространству в* E *вида* $l_2\left([a_r(m(n))], \left(l_2^{L(n)}\right)\right)$, *где* $(m(n))$ *— последовательность натуральных чисел без повторений и* $L(n) \leqslant M(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Приведем пример пространств Кёте, отличных от L_f, обладающих указанными выше свойствами.

Пример. Матрицу Кёте будем определять следующим образом:

$$a_r(n) = \exp \overbrace{f(f(\ldots f(\lambda_r)\ldots))}^{n \text{ раз}} = \exp f^{(n)}(\lambda_r),$$

где f — нечетная, монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(\forall\, \alpha > 1)\ \frac{f(\alpha t)}{f(t)} \uparrow +\infty,\ t \uparrow +\infty$,
2. $(\exists\, \alpha > 1)\ (\forall\, t > 0)\ f(t) > \alpha t$,
3. $(\forall\, t > 0)\ (\forall\, \alpha > 1)\ f(\alpha t) > \alpha f(t)$.

А для λ_r выполняется:

$$\lambda_r \uparrow \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Покажем правильность данной матрицы Кёте.

Пусть $t > 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(t) = \lim_{n\to\infty} \alpha^n t = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(f^{(n)}(\lambda_r) - f^{(n)}(\lambda_{r+1})\right) = \lim_{n\to\infty} \exp f^{(n)}(\lambda_{r+1}) \left(\frac{f^{(n)}(\lambda_r)}{f^{(n)}(\lambda_{r+1})} - 1\right)$$

$$< \lim_{n\to\infty} \exp f^{(n)}(\lambda_{r+1}) \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} - 1\right) = 0,$$

$$\frac{f(\alpha t)}{f(t)} > \alpha \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{f(t)}{f(\alpha t)} \Rightarrow \frac{t}{\alpha t} > \frac{f(t)}{f(\alpha t)} \Rightarrow t = f^{(n)}(\lambda_r), \quad \alpha t = f^{(n)}(\lambda_{r+1}),$$

$$\frac{f^{(n)}(\lambda_r)}{f^{(n)}(\lambda_{r+1})} > \frac{f^{(n+1)}(\lambda_r)}{f^{(n+1)}(\lambda_{r+1})} \Rightarrow \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \downarrow 0.$$

Введенный в этом примере класс пространств можно разбить на подклассы, содержащиеся в известных классах (d_1), (d_2) Драгилева [5].

1. Пусть $\lambda = +\infty$. Покажем, что тогда $l_p[a_r(n)] \in (d_1) \cap (s_1)$. Возьмем $s(r)$ так, чтобы $\frac{\lambda_{s(r)}}{\lambda_r} > \frac{\lambda_r}{\lambda_1}$, что возможно, так как

$$\lambda_s \uparrow +\infty \Rightarrow f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) - f^{(n)}(\lambda_r) = f^{(n)}(\lambda_r \frac{\lambda_{s(r)}}{\lambda_r}) - f^{(n)}(\lambda_r)$$

$$> f^{(n)}(\lambda_1 \frac{\lambda_{s(r)}}{\lambda_r}) - f^{(n)}(\lambda_1) > f^{(n)}(\lambda_r) - f^{(n)}(\lambda_1) \Rightarrow (d_1).$$

Положим

$$n_{s_0}(t) = \min_{t < a_{s_0}(n)} n, \text{ т. е. } n_{s_0}(t) - 1 < a_{s_0}^{-1}(t) < n_{s_0}(t),$$

$$n_r(t) = \max_{t > a_r(n)} n, \text{ т. е. } n_r(t) + 1 > a_r^{-1}(t) > n_r(t).$$

Тогда $a_r(n_r(t)) < t < a_{s_0}(n_{s_0}(t))$,

$$a_{s_0}(n_{s_0}(t) - 1) < t < a_r(n_r(t) + 1) \;\Rightarrow\; f^{(n_r(t))}(\lambda_r) < f^{(n_{s_0}(t))}(\lambda_{s_0})$$

и для всех t выполнены соотношения

$$f^{(n_{s_0}(t)-1)}(\lambda_{s_0}) < f^{(n_r(t)+1)}(\lambda_r) \Rightarrow f^{(n_{s_0}(t)-n_r(t)-2)}(\lambda_{s_0}) < \lambda_r < f^{(n_{s_0}(t)-n_r(t))}(\lambda_{s_0})$$

$$\Rightarrow (\exists\, m > 2)\ (\forall\, t) \quad n_r(t) + m - 2 < n_{s_0}(t), \quad n_{s_0}(t) < n_r(t) + m,$$

$$a_r(a_{s_0}^{-1}(t)) \leqslant a_r(n_{s_0}(t)) \leqslant a_r(n_r(t) + m) = \exp f^{(n_r(t)+m)}(\lambda_r)$$

$$= \exp f^{(n_r(t))}(\lambda_{s(r)}) = a_{s(r)}(n_r(t)) \leqslant a_{s(r)}(a_r^{-1}(t)),$$

где

$$\lambda_{s(r)} = f^{(m)}(\lambda_r) \Rightarrow a_r(a^{-1}(t)) \leqslant C(r) a_{s(r)}(a_r^{-1}(t)) \quad \forall\, t \Rightarrow (s_1).$$

2. Пусть $0 < \lambda < +\infty$. Покажем, что тогда $l_p[a_r(n)] \in (d_1) \cap (s_2)$.

Существуют n_0, $s(r)$ такие, что для любого $n > n_0$ справедливы соотношения

$$\frac{f^{(n)}(\lambda_{s(r)})}{f^{(n)}(\lambda_r)} > \frac{f^{(n)}(\lambda_r)}{f^{(n)}(\lambda_1)} \;\Rightarrow\; f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) - f^{(n)}(\lambda_r) = f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) \left[1 - \frac{f^{(n)}(\lambda_r)}{f^{(n)}(\lambda_{s(r)})}\right]$$

$$> f^{(n)}(\lambda_r) \left[1 - \frac{f^{(n)}(\lambda_r)}{f^{(n)}(\lambda_{s(r)})}\right] > f^{(n)}(\lambda_r) \left[1 - \frac{f^{(n)}(\lambda_1)}{f^{(n)}(\lambda_r)}\right] = f^{(n)}(\lambda_r) - f^{(n)}(\lambda_1) \Rightarrow (d_1).$$

Пусть $a_\infty(n) = \exp f^{(n)}(\lambda)$, $n_r(t) = \min_{t<a_r(n)} n$, $n_s(t) = \max_{t>a_s(n)} n$, т. е. $a_s(n_s(t)) < t < a_r(n_r(t))$ и $a_r(n_r(t)-1) < t < a_s(n_s(t)+1)$. Тогда, так же как и выше, получаем

$$(\exists\, m > 2)\ (\forall\, t) \quad n_s(t) + m < n_r(t), \quad n_r(t) < n_s(t) + m + 2.$$

Подберем s так, чтобы $f^{(m-4)}(\lambda_s) \geqslant \lambda$. Тогда $n_r(t) - n_s(t) > m$, $a_\infty(n) \leqslant a_s(n+m-2)$ и

$$a_k(a_s^{-1}(t)) \leqslant a_\infty(n_s(t)+1) \leqslant a_\infty(n_r(t)-m+1) \leqslant a_s(n_r(t)-1) \leqslant a_s(a_r^{-1}(t)) \ \Rightarrow\ (s_2).$$

3. Пусть $\lambda = 0$. Покажем, что тогда $l_p[a_r(n)] \in (d_2) \cap (s_1)$. Положим

$$n_{s_0}(t) = \min_{t<a_{s_0}(n)} n, \ \text{ т. е. } n_{s_0}(t) + 1 > a_{s_0}^{-1}(t) > n_{s_0}(t),$$
$$n_r(t) = \max_{t>a_r(n)} n, \ \text{ т. е. } n_r(t) - 1 < a_r^{-1}(t) < n_r(t),$$

и заметим, что существуют $t_0 > 0$ и m такие, что для любых $t < t_0 n_{s_0}(t) > n_r(t) - m$, поэтому

$$a_r(a_{s_0}^{-1}(t)) \leqslant a_r(n_{s_0}(t)) \leqslant a_r(n_r(t)-m) = \exp f^{(n_r(t)-m)}(\lambda_r)$$
$$= \exp f^{(n_r(t))}(\lambda_{s(r)}) = a_{s(r)}(n_r(t)) \leqslant a_{s(r)}(a_r^{-1}(t)) \quad \forall\, t > t_0,$$

где $\lambda_r = f^{(m)}(\lambda_r) \Rightarrow a_r(a^{-1}(t)) \leqslant C(r) a_{s(r)}(a_r^{-1}(t)) \quad \forall\, t \quad \Rightarrow (s_1)$

$$\forall\, r\ \exists\, s(r)\ \forall\, k > s(r)\ \exists\, n_0 \quad \forall\, n > n_0,$$
$$f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) f^{(n)}(\lambda_r) > f^{(n)}(\lambda_k) - f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) \Rightarrow (d_2).$$

4. Пусть $\lambda < 0$. Покажем, что тогда $l_p[a_r(n)] \in (d_2) \cap (s_2)$.

$$\forall\, r\ \exists\, s(r)\ \forall\, k > s(r)\ \exists\, n_0 \quad \forall\, n > n_0,$$
$$f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) - f^{(n)}(\lambda_r) > f^{(n)}(\lambda_k) - f^{(n)}(\lambda_{s(r)}) \Rightarrow\ (d_2).$$

Пусть $a_\infty(n) = \exp f^{(n)}(\lambda)$, $n_r(t) = \max_{t>a_r(n)} n$, т. е. $a_r^{-1}(t) < n_r(t)$, $n_s(t) = \min_{t<a_s(n)} n$, т. е. $a_s^{-1}(t) > n_s(t)$. Возьмем s такое, что $n_s(t) - n_r(t) > m$ и $a_\infty(n) \leqslant a_s(n-m)$. Тогда

$$a_k(a_s^{-1}(t)) \leqslant a_\infty(n_s(t)) \leqslant a_\infty(n_r(t)+m) \leqslant a_s(n_r(t)) \leqslant a_s(a_r^{-1}(t)) \Rightarrow (s_2).$$

Из результатов работы [2] вытекает справедливость следующего утверждения

Предложение 3. *Пусть* $E = l_p[\exp f^{(n)}(\lambda_r)]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Если* $\lambda \in [0, \infty)$ $(\lambda_r \uparrow \lambda)$, *то в* E *каждое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно (базисному) подпространству.*

Лемма [3–5, 8]**.** *Пусть в декартовом произведении* $X = E \times F$ *пространств Фреше* E, F *задана проекция* P *на дополняемое подпространство* $G \subset X$ *и эта проекция имеет треугольный вид*

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix}, \ \text{где } P_{ij} = P_i P P_j, \ i, j = 1, 2,$$

P_1, P_2 *— проекции на* E, F *соответственно. Тогда* G *изоморфно дополняемому подпространству вида* $\widetilde{G} = E_1 \times F_1$, *где* E_1 *дополняемо в* E, *а* F_1 *дополняемо в* F.

$\lhd$ Сначала заметим, что поскольку P — проекция, т. е. $P^2 = P$, справедливы равенства $P_{11}P_{11} = P_{11}$, $P_{11}P_{12}+P_{12}P_{22} = P_{12}$ и $P_{22}P_{22} = P_{22}$, откуда $P_{11}P_{11}+P_{11}P_{12}+P_{12}P_{22} = P_{11} + P_{12}$. Введем изоморфное отображение (автоморфизм)

$$T = \begin{pmatrix} I & -P_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

и определим линейный оператор

$$\widetilde{P} = TPT = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь равенство получено с использованием отмеченных выше равенств и из них же следует, что $\widetilde{P}$ — проекция на подпространство $\widetilde{G}$ указанного вида.

Пусть E и F — локально выпуклые пространства. Линейное отображение T пространства E в F называют *компактным или вполне непрерывным*, если существует такая окрестность нуля U в F, что образ TU является предкомпактным множеством в F [7]. Если T является компактным отображением, действующим в пространствах Фреше $(E, (|\cdot|_r))$ и $(F, (\|\cdot\|_r))$, то как бы ни были выбраны системы полунорм, задающие исходные топологии в этих пространствах, выполнено условие

$$\exists\, r(0)\ \forall\, r\ \exists\, C(r) > 0, \quad \|Te\|_r \leqslant C(r)|e|_{r(0)}, \quad e \in E,$$

и с некоторого номера

$$\|Te\|_r \leqslant C(r)|e|_r, \quad e \in E\ (r > r(0)). \tag{1}$$

Более общим образом, если для оператора $T : E \to F$, действующего в пространствах Фреше, при любом выборе систем полунорм $(|\cdot|_r)$ в E и $(\|\cdot\|_r)$ в F выполнены условия ограниченности T в парах нормированных пространств $(E, (|\cdot|_r))$, $(F, (\|\cdot\|_r))$ для достаточно больших r $(\exists\, (r(k)) :\ r(k) \to \infty)$, т. е. выполнено (1), и никакое сужение T на бесконечномерное подпространство в E не будет обратимо, то оператор T будем называть *ограниченно строго сингулярным*. Очевидно, компактное отображение является ограниченно строго сингулярным. Известно, что спектр строго сингулярного оператора $T : E \to E$ состоит из не более чем счетного множества точек комплексной плоскости с $\lambda = 0$ как единственной возможной предельной точкой [9, 10]. Пространство Фреше E и F назовем *структурно различными*, если все непрерывные линейные отображения из E в F (или из F в E) ограниченно строго сингулярны. В частности, E и F структурно различны, если все непрерывные линейные отображения из E в F компактны. $\rhd$

Теорема 1 [3–5, 8]**.** *Пусть в декартовом произведении $X = E \times F$ структурно различных пространств Фреше E, F подпространство G дополняемо. Тогда G изоморфно дополняемому подпространству вида $\widetilde{G} = E_1 \times F_1$, где E_1 дополняемо в E, а F_1 дополняемо в F.*

$\lhd$ Для определенности будем предполагать, что все непрерывные линейные отображения из E в F ограниченно строго сингулярны. Как и выше, P_i, $i = 1, 2$, обозначаем проекторы из X на сомножители E, F соответственно и обозначим P — проектор из X на G.

Пространство Фреше $(X, (|\cdot|_r))$ всегда можно наделить новой системой полунорм $(\|\cdot\|_r)$, определяющей исходную топологию так, чтобы проектор P был ограничен в каждом нормированном пространстве

$$(X/Z_{r0}, \|\cdot\|_r),\ \text{где}\ Z_{r0} = \{x \in X :\ \|x\|_r = 0\}.$$

Для этого достаточно положить

$$\|x\|_r = \sqrt{|Px|_r^2 + |(I-P)x|_r}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что E наделено именно такой системой норм.

Согласно сделанным предположениям, оператор $S = P_2 P P_1$ является ограниченно строго сингулярным и в каждом ассоциированном банаховом пространстве X_r, полученном пополнением X/Z_{r0} по норме $\|\cdot\|_r$, оператор с треугольной матрицей

$$P - S = Q = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix},$$

согласно теории Рисса, имеет спектр $\sigma(Q)$, состоящий из не более чем счетного множества точек с единственно возможными предельными точками 0 и 1 [4, лемма 3.1]. В этом можно убедиться и непосредственно, как в [3], с учетом того, что оператор $P - \lambda I$ имеет непрерывный обратный

$$\frac{1}{\lambda^2 - \lambda}((1-\lambda)I - P) \text{ при } \lambda \neq 0, 1,$$

а тогда $P - \lambda I - S$ может только иметь дискретный спектр указанного вида. Кроме того, для чисел $\lambda \in \sigma(Q) \backslash \{0, 1\}$ соответствующие спектральные проекторы конечномерны (подробнее см., например, [4, 9]).

Для того, чтобы применить результат доказанной леммы, по оператору Q, который может не являться проекцией, построим проектор $\widetilde{Q}$ с образом $\widetilde{Q}X$, который почти изоморфен образу проектора P, то либо PE изоморфно подпространству конечной коразмерности в $\widetilde{Q}(E)$, либо наоборот.

Сказанное выше, позволяет определить проектор в точности как в [4, 6] и др., а именно, полагаем

$$\widetilde{Q} = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (Q - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где γ — некоторая кривая, зависящая только от Q (не пересекающая спектра $\sigma(Q)$, который также не зависит от индексов полунорм $r > r(0)$ [6] с 1 во внутренности и 0 во внешности γ).

Так как спектр Q не зависит от того, в каком ассоциированном банаховом пространстве (пополнением $X/\chi_{r(0)}$ по $\|\cdot\|_r$ при $r > r(0)$) его рассматривать, согласно спектральной теории операторов в банаховых пространствах [13, с. 226, теорема 6.17], [6] определяется разложение пространства $X = X_1 \times X_2$, где $X_1 = \widetilde{Q}X$ и $X_2 = (I - \widetilde{Q})X$ — замкнутые пространства, инвариантные относительно Q. Причем Q обратим на X_1, а на X_2 обратим оператор $I - Q$ согласно выбору γ.

Легко проверить, что оператор

$$Q^2 - Q = (P - S)^2 - (P - S) = -PS - SP + S^2 + S$$

строго сингулярен в каждом ассоциированном банаховом пространстве с индексом $r > r(0)$. Поэтому на X_1 строго сингулярно сужение оператора $I - Q$, а на X_2 строго сингулярно сужение Q. Записывая оператор Q в виде

$$Q = \widetilde{Q} + (Q - I)\widetilde{Q} + Q(I - \widetilde{Q}),$$

получаем $P-\widetilde{Q}=S_1=S+(Q-I)\widetilde{Q}+Q(I-\widetilde{Q})$, т. е. проекции P и $\widetilde{Q}$ отличаются на строго сингулярный оператор. Кроме того, проекция $\widetilde{Q}$ имеет требуемое для применения леммы треугольное представление, поскольку такое представление имеют операторы $Q-\lambda I$ и обратные к ним.

Чтобы проверить почти изоморфность образов проекторов P и $\widetilde{Q}$, представим тождественное отображение X на X в матричной форме, соответствующей разложениям

$$X=(\widetilde{Q}+S_1)X\oplus(I-(\widetilde{Q}+S_1))X\to X=\widetilde{Q}X\oplus(I-\widetilde{Q})X.$$

Имеем

$$I=\begin{pmatrix}\widetilde{Q}(\widetilde{Q}+S_1) & \widetilde{Q}(I-(\widetilde{Q}+S_1))\\ (I-\widetilde{Q})(\widetilde{Q}+S_1) & (I-\widetilde{Q})(I-(\widetilde{Q}+S_1))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{Q}+\widetilde{Q}S_1 & -\widetilde{Q}S_1\\ (I-\widetilde{Q})S_1 & I-\widetilde{Q}-(I-\widetilde{Q})S_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\widetilde{Q}+\widetilde{Q}S_1 & 0\\ 0 & I-\widetilde{Q}-(I-\widetilde{Q})S_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\widetilde{Q}S_1\\ (I-\widetilde{Q})S_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Второе слагаемое определяет строго сингулярный оператор в любом ассоциированном банаховом пространстве, начиная с некоторого индекса, так что, согласно [11] (см. также [9]), первое слагаемое, определяет почти изоморфизм. Согласно тому же факту из [9, 10, 11] компоненты первого слагаемого тоже являются почти изоморфизмами соответствующих сомножителей указанных двух представлений X. Применив утверждение леммы к проектору $\widetilde{Q}$ с треугольной матрицей, соответствующей исходному представлению $X=E\times F$, получаем изоморфизм образа проектора $\widetilde{Q}$ подпространству вида $\widetilde{E_1}\times\widetilde{F_1}$, где $\widetilde{E_1}$ дополняемо в E, а $\widetilde{F_1}$ дополняемо в F. Учитывая нулевой индекс почти изоморфизма в приведенном выше разложении тождественного оператора, почти изоморфизм образа проектора P в (или на) подпространство $\widetilde{E_1}\times\widetilde{F_1}$ достраивается до изоморфизма подпространству требуемого вида $\widetilde{G}=E_1\times F_1$, поскольку конечномерные подпространства одинаковой размерности изоморфны при любом сопоставлении базисов. $\triangleright$

Замечание. Приведенное утверждение и для случая банаховых пространств усиливает соответствующий результат из [4]. Напомним, что в [4] рассматривались произведения вида $l_p\times l_q$ и при получении аналогичного описанному выше изоморфизма существенно использовался тот факт, что все непрерывные линейные отображения из l_q в l_p при $q>p$ компактны, а из l_p в l_q строго сингулярны. Выше достаточно компактности и (ограниченной) строго сингулярности в одну сторону и это существенно будет ниже при рассмотрении ненормируемых пространств, когда известны случаи компактности всех непрерывных линейных отображений из E в F и в тоже время F изоморфно подпространству в E. В частности, это верно для пространства A_1 аналитических функций внутри единичного круга в качестве E и пространства целых функций $F=A_\infty$ с топологиями равномерной сходимости на компактах.

Упомянем здесь и произведения банаховых пространств вида $l_p\times L_q(a,b)$ с $p>\max(2,q)$ и $p<\min(2,q)$, в которых дополняемые подпространства изоморфны произведениям дополняемых подпространств сомножителей. В этих случаях компактность всех непрерывных отображений из l_p в $L_q(a,b)$ при $p>\max(2,q)$ и из $L_q(a,b)$ в l_p при $p<\min(2,q)$ отмечалась в [12].

Теорема 2. *Пусть $X=E\times F$ — декартово произведение пространств Кёте $E=l_2[a_r^{(1)}(n)]$, $F=l_2[a_r^{(2)}(n)]$, матрицы которых правильные и удовлетворяют условиям (d_2) и (s_1), (d_1) и (s_2) соответственно. Тогда каждое дополняемое подпространство G*

в X имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству.

$\lhd$ Согласно [14], каждый оператор из E в F компактен и дополняемое подпространство G изоморфно ввиду теоремы 1 подпространству вида $E_1 \times F_1$, где E_1 дополняемо в E, а F_1 дополняемо в F. Утверждение теоремы теперь вытекает из предложений 1 и 2. $\rhd$

Из приведенного выше предложения и теоремы 2 непосредственно выводится

Следствие 1. *В пространствах Кёте вида $l_2[\exp f_1^{(n)}(\lambda_r)] \times l_2[\exp f_2^{(n)}(\mu_r)]$, где $\lambda_r \uparrow 0$, $\mu_r \uparrow \mu$, $0 < \mu < \infty$, а f_1, f_2 удовлетворяют условиям 1–3 примера (где и описаны свойства пространств-сомножителей), каждое дополняемое подпространство имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству.*

Следствие 2 [3]. *Каждое дополняемое подпространство декартова произведения $E \times F$ пространств Кёте $E = l_2[\exp f_1(\frac{1}{r}a_n)]$ и $F = l_2[\exp f_2(1 - \frac{1}{r})b_n)]$, где f_i — выпуклые функции, $a_n \uparrow \infty$, $b_n \uparrow \infty$, имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству.*

Анализ приведенных выше рассуждений показывает, что перечисленные результаты легко и непосредственно переносятся на случай блочных пространств из тех же классов. В случае бесконечномерных размерностей блоков ссылаться на спектральные свойства компактных или строго сингулярных операторов нельзя, но обойти эту трудность можно, наложив дополнительное требование, чтобы правильные матрицы блочных пространств сомножителей определяли (не блочные) пространства, изоморфные своим гиперподпространствам. Аналитические характеризации таких матриц хорошо известны. Можно высказать предположение, что более детальный анализ прямых рассуждений доказательств, то есть не использующий теории Рисса и ее обобщений на строго сингулярные операторы, позволит снять упомянутое дополнительное требование.

Литература

1. *Кондаков В. П.* О дополняемых подпространствах некоторых пространств Кёте бесконечного типа // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 1.—С. 112–119.
2. *Кондаков В. П., Ефимов А. И.* О двух классах пространств Кёте — Фреше, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 4.—С. 43–49.
3. *Кондаков В. П.* Характеризация дополняемых подпространств в декартовых произведениях структурно несравнимых пространств Кёте из классов $(f)_0$ и $(f)_1$ Драгилева // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 2.—С. 1–4.
4. *Edelstein I. S., Wojtaszczyk P.* On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces // Studia Math.—1976.—V. 106.—P. 203–276.
5. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб.—1965.—Т. 68, № 2.—С. 153–173.
6. *Prada J.* On idempotent operators on Frechet spaces // Arch. Math.—1984.—V. 43.—P. 179–182.
7. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
8. *Djakov P. B., Önal S., Terzioglu T., Yurdakul M.* Strictly singular operators and isomorphisms of Cartesian products of power series spaces // Arch. Math.—1998.—V. 70.—P. 57–65.
9. *Wrobel V.* Streng singuläre Operatoren in lokalkonvexen Räumen // Math. Nachr.—1978.—Bd. 83.—S. 127–142.
10. *Wrobel V.* Streng singuläre Operatoren in lokalkonvexen Räumen II // Beschränkte Operatoren Math. Nachr.—1983.—V. 110.—P. 205–213.
11. *Пич А.* Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.
12. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха. Ч. 2 // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, вып. 6(162).—С. 73–149.

13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—740 с.
14. *Захарюта В. П.* Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств // Функцион. анализ.—1970.—Т. 4, вып. 2.—С. 87–88.

Статья поступила 6 декабря 2007 г.

Кондаков Владимир Петрович
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: kond@math.rsu.ru

Ефимов Анатолий Иванович
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН;
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: anatefim@mail.ru